Inhalt:

Wir behandeln eine weitere “Kennzahl” von $n \times n$-Matrizen: die Determinante. Es gibt mehrere Zugänge und Definitionen, die von den folgenden Mathematikern angegeben wurden:

- Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897) formulierte eine *axiomatische Charakterisierung* der Determinante, indem er 3 charakterisierende Eigenschaften der Determinante angab.
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) gab eine geschlossene Form zur Berechnung der Determinante aus den Einträgen der Matrix an (Leibnizformel).
- Pierre-Simon (Marquis de) Laplace (1749–1827) beschreibt die Determinante rekursiv, indem er von $n \times n$-Matrizen auf $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen zurückgeht (Laplace'scher Entwicklungssatz)

Außerdem merke man sich:

- Mit dem Gauß-Algorithmus hat man das schnellste Berechnungsverfahren für Matrizen ab der Größe 4×4, falls nicht eine spezielle Form der Matrix vorliegt.
- Die Determinante beinhaltet geometrische Information: Volumen (bzw. Flächeninhalt im $\mathbb{R}^2$) und Orientierung.

16 Definition und Eigenschaften der Determinante

16.1 Einführung: Determinante von 2 × 2-Matrizen: Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Die **Zeilenvektoren** von A nennen wir $a_1 = (a, b)$ und $a_2 = (c, d)$.

Wir betrachten für einfache Beispiele das von den Vektoren a_1 und a_2 aufgespannte Parallelogramm P, bestimmen seine Fläche sowie die Orientierung ('+' bzw. '-' für Drehung von a_1 nach a_2 gegen bzw. im Uhrzeigersinn).

Vektoren	Fläche	Orientierung	A	$\det A = ad - bc$
$a_1 = (1, 0)$ $a_2 = (0, 1)$	1	$+$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1
$a_1 = (1, 0)$ $a_2 = (2, 1)$	1	$+$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	1
$a_1 = (-1, -1)$ $a_2 = (2, 1)$	1	$+$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	1

- Geometrisch: vom 1. zum 2. (und vom 2. zum 3.) Beispiel gelangt man durch eine *Scherung* (siehe Cavalieri-Prinzip)
- Matrix-Umformung: Jeweils eine elementare Zeilenumformung E3 aus 12.1

Vektoren	Fläche	Orientierung	A	$\det A = ad - bc$
$a_1 = (1,0)$ $a_2 = (2,1)$	1	$+$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1
$a_1 = (2,1)$ $a_2 = (1,0)$	1	$-$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	-1

- Geometrisch: Orientierungswechsel
- Matrix-Umformung: Zeilenvertauschung E1 aus 12.1

Vektoren	Fläche	Orientierung	A	$\det A = ad - bc$
$a_1 = (1,0)$ $a_2 = (2,1)$	1	$+$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1
$a_1 = (-3,0)$ $a_2 = (2,1)$	3	$-$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	-3

- Geometrisch: Multiplikation einer Seite mit $\alpha > 0$ ergibt die proportionale Flächenänderung, bei $\alpha < 0$ zusätzlich den Orientierungswechsel.
- Matrix-Umformung: Elementare Zeilenumformung E2 aus 12.1

16.2 Zusammenfassung für 2 × 2-Matrizen

Auf dem K-Vektorraum der 2×2-Matrizen definieren wir die Abbildung

$$\det : \mathrm{Mat}_K(2,2) \to K, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc.$$

Diese Abbildung hat die folgenden Eigenschaften:

(1) Sie ist *multilinear*, d.h. als Funktion der Zeilenvektoren $a_1, a_2 \in K^2$ von A ist die Abbildung jeweils linear:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta \widetilde{a}_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \alpha a_2 + \beta \widetilde{a}_2 \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \widetilde{a}_2 \end{pmatrix}.$$

(2) Für $a_1 = a_2$ gilt $\qquad \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0.$

(3) Es gilt $\qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$

16.2 Zusammenfassung für 2×2-Matrizen (Fortsetzung)

Weiterhin gelten die folgenden Regeln:

(4) Umformung E3: Für alle $\alpha \in K$ ist

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 + \alpha a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 + \alpha a_1 \end{pmatrix}.$$

(5) Umformung E1:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

(6) Skalare Multiplikation von A: für $\lambda \in K$ gilt

$$\det \left(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) = \lambda^2 \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

(7) Ist eine Zeile von A der Nullvektor, so ist $\det A = 0$.

