technische universität dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller

Dortmund, im Dezember 2011

Lineare Algebra für Lehramt Gymnasien und Berufskolleg

Zusammenfassung der Abschnitte 4.1 und 4.2

4. Vektorräume und Gleichungssysteme

4.1 Vektorräume und Unterräume

Im folgenden ist $I\!K$ immer ein Körper. Zur Unterscheidung von Elementen des Körpers und den Elementen der im folgenden definierten Vektorräume beschreiben wir die Körperelemente, wenn möglich, mit griechischen Buchstaben und nennen sie *Skalare*. Für die Elemente des $I\!K$-Vektorraums verwenden wir Fettdruck und nennen sie *Vektoren*. Dabei ist zubeachten, dass der Begriff Vektor hier allgemeiner ist als der in der Schule verwendete.

Definition 4.1 (Vektorraum über $I\!K$)
Ein *Vektorraum über* $I\!K$ (auch $I\!K$-Vektorraum oder $I\!K$-linearer Raum genannt) ist eine Menge V mit einer Verknüpfung $+$,

$$V \times V \to V, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{w},$$

und einer Abbildung

$$K \times V \to V, \quad (\alpha, \mathbf{v}) \mapsto \alpha \cdot \mathbf{v},$$

einer sogenannten *äußeren Verknüpfung*, die *Skalarmultiplikation* genannt wird, so dass folgende Axiome gelten
(V1) Für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$ gilt $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{z} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{z})$.
(V2) Für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ gilt $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
(V3) Es gibt ein $\mathbf{0} \in V$, so dass für alle $\mathbf{v} \in V$ gilt $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$.
(V4) Zu jedem $\mathbf{v} \in V$ gibt es ein $-\mathbf{v} \in V$ mit $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
(V5) Für alle $\alpha, \beta \in I\!K$ und alle $\mathbf{v} \in V$ gilt $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{v}$.
(V6) Für alle $\alpha, \beta \in I\!K$ und alle $\mathbf{v} \in V$ gilt $(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v})$.
(V7) Für alle $\mathbf{v} \in V$ gilt $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.
(V8) Für alle $\alpha \in I\!K$ und alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ gilt $\alpha \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha \cdot \mathbf{v} + \alpha \cdot \mathbf{w}$.

(V1) - (V4) besagen, dass $(V,+)$ eine abelsche Gruppe ist. (V7) sieht trivial aus, verhindert aber zum Beispiel, dass man als Skalarmultiplikation

$$\alpha \cdot \mathbf{v} := \mathbf{0} \quad \text{für alle } \alpha \in I\!\!K,\ \mathbf{v} \in V$$

definiert. Bei dieser Definition sind die Axiome (V5), (V6) und (V8) erfüllt, aber V kein $I\!\!K$-Vektorraum, weil (V7) nicht gilt.

Beispiele
1. $I\!\!K^n = I\!\!K \times I\!\!K \times \ldots \times I\!\!K$ mit Addition

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

und Skalarmultiplikation

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

bildet einen $I\!\!K$-Vektorraum. Speziell die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ sind geometrisch interpretierbar.
2. M sei beliebige Menge, $Abb(M, I\!\!K)$ ist die Menge aller Abbildungen von M nach $I\!\!K$. $Abb(M, I\!\!K)$ ist ein $I\!\!K$-Vektorraum mit Addition

$$f + g : M \to I\!\!K,\ x \mapsto f(x) + g(x)$$

und Skalarmultiplikation

$$\alpha \cdot f : M \to I\!\!K,\ x \mapsto \alpha f(x).$$

3. M sei beliebige Menge und

$$\mathcal{V}_0 := \{f \in Abb(M, I\!\!K) \mid f(x) \neq 0 \ \text{ nur für endlich viele } \ x \in M\}$$

Addition und Skalarmultiplikation wie in 2. machen $\mathcal{V}_0$ zu einem $I\!\!K$-Vektorraum,
4. Eine polynomiale Abbildung p aus $Abb(I\!\!K, I\!\!K)$ ist durch Vorgabe von endlich vielen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in I\!\!K$ und die Vorschrift

$$p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

eindeutig bestimmt. Die Menge aller polynomialen Abbildungen bildet einen $I\!\!K$-Vektorraum mit Addition und Skalarmultiplikation wie in 2.
5. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest und $M := I\!\!K^n$. Eine Abbildung f aus $Abb(I\!\!K^n, I\!\!K)$ ist durch Vorgabe von endlich vielen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in I\!\!K$ und die Vorschrift

$$f(x) := a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

eindeutig bestimmt. Eine derartige Abbildung wird *lineare Funktion* genannt. Die Menge aller solchen linearen Funktionen bildet einen $I\!\!K$-Vektorraum mit Addition und Skalarmultiplikation wie in 2.

