technische universität dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller

Dortmund, im Dezember 2011

Lineare Algebra für Lehramt Gymnasien und Berufskolleg

Zusammenfassung der Abschnitte 4.3 und 4.4

4.3 Basis und Dimension

Im folgenden ist V immer ein $I\!K$-Vektorraum. Ein m-tupel $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}) \in V^m = V \times V \times \ldots \times V$ bezeichnen wir als *Vektorsystem (der Länge m).* Da wir zumeist statt $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m})$ nur die Menge $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}\}$ benötigen, schreiben wir das Vektorsystem als $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}$. Eine Linearkombination eines Vektorsystems ist

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \alpha_2 \cdot \mathbf{v_2} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v_m}$$

mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in I\!K$.

Definition 4.12 (Erzeugendensystem)
Ein Vektorsystem $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}$ von Vektoren aus V heißt *Erzeugendensystem* von V, wenn jedes $\mathbf{v} \in V$ Linearkombination von $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}$ ist, also $V = Lin\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}\}$.

Definition 4.13 (lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit)
Ein Vektorsystem $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}$ heißt *linear abhängig,* wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in I\!K$ existieren mit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ und

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \alpha_2 \cdot \mathbf{v_2} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v_m} = \mathbf{0}.$$

Andernfalls heißen $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}$ *linear unabhängig.*

Satz 4.14 (Eigenschaften linear unabhängiger Vektorsysteme)
Sind $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ linear unabhängig, dann gelten
(i) $\mathbf{0} \notin \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}\}$,
(ii) $\mathbf{v_i} \neq \mathbf{v_j}$ für $i \neq j$,
(iii) Für jedes $k \in \{1, \ldots, m\}$ gilt $\mathbf{v_k} \notin Lin\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{k-1}}, \mathbf{v_{k+1}}, \ldots, \mathbf{v_m}\}$,
(iv) Wenn $\{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_s}\} \subset \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}\}$ und $\mathbf{u_i} \neq \mathbf{u_j}$ für $i \neq j$, dann ist auch $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_s}$ ein linear unabhängiges Vektorsystem.

Beweis Zu (i):
Wenn $\mathbf{0} \in \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}\}$, etwa $\mathbf{0} = \mathbf{v_1}$, dann folgt

$$\mathbf{0} = 1 \cdot \mathbf{v_1} + 0 \cdot \mathbf{v_2} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{v_m},$$

also doch die lineare Abhängigkeit des Vektorsystems. Da das nach Voraussetzung nicht gilt, ist $\mathbf{0} \notin \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}\}$.
Zu (ii):
Wenn $\mathbf{v_i} = \mathbf{v_j}$ für zwei Indizes i, j mit $i \neq j$, etwa $\mathbf{v_1} = \mathbf{v_2}$, dann folgt

$$\mathbf{0} = 1 \cdot \mathbf{v_1} + (-1) \cdot \mathbf{v_2} + 0 \cdot \mathbf{v_3} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{v_m},$$

also doch die lineare Abhängigkeit des Vektorsystems. Da das nach Voraussetzung nicht gilt, gilt (ii).
Zu (iii):
Wenn $\mathbf{v_k} \in Lin\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{k-1}}, \mathbf{v_{k+1}}, \ldots, \mathbf{v_m}\}$, dann ist $\mathbf{v_k}$ Linearkombination der anderen $\mathbf{v_i}$, also

$$\mathbf{v_k} = \gamma_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \gamma_{k-1} \cdot \mathbf{v_{k-1}} + \gamma_{k+1} \cdot \mathbf{v_{k+1}} + \ldots + \gamma_m \cdot \mathbf{v_m}$$

mit $\gamma_i \in I\!\!K$. Es folgt mit $\gamma_k := -1$

$$\mathbf{0} = \gamma_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \gamma_k \cdot \mathbf{v_k} + \ldots + \gamma_m \cdot \mathbf{v_m},$$

im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$. Also gilt (iii).
Zu (iv):
$\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ sind paarweise verschieden nach (ii). Daher kann man o.B.d.A. annehmen, dass $\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1}, \ldots \mathbf{u_s} = \mathbf{v_s}$ gilt. Wenn dann $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_s}$ ein linear abhängiges Vektorsystem ist, dann gibt es $\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in I\!\!K$, nicht alle γ_i Null, mit

$$\mathbf{0} = \gamma_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \gamma_s \cdot \mathbf{v_s} + 0 \cdot \mathbf{v_{s+1}} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{v_m},$$

d.h. $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ ist doch linear abhängig im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist (iv) wahr. $\square$