(8) Es gilt $\det A \neq 0$ genau dann, wenn A invertierbar ist.

(9) Es gilt $\det A = \det A^\top$.

16.3 Definition von Weierstraß

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $\det : \mathrm{Mat}_K(n,n) \to K$ heißt *Determinante*, falls sie die folgenden Eigenschaften hat:

(D1) Sie ist *multilinear in den Zeilenvektoren* $a_1, \ldots, a_n$ von A. Dies bedeutet: Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\alpha, \beta \in K$ ist

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ \alpha a_i + \beta \widetilde{a}_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ \widetilde{a}_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

(D2) Sie ist *alternierend*, das heißt: Hat A zwei gleiche Zeilen, so ist $\det A = 0$.

(D3) Sie ist *normiert*, das heißt: $\det E_n = 1$.

Bevor wir die Existenz und Eindeutigkeit der Determinantenfunktion betrachten, werden weitere Eigenschaften gefolgert.

16.4 Satz: Weitere Eigenschaften

Aus den Axiomen (D1)–(D3) der Determinantenfunktion folgt:

(D4) Umformung E3: Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ und $\alpha \in K$ ist

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i + \alpha a_j \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

(D5) Umformung E1: Entsteht B aus A durch **eine** Zeilenvertauschung, so ist $\det B = -\det A$.

(D6) Skalare Multiplikation von A: für $\lambda \in K$ gilt $\quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

16.4 Satz: Weitere Eigenschaften (Fortsetzung)

(D7) Ist eine Zeile von A der Nullvektor, so ist $\det A = 0$.

(D8) Es gilt $\det A \neq 0$ genau dann, wenn A invertierbar ist.

(D9) Es gilt $\det A = \det A^\top$.

(D10) Ist A eine obere Dreiecksmatrix, also

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

so ist

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Ein analoges Resultat gilt für eine untere Dreiecksmatrix.

16.4 Satz: Weitere Eigenschaften (Fortsetzung)

(D11) Hat A die Blockgestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen A_1 und A_2, so gilt

$$\det A = (\det A_1) \cdot (\det A_2).$$

Ein analoges Resultat gilt für Matrizen der Form $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ C & A_2 \end{pmatrix}$.

Warnung: Für $n \geq 2$ kann man $\det(A + B)$ NICHT auseinanderziehen; ebenso merke man sich (D6) genau.

16.6 Satz: Eindeutigkeit der Determinantenfunktion

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Es gibt höchstens eine Abbildung $\det : \mathrm{Mat}_K(n,n) \to K$, die die Eigenschaften (D1)–(D3) in Definition 16.3 besitzt.

Beweisidee:

- Falls A nicht invertierbar ist, so muss $\det A = 0$ gelten, siehe (D8).
- Falls A invertierbar ist, so kann A mit elementaren Umformungen E1 und E3 (ohne Spaltentausch!) in die Stufenform 12.3 gebracht werden. Dabei ändern die Umformungen E3 die Determinante nicht, bei jedem Zeilentausch E1 muss das Vorzeichen der Determinante angepasst werden. Ist also k die Anzahl der Tausch-Operationen, die zur Erreichung der Stufenform C von A durchgeführt wurden, so gilt

  $$\det A = (-1)^k \det C.$$

  Die Matrix C ist eine obere Dreiecksmatrix, also ist mit (D10)

  $$\det A = (-1)^k \prod_{i=1}^{n} c_{i,i}.$$

16.7 Bemerkung Dass für invertierbares A bei der Erstellung der Stufenform kein Spaltentausch erforderlich ist, sieht man so:

Nach $k \geq 0$ Eliminations-Schritten hat die aus A erzeugte Matrix B eine Blockgestalt der Form

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & C \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

mit Matrizen $B_1 \in \mathrm{Mat}(k, k)$ und $B_2 \in \mathrm{Mat}(n-k, n-k)$. Hierbei ist B_1 bereits eine obere Dreiecksmatrix.

