Inhalt:

10. Matrizen
11. Lineare Gleichungssysteme
12. Der Gauß-Algorithmus

Wichtige Methoden beim Umgang mit Vektorräumen basieren auf der Matrizenrechnung. Wir führen die Matrizen über einem Körper K ein und stellen die Rechenoperationen der Addition, Skalarmultiplikation und des Matrixprodukts vor. Von zentraler Bedeutung sind die Begriffe des *Rangs* einer Matrix und der *Invertierbarkeit*.

In den Abschnitten 11 und 12 werden Matrizen zur Beschreibung und zur Lösung von linearen Gleichungssystemen eingesetzt. Die Bedeutung linearer Gleichungssysteme für die Struktur-Untersuchung von Vektorräumen wird ebenfalls betont.

10 Matrizen

10.1 Definition: Matrix

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Eine $(m \times n)$-*Matrix* ist ein (mn)-Tupel von Skalaren, die zu einem rechteckigen Schema aus m Zeilen und n Spalten angeordnet sind:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

Die $a_{i,j} \in K$ heißen die *Koeffizienten* (oder *Einträge*) der Matrix A.

$$0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} \quad \text{Nullmatrix} \qquad E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \quad \text{Einheitsmatrix}$$

Bemerkung: Spaltenvektoren können als Matrizen mit einer Spalte, Zeilenvektoren als Matrizen mit einer Zeile betrachtet werden.

10.2 Satz: Matrizen-Addition und Skalarmultiplikation

Die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen (über dem Körper K) wird mit $\mathrm{Mat}_K(m, n)$ oder $K^{m \times n}$ bezeichnet. Diese Menge ist ein K-Vektorraum mit den Operationen

$$(a_{i,j})_{m \times n} + (b_{i,j})_{m \times n} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{m \times n}, \qquad \alpha(a_{i,j})_{m \times n} = (\alpha a_{i,j})_{m \times n}$$

- Man kann nur Matrizen gleicher Dimensionen addieren.
- Die Nullmatrix $(\mathbf{0})_{m \times n}$ ist das neutrale Element der Addition.
- Für Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_K(m, n)$ bedeutet $A = B$, dass $a_{i,j} = b_{i,j}$ für alle $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ gilt.
- $K^{m \times n}$ hat die Dimension mn; eine Basis bilden die elementaren Matrizen $E_{k,\ell} \in K^{m \times n}$ für $1 \leq k \leq m$, $1 \leq \ell \leq n$ mit den Koeffizienten

$$e_{i,j}^{(k,\ell)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = k \text{ und } j = \ell \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir schreiben eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(m,n)$ häufig mit Hilfe ihrer Spaltenvektoren

$$A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n), \qquad \vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}.$$

10.3 Produkte von Matrizen und Vektoren

(a) Die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(m,n)$ habe die Spalten $\vec{a}_1$ bis $\vec{a}_n$. Das Produkt von A mit dem Vektor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ wird definiert als

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n.$$

$A\vec{x}$ ist also die Linearkombination der Spalten $\vec{a}_i$ von A mit den x_i als Koeffizienten.

(b) Hat die Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n,p)$ die Spalten $\vec{b}_1$ bis $\vec{b}_p$, so hat das Matrixprodukt AB die Spalten $A\vec{b}_1$ bis $A\vec{b}_p$.

Für die einzelnen Einträge bedeutet dies:

10.4 Matrixprodukt

Es seien $m, n, p \in \mathbb{N}$ sowie $A = (a_{i,j})_{m\times n} \in \mathrm{Mat}_K(m, n)$ und $B = (b_{j,k})_{n\times p} \in \mathrm{Mat}_K(n, p)$.

Dann ist das Matrixprodukt $C := AB \in \mathrm{Mat}_K(m, p)$ definiert mit den Komponenten

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} \qquad \text{“Zeile } i \text{ mal Spalte } k\text{”}$$

Bemerkung: Die Merkregel "Zeile mal Spalte" ergibt:

- Die i-te Zeile des Produkts AB hängt nur von der i-ten Zeile von A ab. Insbesondere gilt:

  Ist in $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in K^{1 \times m}$ die 1 an der r-ten Stelle, so ergibt $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)B$ die r-te Zeile von B

- Die k-te Spalte des Produkts AB hängt nur von der k-ten Spalte von B ab. Insbesondere gilt:

  $A\vec{e}_k$ ergibt die k-te Spalte von A. (Hier ist $\vec{e}_k \in K^{n \times 1}$ der k-te Vektor der Standardbasis).

- Mit den obigen Beobachtungen ergibt sich: Die Einheitsmatrizen sind die neutralen Elemente des Matrixprodukts, d.h. für $A \in \mathrm{Mat}(m, n)$ gilt

$$E_m A = A E_n = A.$$

10.5 Rechenregeln

Gegeben seien Matrizen A, B, C so, dass die entsprechenden Produkte definiert sind. Weiter sei $\alpha \in K$.

a) Es gilt $A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$.

b) Es gelten das Assoziativ- und das Distributiv-Gesetz:

$$A(BC) = (AB)C, \quad (A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC.$$

c) Das Matrixprodukt ist nicht kommutativ.

Bemerkung: zu (c):

- Wenn $A \in \mathrm{Mat}_K(m,n)$ und $B \in \mathrm{Mat}_K(n,p)$, so ist AB definiert, jedoch ist BA nur im Fall $p = m$ definiert.
- Selbst wenn beide Produkte AB und BA definiert sind, so sind die Matrizen oft verschieden.