Lemma 4.2 (Rechenregeln in $\mathbb{K}$-Vektorräumen)
Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann gilt für alle $\mathbf{v} \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$
(i) $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
(ii) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
(iii) $\alpha \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee \mathbf{v} = \mathbf{0})$.
(iv) $(-\alpha) \cdot \mathbf{v} = -(\alpha \cdot \mathbf{v})$.

Beweis. Zu (i)

$$\begin{aligned} 0 \cdot \mathbf{v} &\overset{V3}{=} 0 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{0} \overset{V4}{=} 0 \cdot \mathbf{v} + (0 \cdot \mathbf{v} + (-(0 \cdot \mathbf{v}))) \\ &\overset{V1}{=} (0 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v}) + (-(0 \cdot \mathbf{v})) \overset{V5}{=} (0+0) \cdot \mathbf{v} + (-(0 \cdot \mathbf{v})) \\ &= 0 \cdot \mathbf{v} + (-(0 \cdot \mathbf{v})) \overset{V4}{=} \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Zu (ii)

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \mathbf{0} &\overset{V3}{=} \alpha \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} \overset{V4}{=} \alpha \cdot \mathbf{0} + (\alpha \cdot \mathbf{0} + (-(\alpha \cdot \mathbf{0}))) \\ &\overset{V1}{=} (\alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0}) + (-(\alpha \cdot \mathbf{0})) \overset{V8}{=} \alpha \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) + (-(\alpha \cdot \mathbf{0})) \\ &\overset{V3}{=} \alpha \cdot \mathbf{0} + (-(\alpha \cdot \mathbf{0})) \overset{V4}{=} \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Zu (iii)
Die Implikation „ $\Leftarrow$ “ folgt offenbar aus (i) und (ii). Wir müssen also nur noch die Implikation „ $\Rightarrow$ “ zeigen. Es sei also $\alpha \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Wir nehmen an, dass $\alpha \neq 0$ gilt (andernfalls sind wir fertig) und müssen zeigen, dass dann $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ gilt.

$$\mathbf{v} \overset{V7}{=} 1 \cdot \mathbf{v} = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot \mathbf{v} \overset{V6}{=} \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{v}) = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{0} \overset{ii}{=} \mathbf{0}.$$

Zu (iv)

$$\begin{aligned} (-\alpha) \cdot \mathbf{v} &\overset{V3}{=} (-\alpha) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{0} \overset{V4}{=} (-\alpha) \cdot \mathbf{v} + (\alpha \cdot \mathbf{v} + (-(\alpha \cdot \mathbf{v}))) \\ &\overset{V1}{=} ((-\alpha) \cdot \mathbf{v} + \alpha \cdot \mathbf{v}) + (-(\alpha \cdot \mathbf{v})) \\ &\overset{V5}{=} (-\alpha + \alpha) \cdot \mathbf{v} + (-(\alpha \cdot \mathbf{v})) \overset{i}{=} -(\alpha \cdot \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Definition 4.3 (Untervektorräume)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum* von V, wenn die drei folgenden Eigenschaften gelten.
(UV1) Für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ ist auch $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$.
(UV2) Für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $\mathbf{v} \in U$ ist auch $\alpha \cdot \mathbf{v} \in U$.
(UV3) $\mathbf{0} \in U$.

Bemerkung U ist mit der Addition und der Skalarmultiplikation aus V auch ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die Eigenschaft (UV3) ist eine Folge aus (UV2)

und Lemma 4.2 i), wenn U nicht die leere Menge ist. (Also ist (UV3) eigentlich nur eine Umschreibung dafür, dass $U \neq \emptyset$ gilt.) Die Eigenschaften (UV1) und (UV2) lassen sich zusammenfassen zu
(UV4) Für alle $\alpha, \beta \in I\!\!K$ und $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ gilt auch $\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v} \in U$.

