Inhalt:

Wir wollen nun die Abbildungen $F : V \to W$ zwischen Vektorräumen V und W untersuchen, die die Vektorraum-Struktur erhalten. Wir nennen solche Abbildungen *Homomorphismen* oder, zur Unterscheidung von den Gruppen- und Ring-Homomorphismen, meistens *lineare Abbildungen*.

Die Struktur der Vektorräume, insbesondere der Basis- und der Dimensionsbegriff, erlauben eine genaue strukturelle Beschreibung der Eigenschaften linearer Abbildungen, wie z.B. der Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Diese Eigenschaften lassen sich auch ohne die Zuhilfenahme von Basen charakterisieren. Hierzu werden die Begriffe *Kern*, *Bild* und *Rang* einer linearen Abbildung eingeführt. Der rechnerische Umgang mit linearen Abbildungen wird mit Hilfe der Matrix-Darstellung in Abschnitt 14 begründet. Abschnitt 15 behandelt die bijektiven linearen Abbildungen, die *Isomorphismen*.

13 Lineare Abbildungen

13.1 Einführung: Linearität der Matrix-Vektor-Multiplikation

Es sei $A \in \mathrm{Mat}_K(m, n)$ eine Matrix. Wir definieren die Abbildung

$$F_A : K^n \to K^m, \qquad x \mapsto Ax.$$

Dann gilt für alle $x, y \in K^n$ und alle $\alpha \in K$ die Beziehung

$$F_A(x + y) = F_A(x) + F_A(y), \qquad F_A(\alpha x) = \alpha\, F_A(x);$$

dies wird kurz zusammengefasst zu

$$F_A(\alpha x + \beta y) = \alpha F_A(x) + \beta F_A(y)$$

für alle $x, y \in K^n$ und alle $\alpha, \beta \in K$.
Mit anderen Worten, die Abbildung F_A ist eine lineare Abbildung im Sinne der folgenden Definition.

Bemerkung: Man achte auf die Dimensionsangaben: Die Matrix A liegt in $\mathrm{Mat}(m, n)$ und die Abbildung F_A hat den Definitionsbereich K^n sowie den Wertevorrat K^m.

13.2 Definition: Lineare Abbildung

Es sei K ein Körper, V und W zwei Vektorräume über K.
Eine Abbildung $F : V \to W$ heißt *lineare Abbildung* (oder *Vektorraum-Homomorphismus*), falls gilt:

$$\begin{aligned} F(x+y) &= F(x)+F(y) && \text{für alle } x, y \in V \\ F(\alpha x) &= \alpha F(x) && \text{für alle } x \in V,\ \alpha \in K. \end{aligned}$$

Wir können beide Bedingungen auch zusammenfassen zu

$$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y) \quad \text{für alle } x, y \in V,\ \alpha, \beta \in K.$$

13.3 Bemerkungen:

Es seien V, W Vektorräume und $F : V \to W$ linear. Dann gilt:

(a) $F(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

(b) Für beliebige Linearkombinationen in V gilt

$$F\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k F(v_k).$$

Hieraus folgt für jede Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren $v_i \in V$:

- Ist $(v_i)_{i\in I}$ linear **abhängig**, so ist auch die Familie $(F(v_i))_{i\in I}$ linear abhängig (in W).
- Ist die Familie $(F(v_i))_{i\in I}$ linear **unabhängig**, so ist auch die Familie $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig.

Eine lineare Abbildung ist durch die Festlegung der Bilder von Basisvektoren bereits vollständig definiert:

13.4 Satz:

Es seien V, W Vektorräume, und $(v_i)_{i \in I}$ sei eine Basis von V.
Weiterhin seien Vektoren $w_i \in W$, $i \in I$, gegeben.
Dann existiert genau eine lineare Abbildung $F : V \to W$ mit $F(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$; mit anderen Worten, die lineare Abbildung F ist durch die Bilder $F(v_i)$ einer Basis von V eindeutig beschrieben.

13.5 Korollar: Gleichheit linearer Abbildungen

Es seien V, W Vektorräume über K sowie $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V.

Zwei lineare Abbildungen $F : V \to W$ und $G : V \to W$ sind genau dann gleich, wenn die Bilder der Basiselemente gleich sind, also wenn

$$F(v_i) = G(v_i) \qquad \text{für alle } i \in I$$

gilt.