Wäre die gesamte erste Spalte von B_2 gleich Null (nur dann ist ja der Spaltentausch notwendig), so hätte man schon die Blockgestalt

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} B_1 & c_1 & \widetilde{C} \\ 0 & 0 & \vec{b}^\top \\ \hline 0 & 0 & D \end{array}\right) \qquad \leftarrow \qquad (k+1)\text{-te Zeile}$$

mit einer kleineren Matrix $D \in \mathrm{Mat}(n-k-1, n-k-1)$. Der erste Block ist eine obere Dreiecksmatrix, deren letztes Diagonalelement gleich Null ist. Also wäre seine Determinante 0 (wegen (D10)) und auch $\det B = 0$ (wegen (D11)). Hiermit wäre auch $\det A = 0$, ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass A invertierbar ist (siehe (D8)).

16.8 Satz: Existenz der Determinantenfunktion

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die folgende Abbildung $\det_n : \mathrm{Mat}_K(n,n) \to K$, besitzt die Eigenschaften (D1)–(D3) in Definition 16.3.

- Für $n = 1$, also $A = (a)$ mit $a \in K$, ist $\det_1(A) = a$.
- Für $n = 2$, also $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ist $\det_2(A) = ad - bc$.
- Für $n > 2$ bezeichne $A'_{i,j} \in \mathrm{Mat}_K(n-1, n-1)$ die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Dann ist für ein festes $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\det_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot \det_{n-1}(A'_{i,j}). \tag{4}$$

Mit kombinatorischem Geschick zeigt man das folgende Resultat:

16.9 Lemma

Die in 16.8 rekursiv definierte Funktion $\det_n : \mathrm{Mat}_K(n,n) \to K$ hängt nicht von der speziellen Wahl des Index $i \in \{1, \ldots, n\}$ ab; d.h. für **jedes** $1 \leq i \leq n$ ergibt sich in (4) der gleiche Wert.

16.10 Zwischenfazit: Wir haben bisher geklärt, dass es genau eine Abbildung $\det_n : \mathrm{Mat}_K(n,n) \to K$ mit den Eigenschaften (D1)–(D3) in der Charakterisierung von Weierstraß gibt, also dadurch die *Determinante* $\det_n(A)$ wohldefiniert ist. Üblicherweise lässt man den Index n weg und schreibt einfach $\det A = \det_n(A)$.

Außerdem wurden bereits zwei Berechnungsmethoden vorgestellt:

(i) Der Gauß-Algorithums mit elementaren Zeilenumformungen E1–E3 (ohne Spaltentausch). Sobald sich zeigt, dass A nicht invertierbar ist (d.h. Nullen in der gesamten Spalte, einschließlich Diagonalelement), folgt sofort $\det A = 0$. Andernfalls muss über die Umformungen E1 (Zeilentausch, nur die Anzahl ist relevant) und E2 (hier werden Faktoren herausgezogen) streng Buch geführt werden.

(ii) Die Entwicklung nach der i-ten Zeile von A (Satz 16.8). Dies bietet sich z.B. an, wenn A in einer Zeile viele Nullen stehen hat.

Darüberhinaus sind Fälle von Dreiecksmatrizen, Block-Dreiecksmatrizen wie in (D10) und (D11) bereits geklärt.

Wir behandeln noch weitere Eigenschaften und eine dritte Darstellung der Determinante, die Leibniz-Formel.

16.11 Satz: Laplace'scher Entwicklungssatz

Die Determinantenfunktion $\det_n : \mathrm{Mat}_K(n,n) \to K$ ergibt sich sowohl durch Entwicklung nach einer beliebigen Zeile

$$\det_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot \det_{n-1}(A'_{i,j}), \qquad i = 1, \dots, n,$$

als auch durch Entwicklung nach einer beliebigen Spalte

$$\det_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot \det_{n-1}(A'_{i,j}), \qquad j = 1, \dots, n.$$

Beweis: Der Beweis für die Entwicklung nach einer Spalte wird genau wie vorher per Induktion erbracht: die dadurch rekursiv definierte Funktion erfüllt (D1)–(D3), stimmt also mit der eindeutigen Determinantenfunktion überein.