Beispiel 1 Sei $I\!\!K = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$. Zu vorgegebenen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I\!\!K$ ist eine Polynomabbildung p des Höchstgrads n gegeben durch $p : I\!\!K \to I\!\!K,\ x \mapsto \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$. Die Menge $\mathcal{P}_n$ der Polynomabbildungen vom Höchstgrad n ist ein $I\!\!K$-Vektorraum. Die $n+1$ Polynome $m_k : I\!\!K \to I\!\!K, x \mapsto x^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, bilden ein Erzeugendensystem von $\mathcal{P}_n$. Sie sind linear unabhängig, weil sonst Skalare $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ existieren, die nicht alle Null sind und die

$$\gamma_0 m_0 + \gamma_1 m_1 + \ldots + \gamma_n m_n = 0$$

erfüllen. Ist k der größte Index, für den $\gamma_k \neq 0$, dann hat das Polynom $\gamma_0 m_0 + \gamma_1 m_1 + \ldots + \gamma_n m_n$ einerseits den Grad k, ist andererseits identisch

Null, also das Nullpolynom. Das ist ein Widerspruch, d.h., $m_0, \ldots, m_n$ sind linear unabhängig.
Beispiel 2 Die Einheitsvektoren $\mathbf{e_1} := (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e_2} := (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,$ $\mathbf{e_n} := (0, \ldots, 0, 1) \in I\!K^n$ sind linear unabhängig. (Sie bilden, wie schon gezeigt, ein Erzeugendensystem der $I\!K$-Vektorraums $I\!K^n$.)
Beispiel 3 Die Vektoren $\mathbf{v_1} := (1, 1, 0)$, $\mathbf{v_2} := (-1, 0, 2)$, $\mathbf{v_3} := (3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig, denn

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} = (0, 0, 0)$$

führt auf das LGS

$$\begin{array}{rrrr} 1 \cdot \alpha + & (-1) \cdot \beta + & 3 \cdot \gamma = & 0, \\ 1 \cdot \alpha + & 0 \cdot \beta + & 2 \cdot \gamma = & 0, \\ 0 \cdot \alpha + & 2 \cdot \beta + & 1 \cdot \gamma = & 0. \end{array}$$

Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung gibt

$$\begin{array}{rrrr} 1 \cdot \alpha + & (-1) \cdot \beta + & 3 \cdot \gamma = & 0, \\ 0 \cdot \alpha + & 1 \cdot \beta + & (-1) \cdot \gamma = & 0, \\ 0 \cdot \alpha + & 2 \cdot \beta + & 1 \cdot \gamma = & 0. \end{array}$$

Zieht man jetzt das zweifache der zweiten von der dritten Gleichung ab und teilt die neue dritte Gleichung durch 3, bekommt man die Stufenform

$$\begin{array}{rrrr} 1 \cdot \alpha + & (-1) \cdot \beta + & 3 \cdot \gamma = & 0, \\ 0 \cdot \alpha + & 1 \cdot \beta + & (-1) \cdot \gamma = & 0, \\ 0 \cdot \alpha + & 0 \cdot \beta + & 1 \cdot \gamma = & 0. \end{array}$$

Einzige Lösung ist $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Damit ist $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ ein linear unabhängiges Vektorsystem.

Am Beispiel 3 erkennt man, dass es praktisch ist, die Vektoren des $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren zu notieren. Beim LGS zur Feststellung ihrer linearen Unabhängigkeit oder Abhängigkeit bilden sie dann die Spalten der Koeffizientenmatrix.