13.7 Satz: Lineare Abbildungen $F : K^n \to K^m$

Zu jeder linearen Abbildung $F : K^n \to K^m$ (mit $m, n \in \mathbb{N}$) existiert eine eindeutig bestimmte Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m, n)$ mit

$$F(x) = F_A(x) = Ax \qquad \text{für alle } x \in K^n.$$

13.8 Satz: Verkettung linearer Abbildungen

Es seien U, V, W Vektorräume über K und $F : U \to V$ sowie $G : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist die Verkettung

$$G \circ F : U \to W, \qquad u \mapsto G(F(u))$$

linear.

Die folgenden Begriffe treten bei der Beschreibung linearer Abbildungen häufig auf. Deshalb sollte man sie sich merken.

13.10 Definition

Eine lineare Abbildung $F : V \to W$ heißt

- *Monomorphismus*, wenn F injektiv ist,
- *Epimorphismus*, wenn F surjektiv ist,
- *Isomorphismus*, wenn F bijektiv ist,
- *Endomorphismus*, wenn $V = W$ gilt, also $F : V \to V$ vorliegt,
- *Automorphismus*, wenn $V = W$ gilt und F bijektiv ist.

13.11 Satz: Charakterisierung anhand einer Basis von V

Es seien V, W Vektorräume über K sowie $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V. Weiter sei $F : V \to W$ linear und $w_i = F(v_i)$. Dann gilt:

(a) F ist ein Monomorphismus genau dann, wenn $(w_i)_{i\in I}$ linear unabhängig ist.

(b) F ist ein Epimorphismus genau dann, wenn $(w_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von W ist.

(c) F ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $(w_i)_{i\in I}$ eine Basis von W ist.

Bemerkung: Wir halten als wichtiges Resultat fest: ein Isomorphismus $F : V \to W$ bildet jede Basis $(v_i)_{i\in I}$ von V in eine Basis $(F(v_i))_{i\in I}$ von W ab.

Durch Einsatz des Dimensionsbegriffs für endlich-dimensionale Vektorräume folgt sofort (siehe 8.21):

13.12 Korollar: Charakterisierung bei gleicher endlicher Dimension

Es seien V, W Vektorräume über K mit $\dim V = \dim W < \infty$. Für eine lineare Abbildung $F : V \to W$ sind dann äquivalent:

(i) F ist ein Monomorphismus (d.h. injektiv).

(ii) F ist ein Epimorphismus (d.h. surjektiv).

(iii) F ist ein Isomorphismus (d.h. bijektiv).

13.13 Korollar: Schlussfolgerungen über die Dimension

Es seien V, W Vektorräume über K und $F : V \to W$ linear.

(i) Falls F ein Monomorphismus ist, so folgt $\dim V \leq \dim W$.

(ii) Falls F ein Epimorphismus ist, so folgt $\dim V \geq \dim W$.

(iii) Falls F ein Isomorphismus ist, so folgt $\dim V = \dim W$.

Hierbei sind $\dim V = \infty$ und $\dim W = \infty$ zugelassen.

13.14 Korollar: Schlussfolgerungen aus der Dimension

Es seien V, W Vektorräume über K.

(i) Falls $\dim V \leq \dim W$ und $\dim V < \infty$ gilt, so existiert ein Monomorphismus $F : V \to W$.

(ii) Falls $\dim V \geq \dim W$ und $\dim W < \infty$ gilt, so existiert ein Epimorphismus $F : V \to W$.

(iii) Falls $\dim V = \dim W < \infty$ gilt, so existiert ein Isomorphismus $F : V \to W$.

13.15 Satz: Inverse

Es seien V, W Vektorräume über K. Ist $F : V \to W$ ein Isomorphismus, so ist die Umkehrabbildung $F^{-1} : W \to V$ ebenfalls linear und bijektiv, also ein Isomorphismus.

Bemerkung:

(a) Existiert zwischen zwei Vektorräumen V, W ein Isomorphismus, so heißen V und W *isomorph*. Hier wurde begründet, dass der Isomorphie-Begriff eine *symmetrische* Relation darstellt. Wir betrachten ihn genauer in Abschnitt 15.

(b) Für einen Isomorphismus $F : V \to W$ gelten natürlich die Beziehungen

$$F \circ F^{-1} = \mathrm{id}_W, \qquad F^{-1} \circ F = \mathrm{id}_V\,.$$

(c) Man beachte die allgemeine Definition und den Satz 2.23 aus Kapitel I: Die lineare Abbildung $F : V \to W$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn es eine Abbildung $X : W \to V$ gibt mit

$$F \circ X = \mathrm{id}_W, \qquad X \circ F = \mathrm{id}_V\,.$$

Die Linearität dieser Abbildung X wurde hier zusätzlich bewiesen.

