Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko
Dipl.-Wirt.-Math. Tobias Springer

Dortmund, 16.11.2011

Lineare Algebra für Lehramt Gymnasium

6. Übung

Aufgabe 21 (5 Punkte) In der Vorlesung wurde gezeigt: Ein gleichseitiges Dreieck kann man auf sechs verschiedene Weisen auf sich selbst transformieren. Dazu braucht man nur eine Drehung um 120° (evtl. zwei Mal ausführen) und höchstens eine Spiegelung, die eine von vornherein festgelegte Seitenhalbierende fest läßt.

(i) Zeigen Sie, dass man für jede dieser sechs Transformationen höchstens zwei Mal eine der genannten Operationen (Spiegeln oder Drehen) ausführen muss.

(ii) Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe S_3 zwei Elemente s und d enthält, so dass die weiteren vier Elemente die Identität und drei Elemente vom Typ $a \circ b$ mit $a, b \in \{s, d\}$ sind.

(iii) Stellen Sie für $(S_3, \circ)$ die Verknüpfungstafel auf.

Aufgabe 22 Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$.

Aufgabe 23 (5 Punkte) Betrachten Sie die Abbildung $\varphi_{11} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{11},\ x \mapsto x \ mod\ 11$.

(i) Zeigen Sie, dass φ_{11} ein Homomorphismus ist mit

$$\varphi_{11}(a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + a_4 \cdot 10^4) = \varphi_{11}(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4)$$

für beliebige $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

(ii) Bestimmen Sie die Reste von 1234, 141 und 909 beim Teilen durch 11. Verwenden Sie dazu (i).

(iii) Was ist das Resultat von $(1234 +_{11} 141) \cdot_{11} 909^{-1}$?

Aufgabe 24 (5 Punkte)

(i) Berechnen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $a + ib = \frac{3+i}{8-i}$.

(ii) Es sei $\frac{1}{z} = 1 + i$. Berechnen Sie $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, seine Polarkoordinaten-Darstellung $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, sowie z^2.

(iii) Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen in der komplexen Ebene:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \frac{2}{z-i} = \overline{z} + i\}$,

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - (2 + 2i)| \leq 2\}$.

Abgabe: Mittwoch, 23.11.2011 bis 10 Uhr.