Beispiele Die Vektorräume der Beispiele nach Definition 4.1 waren z.T. Untervektorräume. So ist das $\mathcal{V}_0$ aus Beispiel 3 ein Untervektorraum des $I\!\!K$-Vektorraums $Abb(M, I\!\!K)$ aus Beispiel 1. Der $I\!\!K$-Vektorraum aus Beispiel 4 ist Untervektorraum von $Abb(I\!\!K, I\!\!K)$. Der $I\!\!K$-Vektorraum aus Beispiel 5 ist Untervektorraum von $Abb(I\!\!K^n, I\!\!K)$.

Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ hat z.B. als Untervektorraum

$$U_1 := \{\alpha \cdot (1,2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

U_1 ist eine Gerade durch $(0,0)$ und $(1,2)$. Ein weiterer Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ ist z.B.

$$U_2 := \{\alpha \cdot (1,2) + \beta \cdot (-1,1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Jeder Vektor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ liegt in U_2,

$$(x,y) = \frac{x+y}{3} \cdot (1,2) + \frac{y-2x}{3} \cdot (-1,1).$$

Also gilt $U_2 = \mathbb{R}^2$.

Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ hat z.B. als Untervektorraum

$$U_1 := \{\alpha \cdot (1,1,0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

U_1 ist eine Gerade durch $(0,0,0)$ und $(1,1,0)$. Ein weiterer Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist z.B.

$$U_2 := \{\alpha \cdot (1,1,0) + \beta \cdot (-1,0,2) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

U_2 stellt eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ dar.

Definition und Satz 4.4 (Linearkombinationen, lineare Hülle)
Sei V ein $I\!\!K$-Vektorraum und $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ Vektoren aus V.
i) $Lin\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}\} = \{\alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v_m} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in I\!\!K\}$ heißt *lineare Hülle* (oder *Spann*) von $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$. Ihre Elemente heißen *Linearkombinationen* von $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$. Man sagt, $Lin\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}\}$ *wird von* $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ *aufgespannt.*
ii) $Lin\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}\}$ ist ein Untervektorraum von V.

Beweis. Wenn $\mathbf{u} := \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v_m}$ und $\mathbf{w} := \beta_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \beta_m \cdot \mathbf{v_m}$, dann ist auch $\mathbf{u} + \mathbf{w} = (\alpha_1 + \beta_1) \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + (\alpha_m + \beta_m) \cdot \mathbf{v_m}$ eine Linearkombination von $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$, d.h., (UV1) gilt.
Wenn $\mathbf{u} := \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v_m}$, dann ist auch das α-fache von $\mathbf{u}$ also $\alpha \cdot \mathbf{u} = (\alpha \cdot \alpha_1) \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + (\alpha \cdot \alpha_m) \cdot \mathbf{v_m}$ Linearkombination von $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$, d.h., (UV2) gilt.
(UV3) gilt, weil $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{v_m}$ Linearkombination von $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ ist. □

Beispiele.
1. Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist $Lin\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ in der Regel eine Ebene. Ausnahme ist hier nur der Fall, wo die Geraden $\{\alpha \cdot \mathbf{v_1} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ und $\{\alpha \cdot \mathbf{v_2} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ identisch sind oder mindestens einer der Vektoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ der Nullvektor ist.
2. Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ betrachte die sogenannten Einheitsvektoren

$$\begin{array}{rl} \mathbf{e_1} := & (1,\ 0,\ 0,\ \ldots\ 0,\ 0), \\ \mathbf{e_2} := & (0,\ 1,\ 0,\ \ldots\ 0,\ 0), \\ \mathbf{e_3} := & (0,\ 0,\ 1,\ \ldots\ 0,\ 0), \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \\ \mathbf{e_n} := & (0,\ 0,\ 0,\ \ldots\ 0,\ 1). \end{array}$$

$Lin\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ ist dann gleich $\mathbb{R}^n$, weil man jedes $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben kann als

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \mathbf{e_1} + x_2 \cdot \mathbf{e_2} + \ldots + x_n \cdot \mathbf{e_n}.$$