Die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität kann man auch ohne Zuhilfenahme einer Basis ausdrücken.

13.17 Definition und Satz: Kern, Bild und Rang

Es seien V, W Vektorräume über K sowie $F : V \to W$ linear.

(a) Das Urbild des Nullvektors $\mathbf{0}_W$ heißt der *Kern* von F,

$$\mathrm{Kern}(F) := F^{-1}(\{\mathbf{0}_W\}) = \{v \in V \mid F(v) = \mathbf{0}_W\}.$$

Es gilt: $\mathrm{Kern}(F)$ ist ein Untervektorraum von V.

(b) Das *Bild* von F ist die Menge

$$\mathrm{Bild}(F) = F(V) = \{F(v) \mid v \in V\}.$$

Es gilt: $\mathrm{Bild}(F)$ ist ein Untervektorraum von W.

(c) Der *Rang* von F ist definiert als

$$\mathrm{Rang}(F) = \dim(\mathrm{Bild}(F)).$$

13.19 Satz: Charakterisierung anhand von Kern und Bild

Es seien V, W Vektorräume über K. Weiter sei $F : V \to W$ linear. Dann gilt:

(a) F ist ein Monomorphismus genau dann, wenn $\mathrm{Kern}(F) = \{\mathbf{0}_V\}$ gilt.

(b) F ist ein Epimorphismus genau dann, wenn $\mathrm{Bild}(F) = W$ gilt.

(c) F ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $\mathrm{Kern}(F) = \{\mathbf{0}_V\}$ und $\mathrm{Bild}(F) = W$ gilt.

Nur die Aussage (a) muss bewiesen werden, weil (b) die Definition der Surjektivität ist (siehe 2.18(b)) und (c) die Aussagen (a) und (b) zusammenfasst.

Der Beweis von (a) beruht im Wesentlichen auf der folgenden Aussage.

13.20 Lemma: Urbilder einpunktiger Mengen

Es seien V, W Vektorräume über K. Weiter sei $F : V \to W$ linear. Für ein beliebiges $w \in W$ ist die Menge $F^{-1}(\{w\})$ entweder leer, oder sie hat die Form

$$F^{-1}(\{w\}) = p + \mathrm{Kern}(F)$$

mit einem beliebigen $p \in V$, für das $F(p) = w$ gilt.

Bemerkung: Das Lemma besagt, dass $F^{-1}(\{w\})$ ein Element des Faktorraums $V/\mathrm{Kern}(F)$ ist; dies verallgemeinert unsere Aussage zur Lösung inhomogener LGS in Satz 11.5: Die Lösungsmenge der Gleichung

$$F(v) = w$$

mit $w \in W$ ist entweder leer, oder sie ist ein affiner Unterraum von V mit dem Aufpunkt p (partikuläre Lösung, spezielle Lösung $F(p) = w$) und dem Differenzenraum $\mathrm{Kern}(F)$.

Wir erhalten nun den ersten Hauptsatz über lineare Abbildungen sowie die Dimensionsformel.

13.21 Homomorphiesatz

Es seien V, W Vektorräume über K und $F : V \to W$ linear. Weiter sei $U = \mathrm{Kern}(F)$.

Dann sind der Faktorraum V/U und der Bildraum $\mathrm{Bild}(F)$ isomorph; ein Isomorphismus ist gegeben durch

$$H_F : V/U \to \mathrm{Bild}(F), \qquad p + U \mapsto F(p).$$

13.22 Satz: Dimensionsformel

Es seien V, W Vektorräume über K und $F : V \to W$ linear. Dann gilt

$$\dim V = \dim(\mathrm{Kern}(F)) + \dim(\mathrm{Bild}(F)) = \dim(\mathrm{Kern}(F)) + \mathrm{Rang}(F).$$

13.23 Bemerkung:

Der Homomorphiesatz ermöglicht es, jede lineare Abbildung "nach ihrem Kern zu faktorisieren", um dadurch einen Isomorphismus zu erzeugen: aus $F : V \to W$ wird zuerst der Monomorphismus

$$H_1 : V/\mathrm{Kern}(F) \to W, \qquad [v]_{\mathrm{Kern}(F)} \mapsto F(v),$$

und daraus durch Einschränkung des Wertevorrats der Isomorphismus

$$H_F : V/\mathrm{Kern}(F) \to \mathrm{Bild}(F), \qquad [v]_{\mathrm{Kern}(F)} \mapsto F(v).$$

