Inhalt:

Die fundamentale Struktur in den meisten Untersuchungen der “Linearen Algebra” bildet der Vektorraum. In diesem Kapitel II werden die grundlegenden Eigenschaften und Begriffe erläutert, im Kapitel III wird der Zusammenhang zu Matrizen und linearen Gleichungssystemen hergestellt und die folgenden Kapitel befassen sich mit den Homomorphismen zwischen zwei Vektorräumen, also den linearen Abbildungen.

7 Vektorräume

7.1 Definition: Vektorraum

Es sei K ein Körper. Ein *Vektorraum* über K (oder kurz K-Vektorraum) ist eine Menge V zusammen mit einer inneren und einer äußeren Verknüpfung

$$+ \quad : V \times V \longrightarrow V, \qquad (v, w) \mapsto v + w, \qquad \text{(Addition)},$$

$$\cdot \quad : K \times V \longrightarrow V, \qquad (\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v, \qquad \text{(Skalarmultiplikation)},$$

so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

(V1) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe ($\mathbf{0}$ = neutrales Element, $-v$ = negatives Element zu $v \in V$)

(V2) Für alle $v, w \in V$ und alle $\alpha, \beta \in K$ gelten die Distributivgesetze

$$(a) \;\; (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v, \qquad (b) \;\; \alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w,$$

das Assoziativgesetz sowie die Eigenschaft für das Einselement $1 \in K$

$$(c) \;\; (\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v), \qquad (d) \;\; 1 \cdot v = v.$$

Ergänzung:

- Die Elemente von V nennt man Vektoren, $\mathbf{0}$ ist der *Nullvektor*.
- K heißt der *Skalarkörper* des Vektorraums V, seine Elemente heißen *Skalare*; im Fall $K = \mathbb{R}$ sprechen wir von *reellen Vektorräumen* und für $K = \mathbb{C}$ von *komplexen Vektorräumen*.
- Den Malpunkt bei der Skalarmultiplikation lässt man meistens weg: man schreibt αv statt $\alpha \cdot v$.

7.2 Bemerkung: Es sei V ein K-Vektorraum, 0 das neutrale Element von K sowie $\mathbf{0}$ der Nullvektor. Für die Skalarmultiplikation gelten die folgenden Rechenregeln (Beweise mit dem Distributivgesetz ähnlich zu 4.12):

a) Für alle $v \in V$ ist $0 \cdot v = \mathbf{0}$.

b) Für alle $\alpha \in K$ ist $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

c) Umgekehrt folgt aus $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$, dass $\alpha = 0$ oder $v = \mathbf{0}$ ist.

d) Für alle $v \in V$ ist $(-1) \cdot v = -v$.

e) Allgemeiner: Für alle $\alpha \in K$ und $v \in V$ ist $(-\alpha) \cdot v = -(\alpha \cdot v)$.

7.4 Definition: Teilraum, Untervektorraum

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum* (oder *Teilraum*) von V, falls gilt:

(UV1) Für alle $u, v \in U$ ist $u + v \in U$. (Abgeschlossenheit unter Addition)

(UV2) Für alle $\alpha \in K$, $u \in U$ ist $\alpha u \in U$. (Abgeschlossenheit unter Skalarmult.)

Die beiden Bedingungen (UV1) und (UV2) können zusammengefasst werden zu

(UV3) Für alle $\alpha, \beta \in K$ und $u, v \in U$ gilt $\alpha u + \beta v \in U$.

Wir verwenden die Schreibweise $U \preccurlyeq V$ für einen Teilraum U von V.

Bemerkungen:

a) Ein Teilraum $U \subseteq V$ ist mit der Addition und der Skalarmultiplikation von V selbst wieder ein Vektorraum:
   - Aus (UV2) und 7.2(a) folgt, dass $\mathbf{0} \in U$ ist. Weiter folgt mit 7.2(d), dass mit jedem $u \in U$ auch das Negative $-u \in U$ ist. Also ist $(U, +)$ eine Untergruppe von $(V, +)$ und dadurch selbst wieder eine abelsche Gruppe.
   - Die Rechenregeln (V2) der Skalarmultiplikation werden von V auf U vererbt.

b) Die Relation $\preccurlyeq$ ist eine Ordnungsrelation auf der Menge aller Untervektorräume von V.