10.6 Bemerkung zum Matrixprodukt

- Das Produkt mit der Nullmatrix ergibt die Nullmatrix. Aber: Aus $AB = (\mathbf{0})_{m\times p}$ folgt nicht, dass A oder B eine Nullmatrix ist.

- Ebenso gilt im allgemeinen nicht die Kürzungsregel: aus $AB = AC$ folgt i.a. nicht die Gleichheit von B und C. Hierzu muss A eine Zusatzbedingung erfüllen (siehe invertierbare Matrizen, reguläre Matrizen).

- Wenn man das Produkt eines Vektors mit einer Zahl als Matrixprodukt auffassen will, muss die Zahl rechts vom Vektor stehen: für $\vec{v} \in K^n = K^{n\times 1}$ und $\alpha \in K$ ist
$$\alpha\vec{v} = \vec{v} \cdot (\alpha),$$
wobei links die Skalarmultiplikation im Vektorraum K^n und rechts die Matrixmultiplikation mit der 1×1-Matrix (α) steht.

Eine weitere Operation für Matrizen:

10.7 Definition: Transponierte

Die zu

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_K(m,n)$$

transponierte Matrix ist

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_K(n,m).$$

10.8 Rechenregeln

- Addition: Für $A, B \in \mathrm{Mat}_K(m, n)$ und $\alpha \in K$ gilt

$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top, \qquad (\alpha A)^\top = \alpha A^\top.$$

- Matrixprodukt: Für $A \in \mathrm{Mat}_K(m, n)$ und $B \in \mathrm{Mat}_K(n, p)$ gilt

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

- Für jede Matrix A gilt $(A^\top)^\top = A$.

Ein wichtiger Begriff für Matrizen:

10.9 Definition: Rang einer Matrix

Es sei $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \in \mathrm{Mat}_K(m, n)$ mit den Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in K^m$. Dann heißt

$$\mathrm{Rang}\, A = \dim \left(\mathrm{Span}\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\right)\right)$$

der *Rang* von A; mit anderen Worten: $r = \mathrm{Rang}(A)$ ist die maximale Anzahl von linear unabhängigen Spalten von A.

10.10 Bemerkung:

Für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(m, n)$ gilt

$$\mathrm{Rang}(A) \leq \min\{m, n\}.$$

10.12 Satz: Rang des Matrixprodukts

Für Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_K(m, n)$ und $B \in \mathrm{Mat}_K(n, p)$ gilt

$$\mathrm{Rang}(AB) \leq \min\{\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B)\}.$$

Wir betrachten ab jetzt **quadratische** Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_K(n,n)$ (Zeilenzahl = Spaltenzahl)

10.13 Definition: quadratische Matrix

Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n,n)$ heißt *quadratische Matrix*.

(a) Die Linie $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ nennt man die *Hauptdiagonale* von A,

$$\mathrm{Spur}(A) := \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

heißt die *Spur* von A.

(b) Hat A außerhalb der Hauptdiagonalen nur Koeffizienten $a_{i,k} = 0$ (mit $i \neq k$), so heißt A eine *Diagonalmatrix*.

(c) Im Falle $A = A^\top$ heißt A *symmetrisch*, und im Falle $A = -A^\top$ heißt A *schiefsymmetrisch*.

10.14 Satz: Die Algebra der quadratischen Matrizen

(a) $K^{n\times n}$ ist mit der Addition und der Skalarmultiplikation ein Vektorraum der Dimension n^2.

(b) $K^{n\times n}$ ist mit der Addition und dem Matrixprodukt ein Ring; er besitzt das Einselement E_n.

Für $n \geq 2$ ist er nicht kommutativ, d.h. es gibt Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ mit $AB \neq BA$.

(c) Skalarmultiplikation und Matrixprodukt sind verträglich in dem Sinne, dass für alle $\alpha \in K$ und $A, B \in K^{n\times n}$ gilt

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Eine Menge mit den obigen Eigenschaften (a)–(c) nennt man eine *Algebra mit Einselement*. Für $n \geq 2$ ist die Algebra $K^{n\times n}$ nicht-kommutativ.

10.15 Definition: invertierbare oder reguläre Matrix

Gegeben sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n,n)$. Falls es eine Matrix $X \in \mathrm{Mat}_K(n,n)$ mit $AX = XA = E_n$ gibt, so heißt A *invertierbar* (oder *regulär*) und X heißt *Inverse* von A.

Andernfalls heißt die Matrix A *singulär*.

Bezeichnung: Die Gesamtheit aller invertierbaren Matrizen in $K^{n\times n}$ wird mit $Gl(n,K)$ bezeichnet.

Bemerkung; Es gibt viele Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$, die keine Inverse besitzen (nämlich alle Matrizen vom Rang $r < n$). Wir werden später weitere Kriterien für die Invertierbarkeit von A kennenlernen (siehe Determinante).

10.16 Satz

Die Menge $Gl(n, K)$ aller invertierbaren Matrizen von $K^{n\times n}$ mit der Verknüpfung der Matrixmultiplikation ist eine **Gruppe**. Sie wird *allgemeine lineare Gruppe* (engl. "general linear group") genannt. Insbesondere gilt:

(i) Das Produkt invertierbarer Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ ist invertierbar (Abgeschlossenheit der Verknüpfung in $Gl(n, K)$).

(ii) Das neutrale Element von $Gl(n, K)$ ist die Einheitsmatrix E_n: für alle $A \in Gl(n, K)$ gilt $E_nA = AE_n = A$.