Wenn man dann noch einen komplementären Untervektorraum $M \preccurlyeq V$ von $\mathrm{Kern}(F)$ findet, der ja ein vollständiges Repräsentantensystem von $V/\mathrm{Kern}(F)$ ist, so kann man H_F ersetzen durch den Isomorphismus

$$\tilde{H}_F : M \to \mathrm{Bild}(F), \qquad v \mapsto F(v).$$

Wir betrachten nun Strukturen auf der Menge *aller* Abbildungen

$$\mathrm{Abb}(V, W) = \{f : V \to W \mid \; f \text{ ist eine Abbildung}\}$$

sowie der Teilmenge aller linearen Abbildungen

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{f : V \to W \mid \; f \text{ ist eine lineare Abbildung}\}.$$

Wegen der Vektorraum-Eigenschaft des Wertevorrats W können wir beliebige Abbildungen $f, g : V \to W$ addieren und mit Skalaren multiplizieren:

$$\begin{aligned} f + g &: V \to W, &\qquad v &\mapsto f(v) + g(v) \in W, \\ \alpha f &: V \to W, &\qquad v &\mapsto \alpha f(v) \in W. \end{aligned}$$

13.25 Satz: Die Vektorräume Abb(V, W) und Hom(V, W)

Es seien V, W Vektorräume über K.

(a) Die Menge

$$\mathrm{Abb}(V, W) = \{f : V \to W \mid \; f \text{ ist eine Abbildung}\}$$

mit der obigen Addition und Skalarmultiplikation ist ein K-Vektorraum. Sein Nullelement ist die Abbildung $N : V \to W$ mit $N(v) = \mathbf{0}_W$ für alle $v \in V$, die sog. *Null-Abbildung*.

(b) Die Menge

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{f : V \to W \mid \; f \text{ ist eine lineare Abbildung}\}$$

ist ein Untervektorraum von Abb(V, W); d.h. mit $F : V \to W$ linear und $G : V \to W$ linear ist auch $F + G$ und αF linear.

13.26 Satz: Dimension von Hom(V, W)

Falls $\dim V > 0$ und $\dim W > 0$ gilt, so ist

$$\dim(\mathrm{Hom}(V, W)) = (\dim V) \cdot (\dim W),$$

mit der Vereinbarung $n \cdot \infty = \infty \cdot m = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$.

Falls $\dim V = 0$ oder $\dim W = 0$ ist, so gilt $\dim(\mathrm{Hom}(V, W)) = 0$.

Bemerkung: $\mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ hat die gleiche Struktur wie der Vektorraum $\mathrm{Mat}_K(m, n)$ der $m \times n$-Matrizen: Für Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_K(m, n)$ ist

$$(F_A + F_B)(x) = (A + B)x \qquad \text{und} \qquad \alpha F_A(x) = (\alpha A)x.$$

Tatsächlich ist durch $A \mapsto F_A$ ein Vektorraum-Isomorphismus zwischen $\mathrm{Mat}_K(m, n)$ und $\mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ gegeben. Die Dimension $\dim(\mathrm{Mat}_K(m, n)) = mn$ wurde in 10.2 angegeben. Die obige Dimensionsformel liefert das gleiche Ergebnis!

Im Fall endlich-dimensionaler Vektorräume V und W wird im Beweis eine Basis von $\mathrm{Hom}(V, W)$ konstruiert, die mit den Elementarmatrizen $E_{k,\ell}$ in 10.2 vergleichbar ist.

Im Spezialfall $V = W$ sind die linearen Abbildungen $F : V \to V$ genau die Endomorphismen; anstatt Hom(V, V) schreibt man oft Hom(V).

- Die Endomorphismen können wie üblich addiert und mit Skalaren multipliziert werden.
- Zusätzlich können sie mit der Verkettung (=Hintereinanderausführung) verknüpft werden:

  $$F, G \in \mathrm{Hom}(V) \quad \Rightarrow \quad F \circ G \in \mathrm{Hom}(V),$$

  denn die Linearität von $F \circ G$ wurde ja in Satz 13.8 gezeigt.