16.12 Folgerung: Determinante von $A^\top$

Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n, n)$ gilt
$$\det A = \det A^\top.$$

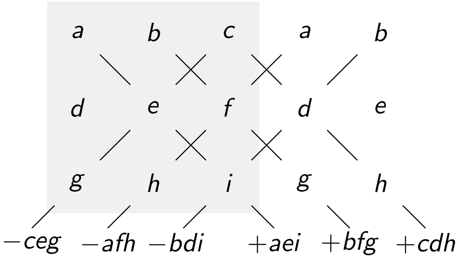
Beweis: Entwicklung von A nach der 1. Spalte ist das gleiche wie Entwicklung von $A^\top$ nach der 1. Zeile. Der Rest folgt wieder per Induktion. □

16.13 Sarrus-Regel für 3×3-Determinanten: Der Entwicklungssatz (nach irgendeiner Zeile oder Spalte) liefert sofort

$$\det \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} \end{pmatrix} =$$

$$a_{1\,1}a_{2\,2}a_{3\,3} + a_{1\,2}a_{2\,3}a_{3\,1} + a_{1\,3}a_{2\,1}a_{3\,2} - a_{3\,1}a_{2\,2}a_{1\,3} - a_{3\,2}a_{2\,3}a_{1\,1} - a_{3\,3}a_{2\,1}a_{1\,2}.$$

Merken kann man sich diese Regel durch folgendes Schema:



Führt man die Entwicklung der Determinante rekursiv fort, so erhält man die *Leibniz-Formel* für $\det_n(A)$.

Wir erinnern vorab an die Menge (Gruppe) der Permutationen

$$S_n = \{\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv}\}.$$

Diese Gruppe hat $n!$ (n-Fakultät) Elemente, die man mit Hilfe des folgenden Begriffs in zwei gleich große Teilmengen zerlegt.

16.14 Definition: Fehlstand und Parität einer Permutation

Für eine Permutation

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

heißt das Indexpaar (i, j) mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ein *Fehlstand*, wenn

$$i < j \qquad \text{und} \qquad \sigma(i) > \sigma(j)$$

gilt. Die Permutation σ heißt *gerade* (bzw. *ungerade*), wenn die Anzahl ihrer Fehlstände gerade (bzw. ungerade) ist. Man setzt

$$\operatorname{sign} \sigma = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma \text{ gerade ist,} \\ -1, & \text{falls } \sigma \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Beispiel: Die Anzahl der Fehlstände in $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ist 3, also ist $\operatorname{sign} \sigma = -1$.

Es gibt eine geschlossene Formel für das Signum.

16.15 Lemma

Für jede Permutation $\sigma \in S_n$ gilt

$$\operatorname{sign} \sigma = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Beweis: Zähler und Nenner haben jeweils $n(n-1)/2$ ganzzahlige Faktoren. Man macht sich vorweg am Beispiel klar, dass im Zähler und Nenner wirklich die gleichen Zahlen (bis auf das Vorzeichen) auftreten:

$$\prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \frac{(1-3)(4-3)(2-3)(5-3)(4-1)(2-1)(5-1)(2-4)(5-4)(5-2)}{(2-1)(3-1)(4-1)(5-1)(3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4)}.$$

Der Nenner enthält nur positive Faktoren, der Zähler enthält genau m negative Faktoren, wobei m die Anzahl der Fehlstände ist.

16.16 Satz: Leibniz-Formel für die Determinante

Die Determinantenfunktion $\det_n : \mathrm{Mat}_K(n,n) \to K$ lautet

$$\det_n(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

Hierbei treten alle $n!$ Produkte $a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$ von n Matrixelementen auf, die durch die Auswahl genau eines Elements aus jeder Zeile und Spalte von A gebildet werden können.

Beispiel: Für $n = 3$ ist dies die Sarrus-Formel.
Für $n = 4$ enthält die Formel $4! = 24$ Summanden; sie ist zur Berechnung nur geeignet, wenn viele Nullen auftreten. Für theoretische Untersuchungen ist die Leibniz-Formel jedoch auch für großes n sehr hilfreich.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Determinante:

16.17 Satz: Produktsatz für die Determinante

Für $A, B \in \mathrm{Mat}_K(n, n)$ gilt

$$\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B).$$

Als Folgerung des Produktsatzes ergibt sich sofort:

16.18 Satz

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Für jede invertierbare Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n,n)$ gilt

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

(b) Ähnliche Matrizen haben die gleiche Determinante. D.h. für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n,n)$ und jede invertierbare Matrix $T \in \mathrm{Mat}_K(n,n)$ gilt

$$\det(T^{-1}AT) = \det A.$$

Zusammenfassung: Wir haben ausgehend von den 2×2-Determinanten verschiedene Ansätze verfolgt, um die Determinante einer $n \times n$-Matrix zu definieren bzw. zu charakterisieren oder letztendlich zu berechnen. Jeder Zugang von Weierstraß, Laplace, Leibniz oder über den Gauß-Algorithmus führt auf die gleiche Funktion

$$\det : \mathrm{Mat}_K(n,n) \to K, \qquad A \mapsto \det A.$$

Die geometrische Interpretation der 2×2-Determinante als Maßzahl einer Fläche und einer Orientierung wird erst in Abschnitt 18 aufgegriffen.

