Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

WiSe 2010/11
17.11.10

Lineare Algebra I

Präsenzübung Blatt 5

Aufgabe 7

Es sei $\mathbb{N}_0$ mit der üblichen Addition und Multiplikation versehen. Weiter sei $M := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

a) Auf M wird eine Äquivalenzrelation definiert durch

$$(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2) \;:\Leftrightarrow\; n_1 + m_2 = n_2 + m_1.$$

Geben Sie ein vollständiges Repräsentantensystem an.

b) $M/_\sim$ bildet mit der Addition

$$[(n_1, m_1)] \oplus [(n_2, m_2)] \;:=\; [(n_1 + n_2, m_1 + m_2)]$$

eine abelsche Gruppe. Dabei ist die Wohldefiniertheit der Addition zu zeigen.

c) $M/_\sim$ bildet mit der Multiplikation

$$[(n_1, m_1)] \odot [(n_2, m_2)] \;:=\; [(n_1 n_2 + m_1 m_2, n_1 m_2 + m_1 n_2)]$$

eine kommutative Halbgruppe mit 1 (inkl. Wohldefiniertheit).

d) $(M/_\sim, \oplus, \odot)$ ist nullteilerfrei.

Bemerkung:
Die Distributivgesetze gelten auch. Damit bildet $M/_\sim$ mit den obigen Verknüpfungen einen kommutativen, nullteilerfreien Ring mit 1. Zu welchem Ring ist er isomorph?

Vortrag für die nächste Woche:
Vektorräume, Untervektorräume: Definition. Als Beispiel: die Zeichenebene als Vektorraum $\mathbb{R}^2$, graphische Interpretation der Axiome.