Mit Addition und Verkettung ergibt sich die Struktur eines *Rings*, und zusammen mit der Skalarmultiplikation sogar die Struktur einer *Algebra*, wie wir sie bei den quadratischen Matrizen schon kennengelernt haben.

13.27 Satz: Der Endomorphismenring Hom(V)

Es sei V ein Vektorraum über K. Der Vektorraum

$$\mathrm{Hom}(V) = \{F : V \to V \mid \ f \text{ ist eine lineare Abbildung}\}$$

ist mit der Addition, Skalarmultiplikation und Verkettung eine K-Algebra. Sie ist (in der Regel) nicht-kommutativ.

- Ihr Einselement ist die identische Abbildung $\mathrm{id}_V : V \to V$; denn

$$\mathrm{id}_V \circ F = F \circ \mathrm{id}_V = F \qquad \text{gilt für alle } F \in \mathrm{Hom}(V).$$

- Ihre Einheiten (d.h. die Elemente mit einem Inversen bzgl. der Verkettung) sind genau die Automorphismen: sie bilden die *Automorphismengruppe*

$$\mathrm{Aut}(V) = \{F : V \to V \mid \ f \text{ ist eine bijektive lineare Abbildung}\}.$$

13.28 Bemerkung

Im Fall $V = K^n$ lässt sich $\operatorname{Hom}(V)$ mit dem Vektorraum der quadratischen Matrizen $\operatorname{Mat}_K(n, n)$ vergleichen. Die Verkettung in $\operatorname{Hom}(V)$ entspricht der Matrix-Multiplikation in $\operatorname{Mat}_K(n, n)$.

Die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}(V)$ entspricht dabei der *allgemeinen linearen Gruppe* $Gl(n)$.

14 Matrix-Darstellung

In diesem Abschnitt sind alle Vektorräume endlich-dimensional. Zur praktischen Rechnung mit linearen Abbildungen greifen wir auf Basen der Vektorräume zurück.

14.1 Definition und Satz: Koordinatenabbildung

Es sei V ein Vektorraum über K mit $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V.

(a) Durch

$$\Phi_{\mathcal{A}} : V \to K^n, \qquad v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^\top$$

ist eine Abbildung definiert; wir nennen $\Phi_{\mathcal{A}}$ die zur Basis $\mathcal{A}$ gehörende *Koordinatenabbildung* von V.

(b) Die Koordinatenabbildung $\Phi_{\mathcal{A}}$ ist linear und bijektiv, also ein Isomorphismus. Ihre Umkehrabbildung lautet

$$\Phi_{\mathcal{A}}^{-1} : K^n \to V, \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^\top \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Bemerkung: Die Koordinatenabbildung $\Phi_{\mathcal{A}}$ ist wohldefiniert: nach Satz 8.11 existiert für *jedes* $v \in V$ eine Darstellung

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

mit *eindeutigen* Skalaren $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$.

14.3 Vorüberlegung zur Matrix-Darstellung: Es seien V, W Vektorräume über dem Körper K mit $\dim V = n$ und $\dim W = m$, $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W.

- Die Koordinatenabbildungen bezeichnen wir mit $\Phi_{\mathcal{A}} : V \to K^n$ und $\Psi_{\mathcal{B}} : W \to K^m$.

- Nun sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Durch Verkettung erhalten wir die lineare Abbildung

$$\tilde{F} = \Psi_{\mathcal{B}} \circ F \circ \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} : K^n \to K^m.$$

  Zur Abbildung $\tilde{F}$ gibt es nach Satz 13.7 eine eindeutig bestimmte Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(m, n)$ mit $\tilde{F} = F_A$, also $\tilde{F}(x) = Ax$.

- Wegen

$$F = \Psi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ F_A \circ \Phi_{\mathcal{A}}$$

  (und der Isomorphie von $\Psi_{\mathcal{B}}$ und $\Phi_{\mathcal{A}}$) sind die wichtigen Eigenschaften von F gleichbedeutend mit den Eigenschaften von F_A, also auch mit den Eigenschaften der *Matrix A*. Dies liefert praktische *Berechnungsmethoden* z.B. für Kern, Bild und Rang von F.

14.4 Definition und Satz: Matrix-Darstellung

Es seien V, W Vektorräume über K mit $\dim V = n$, $\dim W = m$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W. Die Koordinatenabbildungen bezeichnen wir mit $\Phi_{\mathcal{A}} : V \to K^n$ und $\Psi_{\mathcal{B}} : W \to K^m$.

Es sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung.

