Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko
Dipl.-Wirt.-Math. Tobias Springer

Dortmund, 21.12.2011

Lineare Algebra für Lehramt Gymnasium
11. Übung

Aufgabe 41 (6 Punkte)

(i) Berechnen Sie für untenstehende reelle Matrizen die folgenden Ausdrücke, falls dies möglich ist: $A+B,\ B+C,\ AB,\ BA,\ AC,\ CB,\ CD,\ BAC,\ BAD$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, D := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Gelten die binomischen Formeln $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ und $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$?

Aufgabe 42 (5 Punkte) Seien $D, S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$D := \begin{pmatrix} cos(\frac{2\pi}{3}) & -sin(\frac{2\pi}{3}) \\ sin(\frac{2\pi}{3}) & cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} \text{ und } S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie $D^2, D^3, S^2, DS, SD, D^2S$ und SD^2.

(ii) Zeigen Sie, dass die im Teil (i) gefundenen Matrizen eine Gruppe mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung bilden.

Aufgabe 43 (4 Punkte)

(i) Berechnen Sie A^3 für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Sei $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix, $0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Nullmatrix und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit $A^n = 0$. Beweisen Sie

$$(E-A)(E + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}) = E.$$

Aufgabe 44

(i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass $A + A^T$ symmetrisch und $A - A^T$ schiefsymmetrisch ist.

(ii) Sei $Sym(n)$ die Menge der symmetrischen Matrizen aus $\mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass $Sym(n)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

(iii) Sei $Alt(n)$ die Menge der schiefsymmetrischen Matrizen aus $\mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass $Alt(n)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

(iv) Bestimmen Sie Basen von $Sym(n)$ und $Alt(n)$ und beweisen Sie $\mathbb{R}^{n\times n} = Sym(n) \bigoplus Alt(n)$.

Abgabe: Mittwoch, 11.1.2012 bis 10 Uhr.