Die geschweiften Klammern in dem Ausdruck $Lin\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}\}$ deuten an, dass es nicht auf die Reihenfolge der Vektoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}$ ankommt, selbst nicht darauf, ob einige der Vektoren mehrfach aufgezählt wurden. Mit anderen Worten, $Lin\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}\}$ hängt nur von der Menge $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}\}$ ab. Für beliebige (auch abzählbare oder überabzählbare) Mengen M kann man definieren

$$LinM := \{\alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v_m} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in I\!K, \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}\} \subseteq M\}.$$

Satz 4.5 (Lineare Hüllen als kleinste Untervektorräume)
Sei V ein $I\!K$-Vektorraum und $\emptyset \neq M \subseteq V$. Die lineare Hülle $LinM$ ist ein Untervektorraum von V mit der Eigenschaft
Ist U Untervektorraum von V und $M \subseteq U$, dann ist $LinM$ in U enthalten. Mit anderen Worten, $LinM$ ist der kleinste Untervektorraum von V, der M enthält.

Beweis $LinM$ ist nicht-leere Teilmenge von V. Mit zwei Elementen aus M,

$$\mathbf{v} := \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v_m}, \quad \mathbf{w} := \beta_1 \cdot \mathbf{w_1} + \ldots + \beta_n \cdot \mathbf{w_n},$$

und zwei Skalaren $\alpha, \beta \in I\!\!K$ bekommt man

$$\alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{w} = \alpha\alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha\alpha_m \cdot \mathbf{v_m} + \beta\beta_1 \cdot \mathbf{w_1} + \ldots + \beta\beta_n \cdot \mathbf{w_n}.$$

Dies ist eine Linearkombination aus $LinM$, weil $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}, \mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_n}\}$ Teilmenge von M ist. Also gilt (UV4). Mit $M \neq \emptyset$ folgt also, dass $LinM$ ein Untervektorraum ist.
Jeder andere Untervektorraum von V, der M enthält, enthält auch als Vektorraum alle Linearkombinationen von Vektoren aus M, er enthält also ganz $LinM$. □

Beispiel $Lin\{(1,1,0), (-1,0,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ kann man sich als Ebene vorstellen, die von den Vektoren $(1,1,0), (-1,0,2)$ aufgespannt wird. Sie enthält auch den Vektor $(0,0,0)$. Durch Angabe von drei Punkten ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ festgelegt. Hier sind es z.B. die Punkte (Vektoren) $(0,0,0)$, $(1,1,0)$ und $(-1,0,2)$. Ob ein Punkt in dieser Ebene liegt, stellt man dadurch fest, ob der entsprechende Vektor in der linearen Hülle von $(1,1,0)$ und $(-1,0,2)$ liegt, also Linearkombination von $(1,1,0)$ und $(-1,0,2)$ ist. Wir untersuchen, ob etwa der Vektor $(0,1,2)$ in $Lin\{(1,1,0), (-1,0,2)\}$ liegt, mit dem Ansatz

$$(0,1,2) = \alpha \cdot (1,1,0) + \beta \cdot (-1,0,2) = (\alpha - \beta, \alpha, 2\beta)$$

mit noch zu bestimmenden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Betrachtet man die Koordinaten einzeln, hat man die drei Gleichungen

$$\alpha - \beta = 0, \quad \alpha = 1, \quad 2\beta = 2$$

zu lösen. Es folgt leicht, dass $\alpha = 1, \ \beta = 1$ Lösung ist und keine anderen Werte von α und β Lösungen sind. Das System aus den drei Gleichungen hat also genau eine Lösung.
Betrachten wir jetzt beispielsweise den Vektor $(3,2,1)$ und fragen wieder, ob er in $Lin\{(1,1,0), (-1,0,2)\}$ liegt. Der Ansatz als Linearkombination von $(1,1,0)$ und $(-1,0,2)$ führt hier auf

$$(3,2,1) = \alpha \cdot (1,1,0) + \beta \cdot (-1,0,2) = (\alpha - \beta, \alpha, 2\beta)$$

mit noch zu bestimmenden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Koordinatenweise betrachtet gibt das die drei Gleichungen

$$\alpha - \beta = 3, \quad \alpha = 2, \quad 2\beta = 1.$$

Dieses System von Gleichungen ist nicht lösbar durch ein Zahlenpaar (α, β), d.h., $(3,2,1)$ ist nicht in der linearen Hülle von $(1,1,0)$ und $(-1,0,2)$.