(a) Die eindeutig bestimmte Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(m, n)$ mit

$$F = \Psi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ F_A \circ \Phi_{\mathcal{A}}$$

heißt die *darstellende Matrix* von F bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

(b) Die k-te Spalte $\vec{a}_k = (a_{j,k})_{1 \leq j \leq m}$ der darstellenden Matrix A von F ist gegeben durch

$$F(v_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{j,k} w_j, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Anders ausgedrückt: $\vec{a}_k = \Psi_{\mathcal{B}}(F(v_k))$ ist der Koordinatenvektor (bzgl. der Basis $\mathcal{B}$) von $F(v_k)$.

14.6 Satz

Mit den Bezeichnungen in 14.4 sei $A \in \mathrm{Mat}_K(m, n)$ die darstellende Matrix zur linearen Abbildung $F : V \to W$. Dann gilt

$$\mathrm{Rang}(F) = \mathrm{Rang}(A).$$

Insbesondere folgt:

- F ist ein Monomorphismus genau dann, wenn $\mathrm{Rang}(A) = n$ gilt.
- F ist ein Epimorphismus genau dann, wenn $\mathrm{Rang}(A) = m$ gilt.
- F ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $m = n$ und $\mathrm{Rang}(A) = n$ gilt, d.h. wenn $A \in Gl(n, K)$ gilt.

14.7 Praktischer Aspekt: Lösung der Gleichung $L(v) = w$

Gegeben sei eine lineare Abbildung $F : V \to W$ und ein Vektor $w \in W$.

1. Wähle geeignete Basen $(v_1, \ldots, v_n)$ von V und $(w_1, \ldots, w_m)$ von W.

2a. Stelle die darstellende Matrix A von F auf.

2b. Berechne den Koordinatenvektor $\vec{y}$ von w.

3. Bestimme alle Lösungen des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{y}$.

3a. Falls keine Lösung existiert, hat auch $F(v) = w$ keine Lösung.

3b. Andernfalls: Für jede Lösung $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^\top \in K^n$ von $A\vec{x} = \vec{y}$ ist

$$v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$$

eine Lösung von $F(v) = w$.

Die Verkettung linearer Abbildungen wurde bereits in Satz 13.8 behandelt. Wir wollen hier den Zusammenhang zum Matrixprodukt ergänzen.

14.9 Satz: Verkettung

Es seien U, V, W endlich-dimensionale Vektorräume über K (und keiner sei der Nullraum). Weiter seien $\mathcal{A}$ eine Basis von U, $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $\mathcal{C}$ eine Basis von W.

Außerdem sei A die darstellende Matrix der linearen Abbildung $F : U \to V$ bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, und es sei B die darstellende Matrix der linearen Abbildung $G : V \to W$ bzgl. der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Dann ist das Matrixprodukt $C = BA$ definiert und C ist die darstellende Matrix von $G \circ F$ bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$.

Bemerkung: Das "Bindeglied" ist hier nicht nur der Vektorraum W, sondern auch die Basis $\mathcal{B}$ von W, die sowohl für den Wertevorrat von F als auch für den Definitionsbereich von G verwendet wird.

Wir wollen noch überlegen, welchen Einfluss der Übergang zu einer anderen Basis von V (oder W) auf die darstellende Matrix hat.

14.10 Satz: Basiswechsel

Mit den Bezeichnungen in 14.4 sei $A \in \mathrm{Mat}_K(m,n)$ die darstellende Matrix zur linearen Abbildung $F : V \to W$.

(a) Es sei $\mathcal{A}' = (v_1', \ldots, v_n')$ eine weitere Basis von V. Die Matrix $T \in Gl(n,K)$ sei die darstellende Matrix von $\mathrm{id}_V : V \to V$ bzgl. der Basen $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}$, also

$$v_k' = \sum_{j=1}^{n} t_{j,k} v_j, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Dann ist $B = AT$ die darstellende Matrix von F bzgl. der Basen $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}$.

(b) Es sei $\mathcal{B}' = (w_1', \ldots, w_m')$ eine weitere Basis von W. Die Matrix $S \in Gl(m, K)$ sei die darstellende Matrix von $\mathrm{id}_W : W \to W$ bzgl. der Basen $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{B}$, also

$$w_k' = \sum_{j=1}^{m} s_{j,k} w_j, \qquad 1 \le k \le m.$$

Dann ist $C = S^{-1}A$ die darstellende Matrix von F bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}'$.

