Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

WiSe 2010/11
Abgabe: bis 15.11.10, 14 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra I

Übungsblatt 6

Aufgabe 20 (Pflichtabgabe)

a) Sei R ein Ring. Ein Element $a \in R$, $a \neq 0$, heißt Nullteiler, wenn es ein $b \in R$, $b \neq 0$, gibt mit $ab = 0$ oder $ba = 0$. Zeigen Sie:
Ist $a \in R$ invertierbar, dann ist a kein Nullteiler.

b) Es seien R_1 und R_2 Ringe. Zeigen Sie, dass $R_1 \times R_2 := \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in R_1, r_2 \in R_2\}$ mit den komponentweisen Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(r_1, r_2) + (s_1, s_2) &:= (r_1 + s_1, r_2 + s_2)\\ (r_1, r_2) \cdot (s_1, s_2) &:= (r_1 \cdot s_1, r_2 \cdot s_2)\end{aligned}$$

ein Ring ist.

c) Seien nun R_1 und R_2 Körper. Ist dann auch $R_1 \times R_2$ mit den Verknüpfungen aus b) ein Körper?

Aufgabe 21 (Pflichtabgabe)

Bestimmen Sie den ggT der Polynome $f, g \in \mathbb{Z}_5[t]$ mit $f(t) = t^3+2t^2+4$ und $g(t) = t^4+4t^3+3t+1$ und zerlegen Sie f und g anschließend soweit wie möglich in Produkte von Polynomen.

Aufgabe 22

Es sei R die Menge aller reellen Folgen (a_n) mit $a_n \neq 0$ für nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass R mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(a_n) + (b_n) &:= (a_n + b_n) \text{ und}\\ (a_n) * (b_n) &:= (c_n)\end{aligned}$$

mit $c_n := \sum\limits_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ einen Ring bildet. Welche Elemente sind invertierbar? Gibt es Nullteiler?

Aufgabe 23

Es sei $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ der Ring der Polynome mit reellen Koeffizienten.

a) Zeigen Sie, dass durch $f \sim g :\Leftrightarrow (t^2+1) \,\big|\, (f-g)$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}[t]$ definiert wird.

b) Geben Sie ein vollständiges Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen an.

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[t]/_{\sim}$ mit der von $\mathbb{R}[t]$ induzierten Addition eine Gruppe ist.

d) Zeigen Sie, dass $\left(\mathbb{R}[t]/_{\sim}\right) \setminus \{[0]\}$ mit der von $\mathbb{R}[t]$ induzierten Multiplikation eine Gruppe ist.