4.2 Lineare Gleichungssysteme

Definition 4.6 (Lineare Gleichungssysteme)
Ein lineares Gleichungssystem (LGS) aus m Gleichungen mit n Unbekannten über einem Körper $I\!K$ ist von der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Zahlen $a_{ij} \in I\!K$ heißen *Koeffizienten* des LGS und die b_i *rechte Seiten*. Man fasst die Koeffizienten zu einem Schema zusammen,

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und nennt es *Matrix* bzw. genauer $m \times n$*-Matrix* über $I\!K$. Die rechten Seiten fasst man zu einem sogenannten *Spaltenvektor* zusammen,

$$b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Das LGS ist also gegeben durch das Paar (A, b), das man auch gern noch kürzer zusammenfasst zur sogenannten erweiterten Matrix $(A \mid b)$. Als *Lösung des LGS*$(A \mid b)$ wird jedes n-tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I\!K^n$ bezeichnet, das die m Gleichungen aus (1) erfüllt. Die Menge aller dieser Lösungen bezeichnen wir mit $\mathbb{L}(A, b)$.

Satz 4.7 (Charakterisierung der Lösungsmenge)
Gegeben sei ein LGS über einem Körper $I\!K$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Lösungsmenge des sogenannten homogenen LGS

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0, \end{aligned}$$

also $\mathbb{L}(A,0)$, ist ein Untervektorraum von $I\!K^n$. Wenn das sogenannte inhomogene LGS (2) eine Lösung $c=(c_1,\ldots,c_n)\in I\!K^n$ besitzt, dann sind alle Lösungen von (2) vom Typ $c+u$ mit $u\in\mathbb{L}(A,0)$, also

$$\mathbb{L}(A,b)=\{c+u\mid u\in\mathbb{L}(A,0)\}.$$

Beweis Wir zeigen zuerst, dass $\mathbb{L}(A,0)$ ein Untervektorraum ist. Dazu betrachten wir $u:=(u_1,\ldots,u_n), v:=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{L}(A,0)$ und $\alpha,\beta\in I\!K$. Dann folgt für die Linearkombination $\alpha\cdot u+\beta\cdot v$ (wobei wir der Übersichtlichkeit zuliebe nur die i-te Gleichung betrachten)

$$\begin{array}{ccccc} a_{i1}(\alpha u_1+\beta v_1) & + & a_{i2}(\alpha u_2+\beta v_2) & +\ldots+a_{in}(\alpha u_n+\beta v_n) & = \\ \alpha(a_{i1}u_1+a_{i2}u_2+\ldots+a_{in}u_n) & & + & \beta(a_{i1}v_1+a_{i2}v_2+\ldots+a_{in}v_n) & = \\ 0 & + & & 0 & =0 \end{array}$$

für $i=1,\ldots,n$. Damit folgt $\alpha\cdot u+\beta\cdot v\in\mathbb{L}(A,0)$. Es gilt also (UV4). Weil der Nullvektor $0\in I\!K^n$ natürlich in $\mathbb{L}(A,0)$ liegt, gilt auch (UV3). Damit ist $\mathbb{L}(A,0)$ Untervektorraum von $I\!K^n$.

Satz 4.8 (Zeilenumformungen)
Die Lösungsmenge eines LGS

$$\begin{array}{r} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{array}$$

wird nicht verändert, wenn man für beliebiges j aus $\{1,\ldots,m\}$
(Z1) die j-te Gleichung, $a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\ldots+a_{jn}x_n=b_j$ ersetzt durch die Gleichung

$$(a_{j1}+\alpha a_{i1})x_1+(a_{j2}+\alpha a_{i2})x_2+\ldots+(a_{jn}+\alpha a_{in})x_n=b_j+\alpha b_i$$

wobei $\alpha\in I\!K$ beliebig und $i\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{j\}$,
(Z2) die j-te Gleichung mit der i-ten vertauscht,
(Z3) in der j-ten Gleichung jedes a_{jk} und b_j durch αa_{jk} bzw. αb_j ersetzt mit einem $\alpha\in I\!K\setminus\{0\}$.