Definition 4.15 (Basen)
Ist das Vektorsystem $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ ein Erzeugendensystem von V und ist es linear unabhängig, dann nennt man $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ *Basis* von V.

Satz 4.16 (Eindeutige Linearkombinationen)
Ist $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ ein Erzeugendensystem von V, dann hat jedes $\mathbf{v} \in V$ genau dann eine Darstellung als Linearkombination von $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v_m}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in I\!K$, wenn $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ eine Basis von V ist.

Beweis Hat ein $\mathbf{v} \in V$ zwei verschiedene Darstellungen

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v_m} \text{ und } \mathbf{v} = \beta_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \beta_m \cdot \mathbf{v_m},$$

also $(\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_m - \beta_m) \neq (0, \ldots, 0)$, dann folgt

$$\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = (\alpha_1 - \beta_1) \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + (\alpha_m - \beta_m) \cdot \mathbf{v_m}.$$

Das bedeutet, dass $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ linear abhängig, insbesondere keine Basis ist. Hat umgekehrt jedes $\mathbf{v} \in V$ nur eine Darstellung als Linearkombination, dann gilt das insbesondere für den Vektor $\mathbf{v} = \mathbf{0} \in V$; außer

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{v_m}$$

hat $\mathbf{0}$ keine Darstellung $\mathbf{0} = \alpha_1 \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \mathbf{v_m}$ mit einem/einigen von Null verschiedenen α_i, d.h., $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ ist linear unabhängig. □

Wir wollen jetzt zeigen, dass in $I\!K^m$ jede Basis aus genau m Elementen besteht. Das tun wir, indem wir zuerst zeigen, dass Erzeugendensysteme des $I\!K^m$ Vektorsysteme der Mindestlänge m sind, und dann, dass linear unabhängige Vektorsysteme aus höchstens m Vektoren bestehen.

Lemma 4.17 (Mindestlänge von Erzeugendensystemen im $I\!K^m$)
Ist $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}$ ein Vektorsystem im $I\!K^m$ mit $s < m$, dann ist $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}$ kein Erzeugendensystem des $I\!K^m$.

Beweis Wir nehmen an, dass $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}$ Erzeugendensystem des $I\!K^m$ mit $s < m$ ist. Dann ist jedes $\mathbf{b} \in I\!K^m$ Linearkombination von $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}$. Wir schreiben die $\mathbf{v_i}$ und $\mathbf{b}$ als Spaltenvektoren,

$$\mathbf{v_i} =: \begin{pmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ \vdots \\ v_{mi} \end{pmatrix}, \; i = 1, \ldots, s, \quad \mathbf{b} =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Für beliebiges $\mathbf{b} \in I\!K^m$ ist dann das LGS

$$\begin{array}{ccccc} v_{11} \cdot x_1 & +v_{12} \cdot x_2 & \ldots & +v_{1s} \cdot x_s & = b_1, \\ v_{21} \cdot x_1 & +v_{22} \cdot x_2 & \ldots & +v_{2s} \cdot x_s & = b_2, \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{m1} \cdot x_1 & +v_{m2} \cdot x_2 & \ldots & +v_{ms} \cdot x_s & = b_m \end{array} \tag{1}$$

lösbar, denn genau dann wenn $(x_1, \ldots, x_s)$ Lösung ist, ist $\mathbf{b}$ die Linearkombination $\mathbf{b} = x_1 \cdot \mathbf{v_1} + x_2 \cdot \mathbf{v_2} + \ldots + x_s \cdot \mathbf{v_s}$. Wegen $s < m$ hat aber die Stufenform keine m Stufen, d.h., es gibt beim LGS in Stufenform Vektoren $\mathbf{b}'$ der rechten Seite, für die das LGS keine Lösung besitzt. Wir nehmen jetzt ein solches $\mathbf{b}'$ und bringen mit elementaren Zeilenumformungen das Gleichungssystem in Stufenform wieder zurück auf die Gestalt (1), indem wir die Umformungen die auf die Stufenform führten wieder rückgängig machen. Hierbei bekommen wir eine rechte Seite $\mathbf{b}$ in (1), so dass das LGS (1) nicht lösbar ist. (Bei elementaren Zeilenumformungen bleibt ja die Lösungsmenge unverändert!) Nach Voraussetzung muss aber (1) für beliebige rechte Seiten lösbar sein. Die Voraussetzung ist also falsch und daher $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}$ kein Erzeugendensystem von $I\!\!K^m$. $\square$

