

Lineare Algebra I

Präsenzübung Blatt 2

Aufgabe 3 (Hilberts Hotel)

(Inhaber: David Hilbert, 1862 — 1943, deutscher Mathematiker mit bedeutenden Beiträgen zur Geometrie, Zahlentheorie und der axiomatischen Formulierung der Mathematik. H. formulierte Anfang des 20. Jahrhunderts 23 Probleme, deren Lösung seiner Meinung nach die Mathematik entscheidend voran brächten. Bis heute sind noch nicht alle dieser Probleme gelöst.)

Ein Hotel mit \mathbb{N} Betten ist voll belegt. Zeigen Sie, dass in den folgenden Fällen alle Neuankömmlinge mit Zimmern versorgt werden können, ohne jemand auf die Straße setzen zu müssen:

- a) Es kommt ein neuer Gast und benötigt ein Zimmer.
- b) Ein Kleinbus mit n Personen kommt.
- c) Ein Großraumbus mit \mathbb{N} Personen trifft ein.
- d) Zwei Großraumbusse mit je \mathbb{N} Passagieren treffen ein.
- e) Es kommen \mathbb{N} Großraumbusse mit je \mathbb{N} Passagieren an.

Bemerkung:

Mit dem Cantorschen Diagonalisierungsverfahren, das in Teil e) verwendet wird, zeigt man auch, dass \mathbb{N} und \mathbb{Q} gleichmächtig sind. Außerdem zeigt man mit diesem Ansatz, dass \mathbb{N} und \mathbb{R} nicht gleichmächtig sind.

Vortrag für die nächste Woche:

Wiederholung des Euklidischen Algorithmus, Lemma von Bézout. Wie könnte der Euklidische Algorithmus für Polynome aussehen?