Beweis Sei $\mathbb{L}$ die Lösungsmenge des LGS und $\mathbb{L}'$ die Lösungsmenge nach dem Durchführen der Zeilenoperation (Z1). Wir müssen zeigen, dass $\mathbb{L}\subseteq\mathbb{L}'$ und $\mathbb{L}'\subseteq\mathbb{L}$ gilt.
Wenn man $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{L}$ in die (als einzige veränderte) j-te Gleichung einsetzt, bekommt man, weil x die alte i-te und j-te Gleichung erfüllt,

$$\begin{array}{rl} (a_{j1}+\alpha a_{i1})x_1+(a_{j2}+\alpha a_{i2})x_2+\ldots+(a_{jn}+\alpha a_{in})x_n & = \\ a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\ldots+a_{jn}x_n+\alpha(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n) & =b_j+\alpha b_i, \end{array}$$

d.h., x erfüllt alle Gleichungen der veränderten LGS, also $x \in \mathbb{L}'$. Das gilt für jedes $x \in \mathbb{L}$ und somit $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{L}'$.
Gilt umgekehrt $x \in \mathbb{L}'$, dann erfüllt x die neue j-te Gleichung und die neue (= alte) i-te Gleichung, d.h., es gilt $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ und

$$(a_{j1} + \alpha a_{i1})x_1 + (a_{j2} + \alpha a_{i2})x_2 + \ldots + (a_{jn} + \alpha a_{in})x_n = b_j + \alpha b_i.$$

Zieht man jetzt das α-fache der i-ten Gleichung von der neuen j-ten ab, so erhält man, dass die alte j-te Gleichung auch von x erfüllt wird. Damit ist jedes $x \in \mathbb{L}'$ auch Element von $\mathbb{L}$. Insgesamt also $\mathbb{L}' \subseteq \mathbb{L}$. Zusammen mit $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{L}'$ somit $\mathbb{L} = \mathbb{L}'$.
Bei Anwendung von (Z2) bzw. (Z3) wird offensichtlich $\mathbb{L}$ nicht verändert. □

Definition 4.9 (elementare Zeilenoperationen und Stufenform)
(Z1), (Z2) und (Z3) aus Satz 4.8 werden *elementare Zeilenoperationen* genannt. Hat ein LGS die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc}
x_{k_1} + & \ldots & & \ldots & + \, a_{1n}x_n & = b_1, \\
& x_{k_2} + & & \ldots & + \, a_{2n}x_n & = b_2, \\
& & \ddots & & \vdots & \vdots \\
& & & x_{k_r} + \;\ldots & + \, a_{rn}x_n & = b_r, \\
& & & & 0 & = b_{r+1}, \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & & & & 0 & = b_m,
\end{array}$$

mit $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$ so bezeichnen wir es als ein LGS *in Stufenform* (mit r Stufen) und die zugehörige Koeffizientenmatrix ebenfalls als *Matrix in Stufenform.*

Hat ein LGS Stufenform, dann enthält genau eine Gleichung die Unbekannte x_{k_1} und unter den restlichen $m-1$ Gleichungen genau eine x_{k_2}. Unter den restlichen $m-2$ Gleichungen ist wiederum genau eine, die x_{k_3} enthält usw. Diese Stufenform kann man immer mit Hilfe der elementaren Zeilenoperationen erreichen, egal welches LGS gegeben ist. Wir erläutern das zunächst an einem Beispiel.

Beispiel Wir betrachten das LGS über $\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & 4 \cdot x_2 & + & 2 \cdot x_3 & - & x_4 & = & 2, \\
2 \cdot x_1 & + & 8 \cdot x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3, \\
-x_1 & - & 4 \cdot x_2 & + & x_3 & & & = & -1, \\
-x_1 & - & 4 \cdot x_2 & + & x_3 & + & 2 \cdot x_4 & = & 2.
\end{array}$$

Wir eliminieren x_1 aus der zweite, dritten und vierten Gleichung mit Hilfe von (Z1), indem wir von der zweiten Gleichung das doppelte der ersten abziehen, und die erste Gleichung zur dritten und vierten addieren,

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 4\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & - & x_4 & = & 2, \\ & & & & -3\cdot x_3 & + & x_4 & = & -1, \\ & & & & 3\cdot x_3 & - & x_4 & = & 1, \\ & & & & 3\cdot x_3 & + & x_4 & = & 4. \end{array}$$

In den Gleichungen zwei bis vier tritt x_2 nicht auf. Also eliminieren wir mit (Z1) jetzt x_3, indem wir zur dritten und vierten Gleichung die zweite addieren,