(iii) Für jedes $A \in Gl(n, K)$ ist die Inverse A^{-1} eindeutig bestimmt.

(iv) Für $A, B \in Gl(n, K)$ gilt

$$(A^{-1})^{-1} = A, \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(v) Für $A \in Gl(n, K)$ ist auch die Transponierte $A^\top \in Gl(n, K)$ und es gilt

$$(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top.$$

Bemerkung: Die Berechnung einer Inversen von $A \in Gl(n, K)$ wird in den Abschnitten 11 und 12 behandelt.

10.17 Bemerkung: Eigentlich haben wir eine viel allgemeinere Aussage für Ringe mit Einselement bewiesen:
Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement $e \in R \setminus \{0\}$.

- *Ein Element $r \in R$ heißt* **Einheit** *von R, wenn ein $x \in R$ mit $xr = rx = e$ existiert. Das Element x heißt dann Inverses von r.*
- *Mit $R^\times$ bezeichnen wir die Menge aller Einheiten von R.*

Dann ist $(R^\times, \cdot)$ eine Gruppe, die sog. **Einheitengruppe** *von R.*

Beispiel:

- Die Einheitengruppe von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist die Teilmenge $\{-1, 1\}$.
- Die Einheitengruppe von $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist die Teilmenge

$$\{[1]_{15},\ [2]_{15},\ [4]_{15},\ [7]_{15},\ [8]_{15},\ [11]_{15},\ [13]_{15},\ [14]_{15}\}.$$

  Allgemein: Die Äquivalenzklasse $[n]_m$ ist genau dann Einheit in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, wenn $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ gilt.
- Ist K ein Körper, so ist $K^* = K \setminus \{0\}$ die Einheitengruppe von K.

10.18 Satz: Invertierbarkeit und Rang

Für $A \in K^{n \times n}$ sind äquivalent:

(i) A ist invertierbar, also $A \in Gl(n, K)$.

(ii) $\text{Rang}(A) = n$.

(iii) Die Spaltenvektoren $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ von A sind eine Basis des K^n.

(iv) Die Zeilenvektoren von A, also die Vektoren $\vec{A}_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})$ mit $1 \leq i \leq n$, sind eine Basis des K^n (hier als Vektorraum von Zeilenvektoren).

10.19 Beispiel

Bestimme die Inverse (falls möglich) zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Wir verwenden die invertierbaren Matrizen in zwei weiteren Aussagen zum Rang einer Matrix.

10.20 Satz: Rang-Erhaltung

Es sei $A \in K^{m \times n}$.

(a) Für jedes $S \in Gl(n, K)$ gilt $\mathrm{Rang}(AS) = \mathrm{Rang}(A)$.

(b) Für jedes $T \in Gl(m, K)$ gilt $\mathrm{Rang}(TA) = \mathrm{Rang}(A)$.

10.21 Definition und Satz: Ähnliche Matrizen

Seien $A, B \in K^{n \times n}$ zwei quadratische Matrizen. A heißt *ähnlich* zu B, wenn es eine Matrix $S \in Gl(n, K)$ gibt mit $\quad A = S^{-1}BS$.
Es gilt:

(a) Auf $K^{n \times n}$ wird durch

$$A \sim B \;:\Leftrightarrow\; A \text{ ist ähnlich zu } B$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

(b) Ähnliche Matrizen haben den gleichen Rang.

Kap. 11: Lineare Gleichungssysteme

11.1 Einführendes Beispiel: Wir beginnen mit der Behandlung linearer Gleichungssysteme. Im $\mathbb{R}^2$ sind z.B. "2 Gleichungen mit 2 Unbekannten" gegeben durch

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 1 \\ -x & + & 2y & = & 0 \end{array}\right.$$

Dieses System von 2 Gleichungen hat die eindeutige Lösung $(x,y)^\top = (2,1)^\top$. Es gibt aber Systeme, die keine Lösung besitzen, wie z.B.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & 2 \\ -x & + & 2y & = & 0 \end{array}\right.$$

und auch solche, die unendlich viele Lösungen besitzen:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & 2 \\ -x & + & 2y & = & -1 \end{array}\right.$$

Hier sind alle Punkte der Geraden $G: \quad (x,y)^\top = (3+2t, 1+t)^\top$, $t \in \mathbb{R}$, Lösungen.

11.2 Definition

Es sei K ein Körper. Ein *lineares Gleichungssystem* von m Gleichungen mit den n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ ist ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

Die $a_{i,j} \in K$ heißen die Koeffizienten und werden zur *Koeffizientenmatrix* $A = (a_{ij})_{m \times n}$ zusammengefasst. Der Vektor $b = (b_1, \dots, b_m)^\top \in K^m$ heißt die *rechte Seite* des Gleichungssystems. Setzt man $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$, so schreibt man das Gleichungssystem kurz als

$$Ax = b$$

mit der üblichen Matrix-Vektor-Multiplikation.

Jeder Spaltenvektor $= (x_1, \dots, x_n)^\top \in K^n$, für den die Gleichung $Ax = b$ gilt, heißt *Lösung* des linearen Gleichungssystems. Seine Komponenten x_k erfüllen also alle m Gleichungen.

Das Gleichungssystem heißt

- *lösbar* (oder *konsistent*), wenn es mindestens eine Lösung besitzt,
- *eindeutig lösbar*, wenn es genau eine Lösung besitzt.

11.3 Definition: homogenes lineares Gleichungssystem

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ (mit $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$) heißt *homogen*, falls $b = \mathbf{0}$ der Nullvektor ist; sonst heißt es *inhomogen*.

