Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

WiSe 2010/11
Abgabe: bis 6.12.10, 14 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra I

Übungsblatt 9

Aufgabe 33 (Pflichtabgabe)
Mit Hilfe des Dimensionsbegriffs kann man den Nachweis gewisser Eigenschaften verkürzen:

a) Gleichheit von Vektorräumen:
Es sei V endlich–dimensional und $U \preccurlyeq V$ ein Teilraum. Zeigen Sie: Gilt $\dim U = \dim V$, so ist $U = V$.

b) Basis eines Vektorraums:
Es sei $\dim V = n$. Zeigen Sie, dass für Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) $v_1, \ldots, v_n$ Basis,
ii) $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig,
iii) $v_1, \ldots, v_n$ Erzeugendensystem.

Mit anderen Worten: Ist $\dim V = n$, so reicht es, nur eine der beiden Eigenschaften nachzurechnen, um zu zeigen, dass n Vektoren eine Basis bilden.

Aufgabe 34 (Pflichtabgabe)
Es seien $V = \mathbb{R}^4$ und $u_1 := (1, 2, 0, 0)^T$ sowie $u_2 := (1, 0, 0, -2)^T$. Bestimmen Sie einen komplementären Unterraum von $U_1 := \operatorname{Span}(u_1, u_2)$, d.h. einen Teilraum $U_2 \preccurlyeq V$ mit $V = U_1 \oplus U_2$. Gehen Sie dabei in folgender Reihenfolge vor (jeweils mit kurzer Begründung):

a) Welche Dimension muss U_2 haben?

b) Seien $u_3, \ldots, u_k$ eine Basis von U_2. Ist die Familie $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k$ linear unabhängig?

c) Geben Sie eine Basis für U_2 an.

d) Ist U_2 eindeutig?

Aufgabe 35
Seien $1 \leq k \leq n$ und V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit $\dim V = n$. Zeigen Sie:

a) Seien $U, W \preccurlyeq V$ Teilräume und $\dim U = n - 1$. Dann ist $\dim(W \cap U) \geq \dim W - 1$.

b) Für $j = 1, \ldots, k$ seien $U_j \preccurlyeq V$ Teilräume mit $\dim U_j = n - 1$. Zeigen Sie: Dann gilt $\dim(U_1 \cap \cdots \cap U_k) \geq n - k$.

c) Ist $W \preccurlyeq V$ mit $\dim W = n - k$, so existieren k Teilräume $U_j \preccurlyeq V$ mit $\dim U_j = n - 1$ und $U_1 \cap \cdots \cap U_k = W$.

Aufgabe 36
Es sei $V = U \oplus W$. Zeigen Sie: Für jeden Teilraum $U' \preccurlyeq V$ mit $U \preccurlyeq U'$ gibt es ein $W' \preccurlyeq W$ mit $V = U' \oplus W'$.