17 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

Es sei K ein beliebiger Körper. Wir haben bereits die folgende Aussage zur Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit einer Matrix $A \in \mathrm{MAt}_K(n, n)$ bewiesen.

17.1 Charakterisierung regulärer Matrizen

Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n, n)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist invertierbar.

(ii) $\mathrm{Rang}\, A = n$.

(iii) $\det A \neq 0$.

(iv) Das homogene LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ hat als einzige Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

(v) Das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ ist universell eindeutig lösbar.

Für kleine Matrizen und weitere Anwendungen ist die folgende Regel wichtig.

17.2 Cramersche Regel

Die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n,n)$ sei invertierbar. Dann haben die Komponenten des eindeutigen Lösungsvektors $\vec{x}$ von $A\vec{x} = \vec{b}$ die Darstellung

$$x_j = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix};$$

in der Matrix A wird also die j-te Spalte ersetzt durch die rechte Seite $\vec{b}$.

Mit der Cramerschen Regel kann man auch eine Darstellung für die Inverse von A erhalten.

17.3 Satz: Adjunktenform der Inversen

Die Inverse einer invertierbaren Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n, n)$ hat die Form

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(\alpha_{j,k}\right)_{n \times n} \quad \text{mit} \quad \alpha_{j,k} = (-1)^{j+k} \det A'_{k,j}.$$

Die Zahl $\alpha_{j,k} = (-1)^{j+k} \det A'_{k,j}$ heißt der (k, j)-Minor von A.

Bemerkung: Man achte auf die Index-Vertauschung: der Eintrag $\alpha_{j,k}$ der Inversen stammt vom (k, j)-Minor von A.

17.4 Beispiele:

(a) Löse das LGS $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Es ist $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2$, also nach der Cramerschen Regel $x_1 = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}}{-2} = -6$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{13}{2}$$

Weiter: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Allgemein: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, falls $ad - bc \neq 0$; sonst ist die Matrix nicht invertierbar.

(b) In Übungsaufgabe 45 wurde die Inverse der komplexen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & -3i \\ 4i & 5 & 1-i \\ 2-3i & 2i & 5 \end{pmatrix}$$

gesucht. Mit Sarrus erhält man

$$\begin{aligned} \det A &= 25 + (2+i)(1-i)(2-3i) + (-3i)(4i)(2i) - \\ &\quad (2-3i)(5)(-3i) - (2i)(1-i) - 5(4i)(2+i) \\ &= 25 + (3-11i) + 24i - (-45-30i) - (2+2i) - (-20+40i) = 91 + i. \end{aligned}$$

Berechnung der 2×2-Determinanten ergibt nun

$$A^{-1} = \frac{1}{91+i} \begin{pmatrix} 25 - 2i(1-i) & -5(2+i) + 2i(-3i) & (2+i)(1-i) - 5(-3i) \\ -5(4i) + (2-3i)(1-i) & 5 - (2-3i)(-3i) & -(1-i) + 4i(-3i) \\ (4i)(2i) - 5(2-3i) & -2i + (2-3i)(2+i) & 5 - (4i)(2+i) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{91+i} \begin{pmatrix} 23-2i & -4-5i & 3+14i \\ -1-25i & 14+6i & 11+i \\ -18+15i & 7-6i & 9-8i \end{pmatrix}.$$

War das nun leichter?

17.5 Bemerkung

Für eine beliebige Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n, n)$ kann

$$A^{\#} = (\alpha_{j,k})_{n \times n} \quad \text{mit} \quad \alpha_{j,k} = (-1)^{j+k} \det A'_{k,j}$$

gebildet werden. Man nennt $A^{\#}$ die *komplementäre Matrix* zu A. Es gilt

$$A^{\#} \cdot A = A \cdot A^{\#} = (\det A) \cdot E_n, \qquad \det A^{\#} = (\det A)^{n-1}.$$

Im Fall $\det A \neq 0$ besagt 17.3 gerade

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{\#}.$$

17.6 Bemerkung

Auch für $n \times n$-Matrizen A, deren Einträge $a_{i,k}$ Elemente eines **kommutativen Ringes** R mit Eins sind, lässt sich die Determinante durch den Entwicklungssatz von Laplace oder die Leibniz-Formel erklären. Die weiteren Beziehungen bleiben bestehen, sofern sie ohne Verwendung der Division formuliert werden können.