- Ein homogenes lineares Gleichungssystem ist stets lösbar: Es besitzt immer die *triviale* Lösung $\vec{x} = \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)^\top$.
- Wir nennen das lineare Gleichungssystem $Ax = \mathbf{0}$ das "zum linearen Gleichungssystem $Ax = b$ gehörende homogene System".

Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems hat die Struktur eines Vektorraums: Summen und skalare Vielfache von Lösungen sind selbst wieder Lösungen. Genauer:

11.4 Satz: Lösungsmenge des homogenen LGS

Es sei $A \in K^{m \times n}$.

Die Lösungsmenge

$$U := \{x \in K^n \mid \ Ax = \mathbf{0}\}$$

des homogenen linearen Gleichungssystems ist ein Untervektorraum von K^n; das heißt, zu zwei Lösungen $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)^\top$ von $Ax = \mathbf{0}$ ist auch der Vektor $\alpha x + \beta y$ mit beliebigen Skalaren $\alpha, \beta \in K$ eine Lösung.

Für den inhomogenen Fall formulieren wir das "Superpositions-Prinzip":

11.5 Satz: Lösungsmenge des inhomogenen LGS

Es sei $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$.

Die Lösungsmenge

$$M := \{x \in K^n \mid \; Ax = b\}$$

des inhomogenen linearen Gleichungssystems

- ist entweder leer (d.h. $M = \emptyset$, falls das Gleichungssystem nicht konsistent ist),
- oder sie ist ein affiner Teilraum

$$M = p + U \subseteq K^n;$$

hierbei ist $p \in K^n$ eine (sog. *partikuläre*) Lösung von $Ax = b$ und U ist die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems $Ax = \mathbf{0}$ in Satz 11.4.

In diesem Fall gilt: Zu zwei Lösungen $p \in K^n$ und $q \in K^n$ von $Ax = b$ ist der Vektor $x = p - q \in U$ eine Lösung von $Ax = \mathbf{0}$.

11.6 Satz: Konsistenz des inhomogenen LGS

Es sei $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Das inhomogene LGS $Ax = b$ ist konsistent.

(ii) Die rechte Seite b liegt in der linearen Hülle der Spaltenvektoren von A.

(iii) Es gilt $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A, b)$, wobei wir mit $(A, b) \in K^{m \times (n+1)}$ die um den Spaltenvektor b erweiterte Koeffizientenmatrix bezeichnen.

11.7 Korollar

Es sei $A \in K^{m \times n}$. Wir nennen das inhomogene LGS $Ax = b$ *universell lösbar*, wenn es für jede rechte Seite $b \in K^n$ lösbar ist. Es gilt:

Das inhomogene LGS $Ax = b$ ist genau dann universell lösbar, wenn $\text{Rang}(A) = m$ gilt.

Mit Hilfe des Satzes 11.6 können wir nun eine genaue Aussage über die Dimension des Lösungsraums des homogenen LGS machen.

11.8 Satz: Dimensionsformel

Es sei $A \in K^{m \times n}$. Der Lösungsraum U des homogenen LGS $Ax = \mathbf{0}$ hat die Dimension

$$\dim U = n - \operatorname{Rang}(A).$$

11.9 Korollar

Es sei $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$. Wir nennen das inhomogene LGS $Ax = b$ *eindeutig lösbar*, wenn es genau einen Spaltenvektor $p \in K^n$ gibt mit $Ap = b$ (d.h. die Lösungsmenge ein-elementig ist).
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Das inhomogene LGS $Ax = b$ ist eindeutig lösbar.

(ii) Das inhomogene LGS $Ax = b$ ist konsistent und das zugehörige homogene LGS $Ax = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung $x = \mathbf{0}$.

(iii) Das inhomogene LGS $Ax = b$ ist konsistent und es gilt $\mathrm{Rang}(A) = n$.

(iv) Es gilt $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A, b) = n$.

Spezialfall: Das homogene LGS $Ax = \mathbf{0}$ ist genau dann eindeutig lösbar (mit der trivialen Lösung $x = \mathbf{0}$ als einziger Lösung), wenn $\mathrm{Rang}(A) = n$ gilt.

Der häufige Fall von n Gleichungen in n Unbekannten verdient besondere Behandlung.

11.10 Satz: Alternativsatz für quadratische LGS

Es sei $A \in K^{n \times n}$ und $b \in K^n$ (also $m = n$). Wir nennen das inhomogene LGS $Ax = b$ *universell eindeutig lösbar*, wenn es zu jeder rechten Seite $b \in K^n$ genau einen Spaltenvektor $p \in K^n$ gibt mit $Ap = b$.
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Das inhomogene LGS $Ax = b$ ist universell eindeutig lösbar.

(ii) Das zugehörige homogene LGS $Ax = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung $x = \mathbf{0}$.

(iii) Es gilt $\mathrm{Rang}(A) = n$.

(iv) A ist invertierbar.

Kap. 12: Der Gauß-Algorithmus

Wir beschreiben nun eine Methode zur systematischen Lösung linearer Gleichungssysteme. Mit dieser Methode wird auch der Rang einer Matrix, die lineare Unabhängigkeit von Zeilen- oder Spaltenvektoren, die Inverse sowie später auch die Determinante einer Matrix bestimmt. Weitere vielfältige Anwendungen des Gauß-Algorithmus werden am Ende des Abschnittes erwähnt. Insofern ist der Gauß-Algorithmus das "Herzstück" der Berechnungsmethoden in der Linearen Algebra.