7.6 Lemma

Es sei V ein Vektorraum sowie U_1, U_2 Untervektorräume von V.

a) Dann ist $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V.

b) Die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ist genau dann ein Untervektorraum von V, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

8 Basis und Dimension

Die Struktur von Vektorräumen wird hier genau dargestellt.

8.1 Definition: Linearkombination, lineare Hülle

Es sei V ein K-Vektorraum und $A \subseteq V$ eine nichtleere Teilmenge.

a) Jede **endliche** Summe

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \quad \text{mit} \quad \alpha_j \in K, \quad v_j \in A, \quad n \in \mathbb{N},$$

heißt *Linearkombination* von Elementen aus A. Die Linearkombination heißt *trivial*, wenn $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ ist.

b) Die Menge

$$\mathrm{Span}(A) := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \text{ und } \alpha_j \in K,\ v_j \in A \text{ für } 1 \leq j \leq n \right\}$$

aller Linearkombinationen von Elementen aus A heißt die *lineare Hülle* von A. Die Menge A selbst heißt ein *Erzeugendensystem* von $\mathrm{Span}(A)$.

Ergänzungen:

c) Die lineare Hülle $\mathrm{Span}(A)$ ist ein Untervektorraum von V, und zwar der kleinste Untervektorraum, der A enthält: aus $A \subseteq U$ und $U \preccurlyeq V$ folgt $\mathrm{Span}(A) \preccurlyeq U$.
Wir nennen $\mathrm{Span}(A)$ den von A *aufgespannten* (oder *erzeugten*) Untervektorraum.

d) Ein Vektorraum V heißt *endlich erzeugt*, wenn es eine endliche Teilmenge $A \subseteq V$ gibt mit $\mathrm{Span}(A) = V$.

Der Begriff der *Menge* von Vektoren $A = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ ist z.T. ungeeignet, da die Wiederholung eines Vektors nicht ins Gewicht fällt (also z.B. $\{v_1, v_2, v_3, v_2\} = \{v_1, v_2, v_3\}$ gilt). Wir verwenden deshalb den folgenden Begriff.

8.3 Begriff: Familie

Es sei V ein K-Vektorraum.

a) Ein n-Tupel $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt *endliche Familie* oder *Familie der Länge n*; wir schreiben kurz $(v_i)_{i=1,\dots,n}$.
Hierbei ist $v_i = v_j$ für $i \neq j$ erlaubt.

b) Es sei I eine unendliche Menge. Für jedes $i \in I$ sei ein $v_i \in V$ gegeben. Dann heißt $(v_i)_{i \in I}$ *unendliche Familie* von Vektoren.

   Für jede endliche Teilmenge $J \subset I$, $J \neq \emptyset$, heißt $(v_j)_{j \in J}$ *endliche Teilfamilie* von $(v_i)_{i \in I}$.

Bemerkung: Genauigkeitshalber sei folgendes angemerkt: Wir nennen

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad \text{mit } \alpha_i \in K \text{ für } 1 \leq i \leq n$$

eine Linearkombination der Familie $(v_1, \ldots, v_n)$, und zwar auch dann, wenn Vektoren mehrfach auftreten (also $v_i = v_j$ für ein Paar $i \neq j$ gilt). Die Menge

$$\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \;\middle|\; \alpha_i \in K \text{ für } 1 \leq i \leq n \right\}$$

stimmt mit dem vorher definierten Untervektorraum $\mathrm{Span}(\{v_1, \ldots, v_n\})$ überein. Ebenso stimmt für eine unendliche Familie $(v_i)_{i \in I}$ die Menge

$$\mathrm{Span}((v_i)_{i \in I}) := \left\{ \sum_{j \in J} \alpha_j v_j \;\middle|\; J \subset I \text{ endlich und } \alpha_j \in K \text{ für alle } j \in J \right\}$$

mit dem Untervektorraum $\mathrm{Span}(\{v_i \mid i \in I\})$ überein.

Der Begriff des Erzeugendensystems wurde in 8.1 bereits eingeführt. Hier soll er für Familien noch einmal präzisiert werden.

8.4 Definition: Erzeugendensystem

Es sei V ein K-Vektorraum.

a) Eine endliche Familie $(v_1, \dots, v_n)$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt *Erzeugendensystem* von V, wenn sich jeder Vektor $v \in V$ als Linearkombination

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad \text{mit} \quad \alpha_i \in K$$

schreiben lässt.

b) Es sei I eine unendliche Menge. Die Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt *Erzeugendensystem* von V, wenn zu jedem Vektor $v \in V$ eine endliche Teilmenge $J \subset I$ existiert, so dass sich v als Linearkombination

$$v = \sum_{j \in J} \alpha_j v_j \quad \text{mit} \quad \alpha_j \in K$$

schreiben lässt.