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 4\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & - & x_4 & = & 2, \\ & & & & -3\cdot x_3 & + & x_4 & = & -1, \\ & & & & & & 0 & = & 0, \\ & & & & & & 2\cdot x_4 & = & 3. \end{array}$$

Jetzt werden noch zweite und vierte Zeile skaliert, sodass der Koeffizient von x_3 bzw. x_4 gleich 1 ist und dann werden Zeile drei und vier vertauscht. Auch diese Operationen sind elementare Zeilenoperationen, die die Lösungsgesamtheit nicht verändern. Wir bekommen dann also das LGS mit gleicher Lösungsmenge

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 4\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & - & x_4 & = & 2, \\ & & & & x_3 & - & \frac{1}{3}x_4 & = & \frac{1}{3}, \\ & & & & & & x_4 & = & \frac{3}{2}, \\ & & & & & & 0 & = & 0. \end{array}$$

Hiermit ist die Stufenform erreicht. Gleichung drei gibt $x_4 = \frac{3}{2}$. Substituiert man dieses in Gleichung zwei, gibt das $x_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$. Die Werte für x_3 und x_4 in Gleichung eins eingesetzt gibt mit etwas Rechnung

$$x_1 + 4 \cdot x_2 = \frac{11}{6}.$$

Man kann, um diese Gleichung zu erfüllen, x_2 beliebig wählen. x_1 ist dann festgelegt durch $x_1 = \frac{11}{6} - 4x_2$. Man bekommt also als Lösungsgesamtheit

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(A, b) &= \{(\tfrac{11}{6} - 4\alpha, \alpha, \tfrac{5}{6}, \tfrac{3}{2}) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\tfrac{11}{6}, 0, \tfrac{5}{6}, \tfrac{3}{2}) + \alpha(-4, 1, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Man erkennt hier die Darstellung der Lösungsgesamtheit nach Satz 4.7. Eine partikuläre Lösung ist $c = (\frac{11}{6}, 0, \frac{5}{6}, \frac{3}{2})$ und $\mathbb{L}(A, 0)$, die Menge der Lösungen des homogenen LGS, ist der von $(-4, 1, 0, 0)$ aufgespannte Raum.

Satz 4.10 (Gaußelimination)
Jedes lineare Gleichungssystem über einem Körper $I\!K$ kann mit elementaren Zeilenumformungen auf Stufenform gebracht werden.

Beweis Wenn in der ersten Gleichung x_1 nicht auftritt, d.h., der zugehörige Koeffizient ist 0, dann vertauscht man die erste Gleichung mit einer, die x_1 enthält. Geeignete Vielfache dieser Gleichung zieht man von den anderen Gleichungen ab, so dass nur die erste Gleichung x_1 enthält. Damit ist x_1 aus allen Gleichungen (bis auf die erste) eliminiert. Die Gleichungen ohne x_1 behandelt man analog, indem man die nächste in diesen Gleichungen auftretende Unbekannte in allen Gleichungen eliminiert bis auf eine Gleichung, die diese Unbekannte enthält. Diese Gleichung tauscht man dann an Position zwei. So fährt man fort, bis man r Gleichungen hat, die jeweils eine Unbekannte besitzen, die in den weiteren Gleichungen nicht auftritt, und in den restlichen Gleichungen keine Unbekannten mehr auftreten. $\square$

Satz 4.11 (Lösung eines LGS in Stufenform)
Wenn $(A \mid b)$ die erweiterte Matrix eines LGS in Stufenform mit r Stufen, m Gleichungen und n Unbekannten ist, dann hat das LGS

(i) keine Lösung wenn auf der rechten Seite $b_i \neq 0$ gilt für ein $i > r$,

(ii) genau eine Lösung, wenn $r = n$ gilt und $b_i = 0$ für $i = r + 1, \ldots, m$,

(iii) mehr als eine Lösung,wenn $r < n$ gilt und $b_i = 0$ für $i = r + 1, \ldots, m$.

Beweis Die Lösbarkeit ist genau dann gegeben, wenn $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$ gilt. Auf jeder der r Stufen wird genau eine Unbekannte festgelegt (durch die Werte der folgenden Unbekannten). Die restlichen $n - r$ Unbekannten sind frei wählbar aus $\mathbb{K}$. $\square$