Bemerkung: Der Rang der darstellenden Matrizen A, B, und C im obigen Satz bleibt erhalten; man vergleiche hierzu Satz 10.20. Übrigens gilt $S \in Gl(n, K)$, weil id_V (offensichtlich) ein Isomorphismus ist; ebenso ist $T \in Gl(m, K)$.

Um sich die Gestalt der Transformations-Matrizen T und S besser merken zu können, beachte man das folgende *kommutative Diagramm*. Die Spalten von T und S entstehen, indem man die *neuen* Basisvektoren in $\mathcal{A}'$ bzw. $\mathcal{B}'$ als Linearkombination der *alten* Basisvektoren in $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ schreibt. Die verwendete Basis wird jeweils mit angegeben:

$$V \xrightarrow{F} W$$

$$\begin{tikzcd}
(V,\mathcal{A}') \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{A}'}"] & (V,\mathcal{A}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{A}}"] & (W,\mathcal{B}) \arrow[r, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, "\Psi_{\mathcal{B}}"] & (W,\mathcal{B}') \arrow[d, "\Psi'_{\mathcal{B}}"] \\
K^n \arrow[r, "T"] & K^n \arrow[r, "A"] & K^m \arrow[r, "S^{-1}"] & K^m
\end{tikzcd}$$

Die Aussage zum Basiswechsel folgt direkt aus Satz 14.9.

14.11 Spezialfall: Endomorphismen

Es sei V ein Vektorraum über K mit $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V.
Verwendet man im Definitions- und Wertebereich des Endomorphismus $F : V \to V$ die gleiche Basis $\mathcal{A}$, so besitzt F als darstellende Matrix die quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n, n)$ mit den Spaltenvektoren $\vec{a}_k = (a_{j,k})_{1 \le j \le n}$, wobei

$$F(v_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{j,k} v_j, \qquad k = 1, \ldots, n$$

gilt.

Ersetzt man $\mathcal{A}$ durch eine neue Basis $\mathcal{A}'$ im Definitions- **und** Wertebereich V, so ergibt Satz 14.10 als neue Darstellungsmatrix von F die Matrix

$$B = T^{-1} A T.$$

Hierbei ist $T \in Gl(n, K)$ die invertierbare quadratische Matrix in 14.10(a).

Beachte: Die darstellenden Matrizen A und $B = T^{-1}AT$ von $F : V \to V$ sind **ähnlich**, vgl. Satz 10.21.

14.12 Bemerkung

Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über K, $\dim V = n \in \mathbb{N}$ und $\dim W = m \in \mathbb{N}$. Wir geben feste Basen $\mathcal{A}$ von V und $\mathcal{B}$ von W vor.

(a) Die Vektorräume $\mathrm{Hom}(V, W)$ und $\mathrm{Mat}_K(m, n)$ sind isomorph. Der Isomorphismus ist erklärt durch die Abbildung

$$\Theta : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Mat}_K(m, n), \quad F \mapsto A,$$

wobei A die darstellende Matrix von F bzgl. der gegebenen Basen ist.

(b) Im Spezialfall $V = W$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ gilt sogar:
$\Theta : \mathrm{Hom}(V) \to \mathrm{Mat}_K(n, n)$ ist ein Ring-Isomorphismus: zur Abbildung id_V gehört die Einheitsmatrix, zur Verkettung $G \circ F$ gehört das Matrixprodukt, etc.

Weiterhin bildet Θ die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(V)$ bijektiv auf $GL(n, K)$ ab; diese Abbildung ist ein Gruppen-Isomorphismus.

15 Isomorphie von Vektorräumen

Dieser kurze Abschnitt dient nur als Zusammenfassung von Aussagen über Isomorphismen. Wir verwenden die Sprechweise aus Bemerkung 13.15:

Zwei Vektorräume V, W heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus $F : V \to W$ gibt.

Satz 13.13 hat dann die folgende Formulierung.

15.1 Satz

Zwei endlich-dimensionale Vektorräume V, W über dem Körper K sind genau dann isomorph, wenn $\dim V = \dim W$ gilt.

Was kann über unendlich-dimensionale Vektorräume (oder in voller Allgemeinheit) gesagt werden? Eigentlich brauchen wir nur die Aussage in 13.11(c) zusammen mit dem Basis-Begriff anzuschauen.