Bemerkung:

(1) V ist genau dann *endlich erzeugt* (im Sinne von Definition 8.1), wenn es (mindestens) ein endliches Erzeugendensystem von V gibt.

(2) Es gibt Erzeugendensysteme verschiedener Länge, vgl. Beispiel 8.2, (1) und (2).

(3) Bei Erzeugendensystemen geht es nur um die *Existenz* einer Darstellung von $v \in V$ als Linearkombination der Familie $(v_i)_{i \in I}$, die den ganzen Vektorraum V aufspannt. Bei den meisten Überlegungen (zur Struktur eines Vektorraums oder bei der praktischen Verwendung von Vektoren des $\mathbb{R}^n$) hat die *Eindeutigkeit* einer solchen Darstellung große Bedeutung.

Die folgende äußerst wichtige Definition liefert hierfür den Grundstein und wird in der gesamten Vorlesung immer wieder verwendet.

8.5 Definition: Lineare Unabhängigkeit

Es sei V ein K-Vektorraum.

a) Eine endliche Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren aus V heißt *linear unabhängig*, wenn für alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ gilt:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

In Worten: <u>Wenn</u> eine Linearkombination der v_i den Nullvektor ergibt, so müssen alle ihre Koeffizienten gleich Null sein.

b) Es sei I eine unendliche Menge. Die Familie $(v_i)_{i\in I}$ heißt *linear unabhängig*, wenn jede endliche Teilfamilie $(v_j)_{j\in J}$ (mit endlicher Menge $J \subset I$) linear unabhängig ist.

c) Falls die Familie $(v_i)_{i\in I}$ (mit endlichem oder unendlichem I) nicht linear unabhängig ist, so heißt sie *linear abhängig*.

8.7 Spezialfälle

Bevor wir die lineare Unabhängigkeit weiter untersuchen, betrachten wir die Fälle von Familien mit nur einem Vektor ($n = 1$) und mit zwei Vektoren ($n = 2$):

$n = 1$: Eine Familie (v_1) mit nur einem Vektor $v_1 \in V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $v_1 \neq \mathbf{0}$ gilt: denn dann folgt aus $\alpha v_1 = \mathbf{0}$ sofort $\alpha = 0$.

Umgekehrt: (v_1) ist genau dann linear abhängig, wenn $v_1 = \mathbf{0}$ ist.

$n = 2$: Eine Familie (v_1, v_2) aus zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $v_1 \notin Kv_2$ und $v_2 \notin Kv_1$ gilt; mit anderen Worten: v_1 ist kein Vielfaches von v_2, und v_2 ist auch kein Vielfaches von v_1.

Umgekehrt: (v_1, v_2) ist genau dann linear abhängig, wenn v_1 ein Vielfaches von v_2 oder v_2 ein Vielfaches von v_1 ist (bzgl. der Multiplikation mit Skalaren in K).

Beispiele: In $\mathbb{R}^2$ sind $v_1 = (1, 3)^\top$ und $v_2 = (-2, -6)^\top$ linear abhängig.
In $\mathbb{C}^2$ sind $v_1 = (1 + 2i, 3 - i)^\top$ und $v_2 = (2 - i, -1 - 3i)^\top$ linear abhängig.

8.8 Satz

Für eine endliche Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren $v_i \in V$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) $(v_1, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig.

b) Für jedes $1 \leq j \leq n$ gilt

$$v_j \notin \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n).$$

c) Für jeden Vektor $w \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n)$ existiert genau ein n-Tupel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ von Skalaren $\alpha_i \in K$ mit

$$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n;$$

d.h. die Darstellung von w als Linearkombination der $v_1, \ldots, v_n$ ist eindeutig.

Wir können leicht weitere Spezialfälle betrachten und einfache Folgerungen ziehen.