Lemma 4.18 (Höchstlänge von lin. unabh. Vektorsystemen im $I\!\!K^m$)
Ist $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}$ ein Vektorsystem im $I\!\!K^m$ mit $s > m$, dann ist $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}$ linear abhängig.

Beweis Wir schreiben die $\mathbf{v_i}$ wieder als Spaltenvektoren

$$\mathbf{v_i} =: \begin{pmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ \vdots \\ v_{mi} \end{pmatrix}, \ i = 1, \ldots, s.$$

Das LGS

$$\begin{array}{llllll} v_{11} \cdot x_1 & +v_{12} \cdot x_2 & \ldots & +v_{1s} \cdot x_s & = 0, \\ v_{21} \cdot x_1 & +v_{22} \cdot x_2 & \ldots & +v_{2s} \cdot x_s & = 0, \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{m1} \cdot x_1 & +v_{m2} \cdot x_2 & \ldots & +v_{ms} \cdot x_s & = 0 \end{array} \qquad (2)$$

hat eine Lösung $(x_1, \ldots, x_s)$ genau dann, wenn $\mathbf{0} = x_1 \cdot \mathbf{v_1} + x_2 \cdot \mathbf{v_2} + \ldots + x_s \cdot \mathbf{v_s}$. Eine Lösung ist $(0, 0, \ldots, 0)$. Weil $s > m$ gilt, hat (2), auf Stufenform gebracht, mehr als eine Lösung. Damit hat auch (2) mehr als eine Lösung, d.h., die Spaltenvektoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}$ sind linear abhängig. $\square$

Satz 4.19 Jede Basis des $I\!\!K$-Vektorraums $I\!\!K^m$ hat die Länge m.

Beweis Eine Basis des $I\!\!K^m$ ist Erzeugendensystem und linear unabhängiges Vektorsystem. Nach Lemma 4.17 hat es daher mindestens die Länge m und nach Lemma 4.18 höchstens die Länge m. $\square$

Satz 4.20 (Vom Erzeugendensystem zur Basis)
Hat V ein endliches Erzeugendensystem $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}$, dann gibt es eine Teilmenge $\{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_m}\} \subseteq \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}\}$ so dass $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_m}$ Basis von V ist.

Beweis Wenn $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}$ linear unabhängig ist, können wir dieses Vektorsystem als Basis nehmen. Sonst gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{K}$, nicht alle α_i Null, so dass

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_s \cdot \mathbf{v_s} = \mathbf{0}.$$

Sei o.B.d.A. $\alpha_s \neq 0$. Dann folgt

$$\mathbf{v_s} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_s} \cdot \mathbf{v_1} - \ldots - \frac{\alpha_{s-1}}{\alpha_s} \cdot \mathbf{v_{s-1}}.$$

Jedes $\mathbf{v} \in V = Lin\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}\}$ ist also darstellbar als