Zur Lösung linearer Gleichungssysteme verwendet man einfache Äquivalenz-Umformungen des Gleichungssystems.

12.1 Satz: Elementare Umformungen des LGS

Die Menge der Lösungen eines linearen Gleichungssystems bleibt unverändert, wenn man

- E1 die Reihenfolge der Gleichungen vertauscht,
- E2 beide Seiten einer Gleichung mit einem Skalar $\alpha \neq 0$ multipliziert,
- E3 eine Gleichung ersetzt durch die Summe *dieser* Gleichung und dem Vielfachen einer *anderen* Gleichung.
- E4 Vertauscht man die Reihenfolge der Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$, setzt also

$$(y_1, \ldots, y_n) := (x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n})$$

mit einer *Permutation* $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ der Zahlen $(1, \ldots, n)$, so erhält man die Lösungsmenge des neuen Systems (bzgl. y) aus der Lösungsmenge des alten (bzgl. x) durch entsprechende Vertauschung der Komponenten in den Spaltenvektoren.

An drei Beispielen soll erklärt werden, wie man systematisch durch die Äquivalenz-Umformungen (E1)–(E3) sowie die Umformung (E4) eine *reduzierte Stufenform* des Gleichungssystems erhält, um die Lösungsmenge dann leicht zu bestimmen.

12.2 Drei Beispiele

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ -x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Kurzform}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	r.S.	
1	4	2	−1	2	
2	8	1	−1	3	Elimination mit E3
−1	2	1	0	2	Elimination mit E3
−1	−4	1	2	2	Elimination mit E3
1	4	2	−1	2	
0	0	−3	1	−1	Zeilentausch E1 (2 $\longrightarrow$ 3)
0	6	3	−1	4	und Skalierung E2
0	0	3	1	4	
1	4	2	−1	2	
0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	
0	0	−3	1	−1	Glück: keine Elim.
0	0	3	1	4	erforderlich, nur E2

1	4	2	-1	2	
0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	
0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
0	0	3	1	4	Elimination mit E3
1	4	2	-1	2	
0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	
0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
0	0	0	2	3	E2
1	4	2	-1	2	
0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	
0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
0	0	0	1	$\frac{3}{2}$	

Auflösen durch “Rücksubstitution” (von unten nach oben):

$$\begin{array}{lrcll}
\text{Gl. 4:} & x_4 & = & \frac{3}{2} & \\
\text{Gl. 3:} & x_3 - \frac{1}{3}x_4 & = & \frac{1}{3} & \Longrightarrow \quad x_3 = \frac{5}{6} \\
\text{Gl. 2:} & x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{6}x_4 & = & \frac{2}{3} & \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2} \\
\text{Gl. 1:} & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 2 & \Longrightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{6}, \qquad \text{Probe!}
\end{array}$$

Beispiel 2:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ -x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & & & = & -1 \\ -x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Kurzform}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	r.S.	
1	4	2	−1	2	
2	8	1	−1	3	Elimination mit E3
−1	−4	1	0	−1	Elimination mit E3
−1	−4	1	2	2	Elimination mit E3
1	4	2	−1	2	
0	0	−3	1	−1	
0	0	3	−1	1	
0	0	3	1	4	

Vertauschung von x_2 und x_3 (=Spaltentausch $(2 \leftrightarrow 3)$):

x_1	x_3	x_2	x_4	r.S.	
1	2	4	−1	2	
0	−3	0	1	−1	Skalierung E2
0	3	0	−1	1	
0	3	0	1	4	

x_1	x_3	x_2	x_4		
1	2	4	-1	2	
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
0	3	0	-1	1	Elimination mit E3
0	3	0	1	4	Elimination mit E3
1	2	4	-1	2	
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
0	0	0	0	0	
0	0	0	2	3	

Vertauschung von x_2 und x_4 (=Spaltentausch $(3 \leftrightarrow 4)$):

x_1	x_3	x_4	x_2	r.S.	
1	2	-1	4	2	
0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	
0	0	0	0	0	Zeilentausch E1 $(3 \leftrightarrow 4)$
0	0	2	0	3	und Skalierung E2
1	2	-1	4	2	
0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	
0	0	1	0	$\frac{3}{2}$	
0	0	0	0	0	

1. Feststellung: Das Gleichungssystem ist lösbar (konsistent), weil die letzte Gleichung (Nullzeile) lösbar ist.

2. Auflösen durch "Rücksubstitution" der Gleichungen 1–3, wobei die Komponente x_2 (aus Spalte 4) als freie Variable verwendet wird:

$$\begin{array}{llcll}
\text{Gl. 3:} & x_4 & = & \frac{3}{2} & \\
\text{Gl. 2:} & x_3 - \frac{1}{3}x_4 & = & \frac{1}{3} & \Longrightarrow \quad x_3 = \frac{5}{6} \\
\text{Gl. 1:} & x_1 + 2x_3 - x_4 + 4x_2 & = & 2 & \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{11}{6} - 4x_2, \qquad \text{Probe!}
\end{array}$$

Die Lösungsmenge ist eine Gerade im $\mathbb{R}^4$, weil <u>ein</u> "freier" Parameter $t = x_2$ vorliegt:

$$M = \left\{ x = \left(\frac{11}{6} - 4t, t, \frac{5}{6}, \frac{3}{2} \right)^\top \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eine spezielle Lösung ist $p = \left(\frac{11}{6}, 0, \frac{5}{6}, \frac{3}{2}\right)^\top$.