8.9 Bemerkung:

a) Wenn die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist, dann ist jede Teilfamilie ebenfalls linear unabhängig.

b) Wenn die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig ist, dann ist auch jede Familie, die diese Vektoren umfasst, linear abhängig.

c) Die Eigenschaft der linearen Abhängigkeit oder linearen Unabhängigkeit bleibt erhalten, wenn man die Reihenfolge der Vektoren v_i vertauscht.

d) Wenn ein $v_j = 0$ ist, so ist $(v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig.

e) Wenn zwei v_i übereinstimmen, also $v_i = v_j$ mit $i \neq j$, dann ist $(v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig.

8.10 Definition: Basis

Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ (mit endlicher oder unendlicher Indexmenge $I \neq \emptyset$) von Vektoren $v_i \in V$ heißt *Basis von V*, wenn sie **linear unabhängig** ist und ein **Erzeugendensystem** von V ist.

Der folgende Satz fasst für eine endliche Basis zusammen, was wir nach den bisherigen Überlegungen bereits wissen.

8.11 Satz

Eine Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren $v_i \in V$ ist genau dann eine Basis von V, wenn für jedes Element $v \in V$ eine Darstellung

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

mit eindeutigen Skalaren $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ existiert.

Die Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ heißen auch die *Koordinaten* von v bezüglich der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$; wir kommen im Kapitel III (Lineare Abbildungen) auf diesen Begriff zurück.

In einem **endlich erzeugten** Vektorraum existiert nach Definition 8.1(d) eine endliche Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ mit $V = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n)$.
Die Idee zur Konstruktion einer Basis von V ist nun einfach: man lässt "überflüssige" Vektoren der Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ einfach weg.

8.14 Lemma

Es sei $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ eine Familie von Vektoren $v_i \in V$ und für ein $1 \leq j \leq n$ gelte $v_j \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n)$. Dann folgt

$$\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n) = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n).$$

Die Existenz einer Basis im endlich erzeugten Vektorraum ist nun leicht zu zeigen.

8.15 Satz: Einfacher Existenzsatz für Basen

Jeder endlich erzeugte K-Vektorraum $V \neq \{\mathbf{0}\}$ besitzt eine Basis.

Beweis: Ausgehend von einer endlichen Erzeugenden-Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ von V entsteht durch mehrmalige Anwendung des Lemmas 8.14 eine Teilfamilie $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, die die Eigenschaft

$$v_{i_j} \notin \mathrm{Span}(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{j-1}}, v_{i_{j+1}}, \ldots, v_{i_k}) \quad \text{für alle} \quad 1 \leq j \leq k$$

erfüllt und für die $V = \mathrm{Span}(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ gilt. Nach Satz 8.8 (b) ist diese Teilfamilie linear unabhängig, also eine Basis von V. $\square$

Wir kennen den Dimensionsbegriff aus unserer Anschauung: die Ebene $\mathbb{R}^2$ hat die Dimension 2, der uns umgebende Raum $\mathbb{R}^3$ die Dimension 3. Diese Zahlen geben an, dass es jeweils Erzeugendensysteme (sogar Basen) mit der entsprechenden Anzahl von Vektoren gibt. Um den Begriff der *Dimension* eines Vektorraums V zu fassen, muss aber zuerst die folgende Aussage zur Anzahl der Elemente in einer Basis bewiesen werden.

8.16 Satz

Sei V ein endlich-erzeugter K-Vektorraum, $V \neq \{\mathbf{0}\}$. Dann haben alle Basen von V die gleiche (endliche) Anzahl von Vektoren; diese Anzahl nennen wir die *Dimension* von V, geschrieben $\dim V$.

Bemerkungen:

a) Für $V = \{\mathbf{0}\}$ setzen wir $\dim V = 0$.

b) Falls V nicht endlich erzeugt ist, nennen wir V *unendlich-dimensional* und schreiben $\dim V = \infty$.

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 8.16 dienen zwei Aussagen zum *Austausch* von Elementen einer gegebenen Basis.

8.17 Austauschlemma

Es sei V ein K-Vektorraum, $V \neq \{\mathbf{0}\}$. Weiter sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V sowie $w \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. Dann existiert ein Index $k \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass

$$(v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n)$$

ebenfalls eine Basis von V ist.
Mit anderen Worten: Einer der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ kann durch w ersetzt werden und die Basiseigenschaft bleibt erhalten.

Zusatz: Ist $w = \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_n v_n$, so kann jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\gamma_k \neq 0$ für den Austausch $v_k \leftrightarrow w$ ausgewählt werden.

