Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko
Dipl.-Wirt.-Math. Tobias Springer

Dortmund, 23.11.2011

Lineare Algebra für Lehramt Gymnasium

7. Übung

Aufgabe 25 (4 Punkte) Das Polynom $p(z) := z^3 + 2z + 3$ hat eine reelle Nullstelle α_1 und zwei nicht-reelle Nullstellen α_2 und α_3.

(i) Finden Sie durch Ausprobieren α_1 und bestimmen Sie dann ein Polynom $q(z)$ zweiten Grads, das α_2 und α_3 als Nullstellen hat.

(ii) Berechnen Sie die Nullstellen α_2 und α_3 von $q(z)$

(iii) Berechnen Sie $\alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_2 \cdot \alpha_3$ und $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_3}$.

Aufgabe 26 (5 Punkte) Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ sind Untervektorräume? Skizzieren Sie diese Mengen jeweils.

(i) $U_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -x_2\}$

(ii) $U_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -x_2 \text{ oder } x_1 = 1\}$

(iii) $U_3 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -x_2 \text{ und } x_1 = 1\}$

(iv) $U_4 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq |x_2|\}$

(v) $U_5 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2\}$

Aufgabe 27 (6 Punkte) Sei U der Untervektorraum U von $\mathbb{R}^3$, der die beiden Vektoren $v := (1, -1, 1)$ und $w := (2, 2, 0)$ enthält, so dass jeder Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, der v und w enthält, auch alle Vektoren von U enthält.

(i) Beschreiben Sie mit Hilfe geeigneter Linearkombinationen die Vektoren von U.

(ii) Zeigen Sie $(0, 2, -1) \in U$.

(iii) Zeigen Sie $(1, 1, 1) \notin U$.

(iv) Beweisen Sie, dass v, w und $(1, 1, 1)$ den $\mathbb{R}^3$ aufspannen.

Aufgabe 28 Wir betrachten den $\mathbb{Z}_5$-Vektorraum $\mathbb{Z}_5^3 = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$.

(i) Wieviele verschiedene Vektoren enthält $\mathbb{Z}_5^3$?

(ii) Wieviele verschiedene Vektoren enthält der von $v := (1, 4, 1)$ aufgespannte Untervektorraum?

(iii) Liegt $(1, 1, 1)$ in dem von $v := (1, 4, 1)$ und $w := (2, 2, 0)$ aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{Z}_5^3$?

Abgabe: Mittwoch, 30.11.2011 bis 10 Uhr.