Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko
Dipl.-Wirt.-Math. Tobias Springer

Dortmund, 14.12.2011

Lineare Algebra für Lehramt Gymnasium

10. Übung

Aufgabe 37 (4 Punkte)

(i) Sei V ein K-Vektorraum und $\Phi : V \to K$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die Menge $\{v \in V \mid \Phi(v) = 0\}$ ein Untervektorraum ist (mit der Addition und Skalarmultiplikation aus V).

(ii) Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = 0, \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = 0, \end{array}$$

ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ ist.

(iii) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 2, \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -1. \end{array}$$

Aufgabe 38 (4 Punkte) Seien V und W K-Vektorräume und $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie

(i) Φ ist genau dann bijektiv, wenn $Kern\ \Phi = \{0\}$ und $dim(V) = dim(W)$.

(ii) Ist Φ bijektiv, dann ist die Umkehrabbildung ebenfalls linear.

(iii) Sei $V = W = \mathbb{R}^3$ und $\Phi(1,0,0) = (-1,0,1)$, $\Phi(0,1,0) = (1,2,0)$, $\Phi(0,0,1) = (0,2,1)$. Bestimmen Sie $\Phi(1,1,1)$.

Aufgabe 39 Von einer linearen Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ seien nur

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in Kern\Phi \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in Bild\Phi$$

bekannt.

(i) Ist sie eindeutig bestimmt?

(ii) Geben Sie für eine lineare Abbildung Φ, die die genannten Bedingungen erfüllt, die Vektoren $\Phi(1,0,0), \Phi(0,1,0)$ und $\Phi(0,0,1)$ explizit an.

Aufgabe 40 (7 Punkte) Gegeben seien zwei Untervektorräume U und V des $\mathbb{R}^4$ mit Basen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (\text{ zu } U), \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\text{ zu } V).$$

Bestimmen Sie Basen für $U \cap V$ und $U + V$.

Abgabe: Mittwoch, 21.12.2011 bis 10 Uhr.