8.18 Steinitz'scher Austauschsatz

Es sei V ein Vektorraum, $V \neq \{\mathbf{0}\}$. Weiter sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V sowie $(u_1, \ldots, u_r)$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren $u_j \in V$.

Dann gilt

1. $r \leq n$, und
2. es gibt Indizes $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-r} \leq n$ derart, dass die Familie

   $$(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-r}}, u_1, \ldots, u_r)$$

   ebenfalls eine Basis von V ist; d.h. es können r der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ durch die neuen Vektoren $u_1, \ldots, u_r$ ersetzt werden, so dass wieder eine Basis entsteht.

Als "Pendant" zum Lemma 8.14 soll noch der folgende Satz erwähnt werden.

8.19 Basis-Ergänzungssatz

Es sei V ein K-Vektorraum und $(v_1, \dots, v_r)$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren aus V. Seien $w_1, \dots, w_s \in V$ weitere Vektoren derart, dass

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s) = V$$

gilt.
Dann kann $(v_1, \dots, v_r)$ durch Hinzunahme von geeigneten $w_{j_1}, \dots, w_{j_t}$ (mit $t \leq s$) zu einer Basis von V ergänzt werden. (Die "Hinzunahme" von 0 Vektoren ist als Möglichkeit eingeschlossen.)

Bemerkung: **Jede** linear unabhängige Familie $(v_1, \dots, v_r)$ in einem (endlich erzeugten) Vektorraum V kann zu einer Basis von V ergänzt werden. (Verwende im obigen Satz irgendein Erzeugendensystem $(w_1, \dots, w_s)$ von V.)

8.21 Bemerkungen: Einige nützliche Folgerungen lassen sich aus den bisherigen Ergebnissen ziehen.

(1) Aus $W \preccurlyeq V$ folgt $\dim W \leq \dim V$.

(2) Ist V endlich erzeugt, $W \preccurlyeq V$ sowie $\dim W = \dim V$, so gilt $W = V$.

ACHTUNG: Dieser Schluss ist für $\dim V = \infty$ falsch.

(3) Falls $\dim V = n$ und $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist, so ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V.

(4) Falls $\dim V = n$ und $(v_1, \ldots, v_n)$ ein Erzeugendensystem von V ist, so ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V.

(5) Falls $\dim V = n$ ist, so ist jede Familie der Länge $r > n$ linear abhängig.

(6) Falls $\dim V = n$ ist, so ist jede Familie der Länge $r < n$ kein Erzeugendensystem von V.

Am Ende dieses Abschnitts sollen noch Aussagen zu unendlich-dimensionalen Vektorräumen gemacht werden. Die Beweise benötigen ganz andere Hilfsmittel als unsere "konstruktiven" Methoden. Zentrales Hilfsmittel ist das *Lemma von Zorn* aus der Mengenlehre.

8.23 Satz: Existenzsatz für Basen

a) Jeder K-Vektorraum V, $V \neq \{\mathbf{0}\}$, besitzt eine Basis.

b) Jede linear unabhängige Familie $(v_i)_{i \in I}$ (mit endlicher oder unendlicher Indexmenge I) von Vektoren $v_i \in V$ kann zu einer Basis von V ergänzt werden.

8.24 Beispiel: Der Vektorraum $\mathbb{R}[t]$ aller reellen Polynome ist ein Beispiel eines Vektorraums, der nicht endlich erzeugt ist: $\dim \mathbb{R}[t] = \infty$.

- Die Familie $(e_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$,

$$e_j = t^j \ \in \mathbb{R}[t] \quad \text{für} \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

  ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}[t]$. (Beachte hierzu: Ein Polynom ist eine **endliche** Summe $f = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j$.)

- Die lineare Unabhängigkeit der Familie $(e_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ ist bereits in der Definition 4.23 enthalten:
  Eine beliebige Linearkombination der unendlichen Familie $(e_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ ist ein Polynom

$$f = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j \ \text{ mit } \ n \in \mathbb{N}_0, \ \ \alpha_j \in \mathbb{R} \ \text{ für } \ 0 \leq j \leq n.$$

  Sobald ein Koeffizient $\alpha_j \neq 0$ ist, ist auch f vom Nullpolynom verschieden.

Also ist die Familie $(e_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis von $\mathbb{R}[t]$.

8.25 Beispiel: Es ist äußerst schwierig, eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller reellen Zahlenfolgen anzugeben; eine "explizite" Angabe einer Basis ist meines Wissens unmöglich.