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \gamma_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \gamma_s \mathbf{v_s} \\ &= \gamma_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \gamma_{s-1}\mathbf{v_{s-1}} + \gamma_s\left(-\tfrac{\alpha_1}{\alpha_s} \cdot \mathbf{v_1} - \ldots - \tfrac{\alpha_{s-1}}{\alpha_s} \cdot \mathbf{v_{s-1}}\right) \\ &= \left(\gamma_1 - \gamma_s\tfrac{\alpha_1}{\alpha_s}\right) \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \left(\gamma_{s-1} - \gamma_s\tfrac{\alpha_{s-1}}{\alpha_s}\right) \cdot \mathbf{v_{s-1}}, \end{aligned}$$

also $\mathbf{v} \in Lin\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{s-1}}\}$. Somit ist auch $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{s-1}}$ ein Erzeugendensystem von V. Wenn es noch nicht linear unabhängig ist, können wir genauso einen Vektor daraus streichen und erhalten wieder ein Erzeugendensystem von V u.s.w. Dieses Vorgehen endet, sobald ein Erzeugendensystem linear unabhängig, also Basis von V, ist. □

Satz 4.21 (Basisergänzungssatz)
Sind $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m} \in V$ linear unabhängig und sind $\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_s}$ weitere Vektoren, so dass

$$V = Lin\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}, \mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_s}\},$$

dann kann man $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ durch Hinzunahme einiger der $\mathbf{w_i}$ zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}, \mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_s}$ ist ein Erzeugendensystem von V. Ist es linear unabhängig, dann sind wir fertig. Wenn es linear abhängig ist, gibt es eine nicht-triviale Linearkombination von $\mathbf{0} \in V$,

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v_m} + \beta_1 \cdot \mathbf{w_1} + \ldots + \beta_s \cdot \mathbf{w_s} = \mathbf{0}.$$

Dabei ist mindestens ein β_i nicht Null, weil sonst mindestens ein α_i von Null verschieden wäre und $\mathbf{0} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v_m}$ gälte, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$. Wie im Beweis von Satz 4.20 kann man dann ein $\mathbf{w_i}$ mit $\beta_i \neq 0$ streichen und dann dieselbe Überlegung für dieses um ein Element verkleinerte Erzeugendensystem anwenden u.s.w. Man streicht solange Elemente $\mathbf{w_i}$ heraus, bis das verbleibende Vektorsystem linear unabhängig ist. □

Im folgenden werden wir Eigenschaften, die wir im Vektorraum $\mathbb{K}^m$ gefunden haben, auf allgemeinere $\mathbb{K}$-Vektorräume übertragen. Dabei müssen wir uns auf Vektorräume beschränken, die ein endliches Erzeugendensystem besitzen, sogenannte *endlich erzeugte Vektorräume*. (Es gibt $I\!K$-Vektorräume, die kein endliches Erzeugendensystem besitzen. Das gilt z.B. für den $I\!K$-Vektorraum $Abb(M, I\!K)$ und auch für seinen Untervektorraum $\nu_0 := \{f \in Abb(M, I\!K) \mid f(x) \neq 0$ für nur endlich viele $x \in M\}$, sofern M nicht endlich ist. Allein einen geeigneten Basisbegriff zu finden in Vektorräumen ohne ein endliches Erzeugendensystem, ist schon schwierig und führt über den behandelbaren Stoff für Erstsemester hinaus.)

Satz 4.22 (Basissatz)
Ist V ein endlich erzeugter $I\!K$-Vektorraum, dann besitzt V eine Basis. Alle Basen von V haben die gleiche Länge.

Der erste Teil des Beweises (V hat eine Basis) folgt aus Satz 4.20. Der vollständige Beweis erfordert Hilfsmittel, die wir erst bereitstellen müssen.

Definition 4.23 (lineare Abbildung)
Seien V und W zwei $I\!K$-Vektorräume. Eine Abbildung $\Phi : V \to W$ mit

$$\begin{array}{ll} \Phi(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = \Phi(\mathbf{v_1}) + \Phi(\mathbf{v_2}) & \text{für alle } \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in V \\ \Phi(\alpha \cdot \mathbf{v}) = \alpha \cdot \Phi(\mathbf{v}) & \text{für alle } \mathbf{v} \in V, \alpha \in I\!K \end{array}$$

heißt *lineare Abbildung* (oder *$I\!K$-Vektorraumhomomorphismus*).