Insbesondere besitzt A eine Inverse, wenn $\det A$ eine **Einheit** des Rings R ist.

17.7 Beispiel: Die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2+t & 5-t^2 \\ 3-t & 7+t^2 \end{pmatrix}$$
hat Einträge $a_{i,k} \in \mathbb{R}[t]$. Die Determinante
$$\det A = (2+t)(7+t^2) - (3-t)(5-t^2) = -1 + 12t + 5t^2 \in \mathbb{R}[t]$$
ist selbst wieder ein Element des Ringes (hier also ein Polynom). Auch die komplementäre Matrix ist wie vorher über die Minoren von A definiert:
$$A^{\#} = \begin{pmatrix} 7+t^2 & -5+t^2 \\ -3+t & 2+t \end{pmatrix}.$$
Einfache Rechnung ergibt
$$A \cdot A^{\#} = A^{\#} \cdot A = \det A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Hier steht die Einheitsmatrix als Matrix mit den Ringelementen 0_R und 1_R, also den konstanten Polynomen.

Weil $(\det A)$ KEINE Einheit in $\mathbb{R}[t]$ ist, kann die Adjunktenform der Inversen nicht verwendet werden: A besitzt gar keine Inverse, die wieder aus Polynomen besteht.

18 Determinante eines Endomorphismus

Wir knüpfen an Abschnitt 14 an, indem wir die Matrix-Darstellung(en) von Endomorphismen $F : V \to V$ betrachten. Hierbei ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $\dim V = n \in \mathbb{N}$.

18.1 Erinnerung

In Satz 14.11 wurde klar, dass die darstellende Matrix eines Endomorphismus $F : V \to V$ zur Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ die quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n, n)$ mit den Spaltenvektoren $\vec{a}_k = (a_{j,k})_{1 \le j \le n}$ ist, wobei

$$F(v_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{j,k} v_j, \qquad k = 1, \dots, n$$

gilt. Geht man zu einer neuen Basis $\mathcal{A}'$ (sowohl im Definitions- als auch im Wertebereich) über, so erhält man als neue darstellende Matrix

$$B = T^{-1} A T,$$

mit einer Matrix $T \in Gl(n, K)$. Der Produktsatz 16.17 bzw. Satz 16.18 zeigen

$$\det A = \det B.$$

Der folgende Begriff ist also wohldefiniert.

18.2 Definition: Determinante eines Endomorphismus

Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$, sowie $F : V \to V$ linear. Dann ist die *Determinante* von F

$$\det(F) := \det(A)$$

definiert als die Determinante der darstellenden Matrix von F bzgl. einer (und daher jeder) Basis $\mathcal{A}$ von F.

18.3 Beispiele:

(a) $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ hat $\det(D) = 0$.

(b) $L : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ mit $L(f) = f - D(f)$ hat $\det(L) = 1$: die darstellende Matrix zur Basis $\mathcal{A} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ in Beispiel 13.30(b) ist eine obere Dreiecksmatrix:

$$L(f_j) = t^j = f_j + \sum_{k=0}^{j-1} a_{k,j} f_k, \qquad 0 \le j \le n,$$

mit geeigneten Skalaren $a_{k,j}$. Die Diagonalelemente sind alle gleich 1, also ist $\det A = 1$.

18.4 Satz:

Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$, sowie $F : V \to V$ linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) F ist injektiv.

(ii) F ist surjektiv.

(iii) F ist bijektiv, also $F \in \mathrm{Aut}(V)$.

(iv) $\mathrm{Rang}(F) = n$.

(v) $\mathrm{Kern}(F) = \{\mathbf{0}_V\}$.

(vi) $\det F \neq 0$.

Zum Abschluss wollen wir eine geometrische Betrachtung der linearen Abbildungen

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad F(x) = Ax$$

mit einer quadratischen Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ anstellen. Dazu benötigen wir einen Flächen- bzw. Volumenbegriff, der zunächst nur für einfache Objekte, sog. Parallelotope, angegeben wird.