- Zwar ist die Familie $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots) \text{ mit dem Folgenglied 1 an der Stelle } j$$

aus Beispiel 8.2(6) linear unabhängig, aber bei weitem noch kein Erzeugendensystem: Nicht einmal die Nullfolge

$$w = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

ist Linearkombination der Familie $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. (Was ist denn $\mathrm{Span}(\,(e_j)_{j\in\mathbb{N}})$?)

- Es gibt gar kein abzählbares Erzeugendensystem dieses Vektorraums.

8.26 Bemerkung

In der *Funktionalanalysis* wird deshalb ein anderer *Basis*-Begriff eingeführt. Unser Basis-Begriff der Linearen Algebra (=linear unabh. Erzeugendensystem mittels **endlicher** Linearkombinationen) wird genauer als *Hamel-Basis* bezeichnet. Andere Begriffe, die die Konvergenz unendlicher Reihen von Vektoren verwenden, sind z.B. *Schauder-Basen*, *Orthonormalbasen*. Diese Begriffe sind für unendlich-dimensionale Vektorräume verschieden von unserem Basisbegriff! Sie sind aber für die Untersuchung solcher Vektorräume viel nützlicher.

9 Direkte Summen und Faktorräume

Der Begriff der Basis liefert eine "Zerlegung" des Vektorraums V in eindimensionale Teilräume. Wir behandeln nun allgemeinere Zerlegungen.

9.1 Definition: Summe und direkte Summe

Es sei V ein K-Vektorraum und U_1, U_2 zwei Untervektorräume.

a) Die Menge

$$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid \; u_1 \in U_1, \; u_2 \in U_2\}$$

heißt *Summe* der Untervektorräume U_1 und U_2.

b) Falls $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$ gilt, so heißt $U_1 + U_2$ *direkte Summe* von U_1 und U_2; sie wird geschrieben als $U_1 \oplus U_2$.

9.2 Bemerkungen:

(1) Die Summe $U_1 + U_2$ ist ein Untervektorraum von V: die Eigenschaft (UV3) ist leicht nachzuprüfen.
Wir zeigen sogar etwas mehr: es gilt

$$U_1 + U_2 = \mathrm{Span}(U_1 \cup U_2) \preccurlyeq V.$$

(2) Die Summe $U_1 + U_2$ ist genau dann *direkt*, wenn jeder Vektor $v \in U_1 + U_2$ eine *eindeutige* Zerlegung $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ besitzt.

(3) Die Bildung der Summe von Teilräumen ist kommutativ und assoziativ:

$$U_1 + U_2 = U_2 + U_1, \qquad (U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3).$$

Für n Teilräume $U_1, \ldots, U_n \preccurlyeq V$ können wir also $\sum_{i=1}^n U_i$ schreiben; es gilt

$$\sum_{i=1}^n U_i = \mathrm{Span}(U_1 \cup \cdots \cup U_n).$$

(4) Die direkte Summe von Teilräumen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ist immer dann sinnvoll erklärt, wenn

$$U_j \cap \sum_{i=1, i\neq j}^n U_i = \{\mathbf{0}\}$$

ist. In diesem Fall liegt auch Assoziativität vor, also können wir $\bigoplus_{i=1}^n U_i$ schreiben.

(5) Diese Überlegungen führen zu folgenden Aussagen: Für $v \in V$ sei $Kv = \{\alpha v \mid \alpha \in K\}$; dieser Teilraum von V ist null- oder eindimensional, je nachdem, ob $v = \mathbf{0}$ oder $v \neq \mathbf{0}$ gilt.

(5a) Die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ ist genau dann ein Erzeugensystem des Vektorraums V, wenn

$$V = \sum_{i=1}^{n} K v_i \qquad \text{gilt.}$$

(5b) Die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ soll den Nullvektor nicht enthalten. Sie ist genau dann eine Basis von V, wenn

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} K v_i \qquad \text{gilt.}$$

Insofern liefert eine Basis von V eine *Zerlegung* in eindimensionale Teilräume. Dies ist übrigens genau die Aussage von Satz 8.11, nur in etwas anderer Form geschrieben.

9.3 Satz: Dimensionsformel für Summen

Für endlich-dimensionale Untervektorräume U_1, U_2 von V gilt

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Die Summe ist genau dann direkt, wenn

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$$

gilt.