- Die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems ist der Unter-Vektorraum

$$U = \mathbb{R}(-4, 1, 0, 0)^\top \preccurlyeq \mathbb{R}^4.$$

Beispiel 3: Abändern der rechten Seite des Gleichungssystems

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ -x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ -x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Kurzform}$$

führt zu der Stufenform

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & \text{r.S.} \\ \hline 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

- Feststellung: Das Gleichungssystem ist nicht lösbar (inkonsistent), weil die letzte Gleichung der Stufenform nicht lösbar ist: Nullkoeffizienten von $x_1, \ldots, x_4$ treffen auf eine rechte Seite ungleich 0.

Die systematische Vorgehensweise führt zu folgendem Resultat:

12.3 Satz: Gauß-Algorithmus, reduzierte Stufenform

Jedes lineare Gleichungssystem $Ax = b$ (mit $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$) kann durch endlich viele Umformungen der Form (E1)–(E4) auf die *reduzierte Stufenform* gebracht werden:

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_r & y_{r+1} & \cdots & y_n & \text{r.S.} \\
\hline
1 & \tilde{a}_{1,2} & \tilde{a}_{1,3} & \cdots & \tilde{a}_{1,r} & \tilde{a}_{1,r+1} & \cdots & \tilde{a}_{1,n} & \tilde{b}_1 \\
0 & 1 & \tilde{a}_{2,3} & \cdots & \tilde{a}_{2,r} & \tilde{a}_{2,r+1} & \cdots & \tilde{a}_{2,n} & \tilde{b}_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & \tilde{a}_{r-1,r} & \tilde{a}_{r-1,r+1} & \cdots & \tilde{a}_{r-1,n} & \tilde{b}_{r-1} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \tilde{a}_{r,r+1} & \cdots & \tilde{a}_{r,n} & \tilde{b}_r \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_m
\end{array}
$$

Dabei ist $(y_1, \dots, y_n)^\top$ eine Permutation der Komponenten des Lösungsvektors $(x_1, \dots, x_n)^\top$.

Die Zahl r heißt der *Zeilenrang* der Koeffizientenmatrix A (und des Gleichungssystems).

12.3 Satz: Gauß-Algorithmus, reduzierte Stufenform (forts.)

a) Das Gleichungssystem ist lösbar (konsistent) genau dann, wenn $r = m$ gilt oder, im Fall $r < m$, wenn $\tilde{b}_{r+1} = \cdots = \tilde{b}_m = 0$ gilt.

b) Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar genau dann, wenn $r = n$ gilt und, im Fall $n < m$, wenn außerdem $\tilde{b}_{n+1} = \cdots = \tilde{b}_m = 0$ gilt.

12.4 Bemerkung: Die Lösungsmenge $\tilde{M} = \{y \in K^n \mid \tilde{A}y = \tilde{b}\}$ des LGS in der Stufenform erhält man wie folgt:

(i) Falls die Bedingung in a) nicht erfüllt ist, ist $\tilde{M} = \emptyset$.

(ii) Falls die Bedingung in a) erfüllt ist,

- wählt man $y_{r+1}, \dots, y_n$ als "freie Variable" (im Fall $r = n$ gibt es hiervon keine), die beliebige Werte in K annehmen dürfen,
- bestimmt $y_1, \dots, y_r$ aus den ersten r Gleichungen der reduzierten Stufenform mittels der "Rücksubstitution": Auflösen der Gleichung r nach der Komponente y_r ergibt

$$y_r = \tilde{b}_r - \tilde{a}_{r,r+1}y_{r+1} - \cdots - \tilde{a}_{r,n}y_n,$$

  dann Gleichung $r-1$ nach y_{r-1}, etc.

Die Komponenten $y_1, \dots, y_r$ des Lösungsvektors $y \in \tilde{M}$ lauten dann

$$y_i = p_i + w_{i,1}y_{r+1} + \cdots + w_{i,n-r}y_n, \qquad 1 \leq i \leq r,$$

mit Skalaren $p_i,\ w_{i,j} \in K$.

Setzen wir kurz

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ \vdots \\ w_{r,1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} w_{1,2} \\ \vdots \\ w_{r,2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad w_{n-r} = \begin{pmatrix} w_{1,n-r} \\ \vdots \\ w_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so ist die Lösungsmenge $\tilde{M}$ der affine Teilraum

$$\tilde{M} = p + (Kw_1 \oplus \cdots \oplus Kw_{n-r}). \qquad (*)$$

(ii)' Alternative: Eine partikuläre Lösung $p \in K^n$ des inhomogenen LGS $\tilde{A}y = \tilde{b}$ bestimmt man durch Festlegung der freien Variablen $y_{r+i} = 0$ für $1 \leq i \leq n-r$.

Die einzelnen Vektoren w_j, $1 \leq j \leq n-r$, in (*) bestimmt man durch Lösung des homogenen LGS $\tilde{A}y = \mathbf{0}$ und durch Festlegung der freien Variablen $y_{r+i} = 0$, $i \neq j$, und $y_{r+j} = 1$. Diese Vektoren bilden eine Basis des Lösungsraums $\tilde{U}$ des homogenen LGS $\tilde{A}y = \tilde{b}$.

Die Lösungsmenge $M = \{x \in K^n \mid \; Ax = b\}$ erhält man aus $\tilde{M}$ durch Vertauschen der Komponenten in den Spaltenvektoren p sowie w_j, $1 \leq j \leq n-r$.

Bemerkungen:

- Die entscheidende Zahl ist der **Zeilenrang** r des Gleichungssystems. Von vornherein kennt man nur die Abschätzungen $r \leq m$ und $r \leq n$.

