

Lineare Algebra I

Übungsblatt 7

Aufgabe 24 (Pflichtabgabe)

Sei $M := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ und \sim eine Relation auf M definiert durch:

$$(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow ad = bc.$$

Zeigen Sie:

- \sim definiert eine Äquivalenzrelation auf M . Geben Sie ein vollständiges Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen an.
- M/\sim bildet mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} [(a, b)] + [(c, d)] &:= [(ad + bc, bd)] \\ [(a, b)] \cdot [(c, d)] &:= [(ac, bd)] \end{aligned}$$

einen Körper. Dabei bezeichnet $[(a, b)]$ die Äquivalenzklasse von (a, b) bzgl. \sim .

Zeigen Sie dabei auch, dass die Verknüpfungen wohldefiniert sind.

- Es sei $[(a, b)] \in M/\sim$. Für welche $x \in \mathbb{N}$ gilt $[(a, b)] = [(a + x, b + x)]$?

Aufgabe 25 (Pflichtabgabe)

- Bestimmen Sie alle zwölften Einheitswurzeln in \mathbb{C} .
- Zeigen Sie, dass die Menge Ω_{12} der zwölften Einheitswurzeln bzgl. der Multiplikation in \mathbb{C} eine Gruppe bildet.
- Zu welchem $(\mathbb{Z}_n, +)$ ist Ω_{12} isomorph? Finden Sie die Untergruppen von Ω_{12} .

Aufgabe 26 (Pflichtaufgabe)

Welche der folgenden Teilmengen des \mathbb{R}^2 sind Untervektorräume? Skizzieren Sie die Mengen jeweils.

- $U_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$
- $U_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 \text{ oder } x_1 = -x_2\}$
- $U_3 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 \text{ und } x_1 = -x_2\}$
- $U_4 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

e) $U_5 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 0\}$

f) $U_6 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \geq 0\}$

g) $U_7 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq |x_2|\}$

Aufgabe 27

Der 10-stellige ISBN-Code, mit dem bis vor einigen Jahren jedes Buch eindeutig gekennzeichnet wurde, setzt sich (für große Verlage) wie folgt zusammen: die erste Ziffer a_1 codiert das Land, die Ziffern a_2 bis a_4 den Verlag, und die Ziffern a_5 bis a_9 sind eine verlagsinterne Nummer für das Buch. Die Ziffer a_{10} ist die sogenannte Prüfziffer. Sie berechnet sich als

$$\sum_{i=1}^9 (i \cdot a_i) \equiv a_{10} \pmod{11}.$$

Eine Prüfziffer X entspricht dabei der 10. Auf diese Weise erkennt der ISBN-Code gewisse Fehler, die z.B. beim Einlesen oder Übermitteln der Buchnummer auftreten.

- a) Ist 0-486-43830-2 ein gültiger Code?

Zeigen Sie:

- b) Der Code erkennt eine falsche Ziffer.
c) Der Code erkennt das Vertauschen zweier (nicht notwendig benachbarter) Ziffern.
d) Der Code erkennt nicht notwendig zwei falsche Ziffern.

Aufgabe 28

Definieren die folgenden beiden Relationen Äquivalenzrelationen auf \mathbb{N} ? Wenn nein, welche der drei Eigenschaften gelten? Wenn ja, geben Sie ein vollständiges Repräsentantensystem an!

a) $m \sim n :\Leftrightarrow m \mid n$

b) $m \sim n :\Leftrightarrow m \mid n \text{ oder } n \mid m$