9.4 Komplementierungs-Satz

Es sei V ein K-Vektorraum und $U \preccurlyeq V$. Dann existiert ein Untervektorraum $W \preccurlyeq V$ mit $V = U \oplus W$.

Man nennt dann U, W komplementäre Unterräume von V. Es gilt $\dim V = \dim U + \dim W$.

Wir verwenden nun die Struktur der abelschen Gruppe $(V, +)$ zur "Faktorisierung" modulo eines Untervektorraums von V. Man beachte, dass ein Untervektorraum $U \preccurlyeq V$ auch eine Untergruppe von $(V, +)$ ist.

9.6 Definition: Faktorraum

Es sei V ein K-Vektorraum und $U \preccurlyeq V$. Dann nennen wir

$$V/U = \{[v]_U \mid \; v \in V\} = \{v + U \mid \; v \in V\}$$

den *Faktorraum V modulo U*.
Die Addition auf V/U ist die der Faktorgruppe, also

$$+ \; : V/U \times V/U \to V/U, \quad (v + U, w + U) \mapsto (v + w) + U.$$

Die Skalarmultiplikation wird definiert durch

$$\cdot \; : K \times V/U \to V/U, \quad (\alpha, v + U) \mapsto (\alpha v) + U.$$

9.7 Satz

Es sei V ein K-Vektorraum und $U \preccurlyeq V$.

a) Der Faktorraum V/U ist ein K-Vektorraum. Sein Nullelement ist $[\mathbf{0}]_U = \mathbf{0} + U$, das Negative zu $v + U$ ist $(-v) + U$.

b) Ist W ein komplementärer Unterraum zu U in V, also $V = U \oplus W$, so ist W ein vollständiges Repräsentantensystem des Faktorraums V/U; d.h.

$$[w_1]_U \neq [w_2]_U \qquad \text{für alle} \;\; w_1, w_2 \in W, \;\; w_1 \neq w_2,$$

und

$$V/U = \{[w]_U \mid \; w \in W\}.$$

Bemerkung: Die Restklassen $[v]_U = v + U$ sind die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation

$$v \sim w :\Leftrightarrow \;\; v - w \in U.$$

Zur Übung prüfe man die Reflexivität, Symmetrie und Transitivität basierend auf den Axiomen (UV1) und (UV2) des Untervektorraums.

9.8 Satz: Dimensionsformel für Faktorräume

Es sei V ein K-Vektorraum und $U \preccurlyeq V$. Dann gilt

$$\dim V = \dim U + \dim(V/U).$$

9.9 Definition: Affiner Teilraum

Es sei V ein K-Vektorraum und $U \preccurlyeq V$ ein Untervektorraum. Das Element $v + U = \{v + u \mid u \in U\}$ der Faktorgruppe V/U heißt ein *affiner Unterraum von* V, der Untervektorraum U heißt sein *Differenzenraum*.

Wir definieren die *Dimension* des affinen Unterraums $v + U$ als die Dimension seines Differenzenraumes, also $\dim(v + U) := \dim U$.

9.10 Satz

Es sei V ein K-Vektorraum und $A \subseteq V$ eine Teilmenge. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a) A ist ein affiner Unterraum von V.

b) Die Menge
$$\tilde{U} := \{v - w \mid \; v, w \in A\}$$
ist ein Untervektorraum von V.

c) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, Vektoren $v_1, \dots, v_n \in A$ sowie $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, die die Bedingung $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ erfüllen, gilt
$$\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n \in A. \qquad (*)$$

Bemerkung: Man nennt eine Linearkombination (*), deren Koeffizienten $\lambda_j \in K$ die Bedingung $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ erfüllen, eine *affine Kombination* der Vektoren $v_1, \dots, v_n$. Satz **??** besagt, dass ein *affiner* Unterraum bzgl. der Bildung von *affinen* Kombinationen seiner Elemente abgeschlossen ist.

Ein kleiner Ausblick zur Geometrie.

9.11 Definition: Parallelität

Es sei V ein K-Vektorraum sowie $A_1, A_2 \subseteq V$ affine Teilräume von V. Der Differenzenraum von A_j sei U_j, $j = 1, 2$.
Die affinen Teilräume heißen *parallel*, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

Bemerkung: Der Faktorraum V/U ist eine Zerlegung von V in *parallele* affine Teilräume $v + U$; der Differenzenraum all dieser affinen Teilräume ist U.