- Wenn $r = m$ gilt ("voller Zeilenrang"), so ist das Gleichungssystem lösbar; denn es gibt keine Gleichungen (Zeilen) mit lauter Null-Koeffizienten in der reduzierten Stufenform.

- Wenn $r = n$ gilt ("voller Spaltenrang"), so existiert höchstens eine Lösung; denn alle Komponenten x_k sind durch die ersten n Gleichungen bereits eindeutig festgelegt. Die weiteren Gleichungen (für $m > n$) entscheiden dann darüber, ob dieser Vektor $\vec{x}$ eine Lösung ist oder nicht.

- Wenn $r < n$ gilt und das Gleichungssystem lösbar ist, gibt es unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge enthält $n - r$ freie Parameter $y_{r+1}, \ldots, y_n$. Sie ist eine Gerade im Fall $n - r = 1$, Ebene im Fall $n - r = 2$, etc.

Ein konstruktiver Beweis zur Existenz der reduzierten Stufenform wird durch die Beschreibung des Gauß-Algorithmus angegeben:

Man führt (maximal) *n Schritte* zur Elimination nach folgenden Regeln durch (erklärt anhand der Kurzform mit Zeilen und Spalten):
Im k-ten Schritt $(1 \leq k \leq n)$

k_1: betrachte die k-te Spalte ab dem Diagonalelement $\tilde{a}_{k,k}$ nach unten (also Zeilen $k \leq i \leq m$). Stehen hier nur Nullen (incl. $\tilde{a}_{k,k}$), so können zwei Fälle auftreten:

- 1. Fall: es gibt eine weitere Spalte mit Index $k+1 \leq \ell \leq n$, die ein von Null verschiedenes Element in mindestens einer Zeile $k \leq i \leq m$ enthält. Dann tausche die beiden Spalten und nummeriere die Unbekannten um (E4).
- 2. Fall: alle weiteren Spalten mit Index $k+1 \leq \ell \leq n$ enthalten nur Nullen in den Zeilen $k \leq i \leq m$. Dann ist die reduzierte Stufenform erreicht und der Algorithmus beendet.

k_2 falls das (neue) Diagonalelement $\tilde{a}_{k,k}$ Null ist, dann tausche Zeile k mit einer Zeile i unterhalb (also $k+1 \leq i \leq m$), deren Element $\tilde{a}_{i,k}$ derselben Spalte ungleich Null ist (E1).

k_3: dividiere die k-te Zeile (incl. der k-ten Komponente der rechten Seite) durch das (neue) Diagonalelement $\tilde{a}_{k,k} \neq 0$ (E2). Dadurch entsteht das neue Diagonalelement $\tilde{a}_{k,k} = 1$.

k_4: subtrahiere das $\tilde{a}_{i,k}$-fache der Zeile k von Zeile i für $k+1 \leq i \leq m$ (E3). Dadurch entstehen Nullen unterhalb des Diagonalelements $\tilde{a}_{k,k} = 1$.

12.5 Definition und Satz: Zeilenrang

Es sei $A \in K^{m\times n}$.

a) Der *Zeilenrang* r von A ist die Maximalzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren von A, also

$$r = \dim(\operatorname{Span}(A^1, \dots, A^m)),$$

wobei A^i den i-ten Zeilenvektor von A bezeichnet.

b) Geht $\tilde{A}$ aus A durch elementare Umformungen (E1)–(E4) hervor, so stimmt der Zeilenrang von $\tilde{A}$ mit dem Zeilenrang von A überein.

Insbesondere: Der Zeilenrang r einer Matrix A ist die Anzahl der von $\mathbf{0}$ verschiedenen Zeilenvektoren der Stufenform $\tilde{A}$ von A.

c) Der Zeilenrang r stimmt mit dem Spaltenrang $\operatorname{Rang}(A)$ in Definition 10.9 überein; d.h. die Maximalzahl r der linear unabhängigen Zeilen von A ist gleich der Maximalzahl der linear unabhängigen Spalten von A.

Mit anderen Worten, für jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ gilt

$$\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A^\top).$$

Für viele Überlegungen ist es sinnvoll, die elementaren Umformungen (E1)–(E4) mit Hilfe des Matrixprodukts auszudrücken.

12.6 Satz

Die elementaren Umformungen (E1)–(E4), eingeschränkt auf die Koeffizientenmatrix $A \in K^{m \times n}$ (ohne die rechte Seite b) lassen sich darstellen in der Form eines Matrixprodukts mit einer invertierbaren Matrix:

(E1) Vertauschung der Zeilen i und j (mit $1 \leq i < j \leq m$): $\tilde{A} = P_{i,j}A$ mit der $m \times m$-*Permutationsmatrix*

$$P_{i,j} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_j, \vec{e}_{i+1}, \ldots, \vec{e}_{j-1}, \vec{e}_i, \vec{e}_{j+1}, \ldots, \vec{e}_m).$$

(E2) Multiplikation der Zeile i mit $\alpha \neq 0$: $\tilde{A} = D_i(\alpha)A$ mit der $m \times m$-*Diagonalmatrix*

$$D_i(\alpha) = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{i-1}, \alpha\vec{e}_i, \vec{e}_{i+1}, \ldots, \vec{e}_m).$$

(E3) Addition der Zeile i multipliziert mit $\alpha \in K$ zur Zeile j, $1 \leq i, j \leq m$, $i \neq j$: $\tilde{A} = L_{j,i}(\alpha)A$ mit der $m \times m$-Matrix

$$L_{j,i}(\alpha) = E_m + \alpha E_{j,i}.$$

Hier ist E_m die Einheitsmatrix und $E_{j,i}$ die elementare Matrix in 10.2.

