Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko
Dipl.-Wirt.-Math. Tobias Springer

Dortmund, 11.01.2012

Lineare Algebra für Lehramt Gymnasium

12. Übung

Aufgabe 45 (6 Punkte) Es seien

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 2-i & 2-i & -2+i \\ 0 & -1+i & 2-2i \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die inversen Matrizen A_1^{-1} und A_2^{-1}.

Aufgabe 46 Sei $H := \left\{ A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \right\}$. Zeigen Sie:

(i) H bildet mit der für Matrizen erklärten Addition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

(ii) H ist bzgl. der Multiplikation und Addition von Matrizen abgeschlossen.
Tipp: Stellen Sie mit den Basiselementen E, I, J, K eine Verknüpfungstabelle für die Multiplikation auf.

(iii) Jedes von $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ verschiedene Element von H besitzt ein multiplikatives Inverses.
Ist H ein Körper? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 47 (4 Punkte) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Ist φ eindeutig bestimmt?

(ii) Wenn φ eindeutig bestimmt ist, finden Sie die Matrix A, so dass $\varphi(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 48 (5 Punkte) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei die lineare Abbildung mit $\varphi(x) = Ax$.

(i) Bestimmen Sie $Rang(A)$

(ii) Berechnen Sie $Kern(\varphi)$

(iii) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

(iv) Bestimmen Sie eine Basis von $Bild(\varphi)$.

(v) Skizzieren Sie $Bild(\varphi)$.

Abgabe: Mittwoch, 18.01.2012 bis 10 Uhr.