18.5 Definition: Fläche und Volumen

Es seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ (Spalten-)Vektoren.

a) Das von diesen Vektoren aufgespannte *Parallelotop* ist die Menge

$$P = P(a_1, \ldots, a_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k,\ 0 \leq \lambda_k \leq 1 \text{ für } k = 1, \ldots, n \right\}.$$

b) Das n-dimensionale Volumen dieser Menge wird definiert als

$$\mathrm{Vol}_n(P) = |\det(A)|,$$

wobei $A = (a_1, \ldots, a_n)$ die Matrix mit den gegebenen Vektoren als Spaltenvektoren ist.

Bemerkung:

- Zum Volumenbegriff vgl. Forster, Analysis 3, §5.
- Es gilt $\mathrm{Vol}_n(P) = 0$ genau dann, wenn die aufspannenden Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ linear abhängig sind. Dies stimmt mit unserem geometrischen Verständnis überein: das Parallelotop P liegt in dem r-dimensionalen Teilraum $\mathrm{Span}(a_1, \ldots, a_n)$, und es gilt $r = \mathrm{Rang}(A) < n$ genau dann, wenn $a_1, \ldots, a_n$ linear abhängig sind.
- Für $n = 2$ ist P ein Parallelogramm und $\mathrm{Vol}_2(P)$ der Flächeninhalt in der euklidischen Geometrie ($\mathrm{Vol}_2(P) =$ Grundseite mal Höhe).
- Für $n = 3$ ist P ein sog. *Spat* und $\mathrm{Vol}_3(P)$ das Volumen: ($\mathrm{Vol}_3(P) =$ Fläche der Grundseite mal Höhe).

18.6 Satz

$P = P(a_1, \ldots, a_n)$ sei ein Parallelotop, $B \in \mathrm{Mat}(n, n)$ sei eine Matrix. Dann ist die Bildmenge

$$Q = B(P) = \{Bx \mid x \in P\}$$

das Parallelotop mit den Kanten $Ba_1, \ldots, Ba_n$, und es gilt

$$\mathrm{Vol}_n(Q) = |\det B| \cdot \mathrm{Vol}_n(P).$$

18.7 Definition: Orientierung

Das von den Vektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannte Parallelotop ist

- *positiv orientiert*, falls $\det(a_1, \dots, a_n) > 0$ gilt,
- *negativ orientiert*, falls $\det(a_1, \dots, a_n) < 0$ gilt.

Bemerkung:

- Für $n = 2$ ist $P(a_1, a_2)$ positiv orientiert genau dann, wenn a_1 und a_2 linear unabhängig sind und der kleinere der beiden Winkel eine *Linksdrehung* von a_1 nach a_2 beschreibt.
- Für $n = 3$ ist $P(a_1, a_2, a_3)$ positiv orientiert genau dann, wenn die Familie (a_1, a_2, a_3) linear unabhängig ist und ein sogenanntes *Rechtssystem* beschreibt: zur Veranschaulichung dient die "Drei-Finger-Regel der rechten Hand" oder die "Korkenzieherregel".

18.8 Satz

$P = P(a_1, \ldots, a_n)$ sei ein Parallelotop, $B \in Gl(n, \mathbb{R})$ sei eine invertierbare Matrix. Dann hat das Parallelotop

$$Q = B(P) = \{Bx \mid \ x \in P\}$$

- die gleiche Orientierung wie P, falls $\det B > 0$ gilt,
- die entgegengesetzte Orientierung zu P, falls $\det B < 0$ gilt.

18.9 Bemerkung: Nicht nur Parallelotope, sondern allgemeinere *Polytope* (oder *Vielflachs*) werden durch die Abbildungsvorschrift $x \mapsto Bx$ erneut in Polytope abgebildet. Dies wird anhand von Mengen im $\mathbb{R}^2$, deren Rand ein Polygonzug ist, veranschaulicht.

Es gilt sogar etwas mehr: Ist $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop, $m \leq n$ und $B \in \mathrm{Mat}(m, n)$ mit $\mathrm{Rang}(B) = m$, so ist die Bildmenge $B(P)$ ein Polytop im $\mathbb{R}^m$. Dieses Resultat leistet besonders in der Computergrafik und bei technischen Zeichnungen (Bauwesen, Maschinenbau, Architektur), aber auch in der Kunst einen wichtigen Beitrag.