(E4) Vertauschung der Spalten i und j (mit $1 \leq i < j \leq n$): $\tilde{A} = AP_{i,j}$ mit der $n \times n$-*Permutationsmatrix* analog zu (E1).

Die Inversen dieser Matrizen sind $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$, $D_i(\alpha)^{-1} = D_i(1/\alpha)$ und $L_{j,i}(\alpha)^{-1} = E_m - \alpha E_{j,i}$.

Bemerkung: Für die elementaren Matrizen $E_{j,i}$ in 10.2 gilt $E_{j,i}^2 = 0$, falls $i \neq j$. Also ist

$$(E_m - \alpha E_{j,i})(E_m + \alpha E_{j,i}) = E_m + \alpha E_{j,i} - \alpha E_{j,i} - \alpha^2 E_{j,i}^2 = E_m.$$

Anwendungen des Gauß-Algorithmus

Neben der Lösung linearer Gleichungssystem werden die folgenden Aufgaben durch die Reduktion von $A \in K^{m \times n}$ auf Stufenform gelöst.

12.7 Aufgaben zum Gauß-Algorithmus:

(A) Bestimmung von $\mathrm{Rang}(A)$:

Ablesen von $r = \mathrm{Rang}(A)$ aus der Stufenform (ohne rechte Seite b).

(B) Untersuchung der Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in K^n$ (mit $m \leq n$) auf lineare Unabhängigkeit:

Bilde die Matrix A aus den Zeilenvektoren $v_j^\top$. Die Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn $\mathrm{Rang}(A) = m$ gilt.

(C) Auswahl einer maximalen linear unabhängigen Teilfamilie aus $(v_1, \ldots, v_m)$ mit $v_j \in K^n$:

Bilde die Matrix A aus den Zeilenvektoren $v_j^\top$. Die Zeilenvertauschungen beim Übergang zur reduzierten Stufenform bringen eine maximale linear unabhängige Teilfamilie von Vektoren in die Positionen 1 bis $r = \mathrm{Rang}(A)$.

(D) Berechnung der Koordinaten zur Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ des K^n:

Wir bilden die Matrix $A = (v_1, \ldots, v_n) \in K^{n \times n}$ mit den v_j als Spaltenvektoren. Zum Spaltenvektor $v \in K^n$ erhalten wir die eindeutige Darstellung

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

durch Lösung des LGS $Ax = v$. Die eindeutige Lösung des LGS ergibt den *Koordinatenvektor*

$$v_{\mathcal{B}} := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^\top.$$

(E) Invertierbarkeit und Berechnung der Inversen zu $A \in K^{n \times n}$:

Wir betrachten die Gleichung $AX = E_n$ als LGS mit n verschiedenen rechten Seiten für die einzelnen Spalten $\vec{x}_j$ der Matrix X. Das Ausgangstableau

$$A \mid E_n$$

wird mit dem *erweiterten* Gauß-Algorithmus behandelt, der die Elimination sowohl unterhalb als auch oberhalb der Diagonalelemente erzielt (siehe Beispiel 10.19. Dabei sind Spaltenvertauschungen nur innerhalb der ersten n Spalten (also nicht zwischen linkem und rechtem Block des Ausgangstableaus) erlaubt!

- Falls eine Nullzeile in der linken Hälfte (im Ausgangstableau die Matrix A) entsteht, ist A nicht invertierbar: Es gilt $r = \text{Rang}(A) < n$.
- Andernfalls erhalten wir mit den elementaren Umformungen (E1)–(E4) zum Abschluss der Elimination aller Koeffizienten außerhalb der Diagonalen das Tableau

  $$E_n \mid \tilde{B}.$$

  Falls keine Spaltenvertauschungen vorgenommen wurden, gilt $A^{-1} = \tilde{B}$. Andernfalls müssen die **Zeilen** von $\tilde{B}$ entsprechend vertauscht werden, um A^{-1} zu erhalten.

(F) Gegeben seien zwei Teilräume $U, W \preccurlyeq K^n$ sowie Erzeugendensysteme $(u_1, \dots, u_r)$ von U und $(w_1, \dots, w_s)$ von W. Wir bestimmen eine Basis von $U + W$ und gleichzeitig eine Basis von $U \cap W$ (Algorithmus von Zassenhaus):

Bilde die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} u_1^\top & u_1^\top \\ \vdots & \vdots \\ u_r^\top & u_r^\top \\ w_1^\top & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ w_s^\top & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\mathbf{0}$ ist hier ein n-dim. Zeilenvektor von Nullen.

Dann bilden wir mit den elementaren Umformungen (E1)–(E3) (auch Zeilenvertauschungen zwischen den Blöcken sind erlaubt, aber keine Spaltenvertauschungen) die Stufenform

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} y_1^\top & z_1^\top \\ \vdots & \vdots \\ y_t^\top & z_t^\top \\ \mathbf{0} & z_{t+1}^\top \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & z_{t+k}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Hierbei sind $y_j \neq \mathbf{0}$ für $1 \leq j \leq t$ und $z_{t+j} \neq \mathbf{0}$ für $1 \leq j \leq k$. Dann gilt:

- $(y_1, \ldots, y_t)$ ist eine Basis von $U + W$.
- $(z_{t+1}, \ldots, z_{t+k})$ ist eine Basis von $U \cap W$.