15.2 Satz

Zwei Vektorräume V und W (egal, ob endlich- oder unendlich-dimensional) sind genau dann isomorph, wenn es Basen $\mathcal{A}$ von V und $\mathcal{B}$ von W gibt, die die gleiche **Mächtigkeit** haben.

Einen Isomorphismus $F : V \to W$ erhält man dann wie folgt: jede bijektive Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen den Basen definiert nach Satz 13.4 genau eine lineare Abbildung von V nach W.

Als Notation für Isomorphie von Vektorräumen verwendet man häufig

$$V \simeq W \qquad (V \text{ und } W \text{ sind isomorph}).$$

Als strukturelle Aussage halten wir fest:

15.3 Satz

Die Isomorphie '$\simeq$' ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller K-Vektorräume.

Beweis:

- Reflexivität: $V \simeq V$ mittels des Isomorphismus $\mathrm{id}_V : V \to V$.
- Symmetrie: Aus $V \simeq W$ mittels des Isomorphismus $F : V \to W$ folgt auch $W \simeq V$ mittels des Isomorphismus F^{-1}.
- Transitivität: Aus $U \simeq V$ und $V \simeq W$ mittels der Isomorphismen $F : U \to V$ bzw. $G : V \to W$ folgt auch $U \simeq W$ mittels des Isomorphismus $G \circ F$. $\square$

15.4 Beispiele:

(a) Jeder endlich-dimensionale K-Vektorraum V mit $\dim V = n$ ist isomorph zu K^n: ein passender Isomorphismus ist die Koordinatenabbildung $\Phi_{\mathcal{A}} : V \to K^n$ zu einer Basis $\mathcal{A}$ von V.

(b) Der Polynomraum $\mathbb{R}[t]$ ist isomorph zum Vektorraum der reellen Zahlenfolgen mit höchstens endlich vielen von Null verschiedenen Gliedern

$$V = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mid \ a_n \in \mathbb{R} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, \quad a_n \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } n\}.$$

Die Basis der Monome $\mathcal{A} = (1, t, t^2, t^3, \ldots)$ ist abzählbar, also gleichmächtig zu $\mathbb{N}_0$. Als Basis $\mathcal{B} = (\vec{e}_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ von V betrachten wir die Folgen

$$\vec{e}_0 = (1, 0, 0, 0, \ldots), \quad \vec{e}_1 = (0, 1, 0, 0, \ldots),$$

allgemein $\vec{e}_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$ mit genau einer 1 an der Stelle $n = j$. Auch diese Basis ist abzählbar, also sind $K[t]$ und V isomorph.

Als Isomorphismus bietet sich an

$$f = \sum_{k=0}^{n} a_j t^j \mapsto (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots).$$

(c) Der Polynomraum $\mathbb{R}[t]$ ist NICHT isomorph zum Vektorraum aller reellen Zahlenfolgen

$$W = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Dafür genügt es zu zeigen, dass in W eine überabzählbare Familie linear unabhängiger Elemente existiert. Denn dann ist auch jede Basis von W überabzählbar, hat also eine größere Mächtigkeit als $\mathbb{N}_0$. (Vgl. hierzu Definition 2.27 im Grundlagenkapitel.)

Als überabzählbare Indexmenge verwenden wir die Menge $\mathbb{R}$. (Dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist, findet man z.B. in G. Fischer, Lineare Algebra (17. Aufl.), Seite 42.) Wir definieren für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Folge

$$\vec{e}_x = (1, x, x^2, x^3, \ldots) \in W.$$

Behauptung:

Die Familie $(\vec{e}_x)_{x\in\mathbb{R}}$ ist linear unabhängig.

Beweis: Es sei $C = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}$ eine endliche Menge paarweise verschiedener Zahlen x_i. Wir müssen zeigen, dass die Familie $(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{x_2}, \ldots, \vec{e}_{x_m})$ linear unabhängig ist. Dafür genügt es, dass die "Anfangsstücke" dieser Folgen linear unabhängig sind, z.B.

$$\begin{array}{c}(1,\ x_1,\ x_1^2,\ \ldots,\ x_1^{m-1})\\(1,\ x_2,\ x_2^2,\ \ldots,\ x_2^{m-1})\\\vdots\\(1,\ x_m,\ x_m^2,\ \ldots,\ x_m^{m-1})\end{array}$$

Diese Vektoren sind die Zeilen einer Vandermonde-Matrix. Weil die betreffende Matrix invertierbar ist (siehe Beispiel 14.5), sind die Zeilenvektoren linear unabhängig.