Betrachten wir beispielsweise einen $I\!K$-Vektorraum V und ein Vektorsystem $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ aus V. Die Abbildung

$$\Phi : I\!K^m \to V,\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \mapsto \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v_m}$$

ist linear, wie man leicht sieht.
Φ ist *surjektiv*, wenn $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ Erzeugendensystem von V ist, denn

$$\mathbf{v} \in V \ \Rightarrow \ \exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in I\!K^m : \mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v_m} = \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m).$$

Φ ist *injektiv*, wenn $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ linear unabhängig ist, denn bei linearer Unabhängigkeit sind die Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ in der Darstellung $\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v_m}$ eindeutig bestimmt (Satz 4.16), also gibt es zu $\mathbf{v}$ nur ein $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ mit $\mathbf{v} = \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.
Die Abbildung Φ ist also eine bijektive Abbildung, wenn $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ eine Basis von V ist. Sie ist als lineare Abbildung dann ein ($I\!K-$Vektorraum-) Isomorphismus.

Lemma 4.24
Ist $\Phi : I\!K^m \to I\!K^n$ ein Isomorphismus, dann gilt $n = m$.

Beweis Sei $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_m}$ eine Basis des $I\!K^m$. (Die Basislänge ist m nach Satz 4.19.) Dann folgt für beliebige $\mathbf{w} \in I\!K^n$, weil Φ surjektiv ist,

$$\mathbf{w} = \Phi(v) = \Phi(\alpha_1 \cdot \mathbf{e_1} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{e_m}) = \alpha_1 \cdot \Phi(\mathbf{e_1}) + \ldots + \alpha_m \cdot \Phi(\mathbf{e_m}).$$

$\mathbf{w}$ ist also Linearkombination von $\Phi(\mathbf{e_1}), \ldots, \Phi(\mathbf{e_m})$ Mit anderen Worten, $\Phi(\mathbf{e_1}), \ldots, \Phi(\mathbf{e_m})$ ist Erzeugendensystem von $I\!K^n$. Es folgt $m \geq n$ mit Lemma 4.17. Die Umkehrabbildung Φ^{-1} ist ebenfalls ein Isomorphismus. Mit ihm zeigt man, dass $\Phi^{-1}(\mathbf{w_1}), \ldots, \Phi^{-1}(\mathbf{w_n})$ ein Erzeugendensystem von $I\!K^m$ ist, wenn $\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_n}$ Basis von $I\!K^n$. Mit Lemma 4.17 also $n \geq m$. Zusammen daher $m = n$. □

Beweis (von Satz 4.22) Als endlich erzeugter $I\!K$-Vektorraum besitzt V Basen (Satz 4.20). Seien $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ und $\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_n}$ zwei Basen von V. Zu zeigen ist $n = m$. Betrachte dazu

$$\begin{aligned} \Phi_m : I\!K^m \to V, &\quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \mapsto \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v_m}, \\ \Phi_n : I\!K^n \to V, &\quad (\beta_1, \ldots, \beta_n) \mapsto \beta_1 \cdot \mathbf{w_1} + \ldots + \beta_n \cdot \mathbf{w_n}. \end{aligned}$$

Φ_m und Φ_n sind bijektive (und lineare) Abbildungen, weil $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ und $\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_n}$ Basen sind. Φ_m und Φ_n sind also Isomorphismen. Damit ist auch Φ_n^{-1} und insbesondere $\Phi_n^{-1} \circ \Phi_m : I\!K^m \to I\!K^n$ ein Isomorphismus. Aus Lemma 4.24 folgt $m = n$. □

Definition 4.25 (Dimension)
Sei V ein Vektorraum mit einer Basis der Länge m. Dann hat V *die Dimension* m, kurz: $dim(V) = m$.

Diese Definition ist widerspruchsfrei, d.h., jeder endlich erzeugte Vektorraum hat eine wohlbestimmte Dimension nach Satz 4.22. Der Dimensionsbegriff deckt sich mit dem anschaulichen Dimensionsbegriff im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$. Dort hat ein Vektorraum die Dimension 1, wenn er eine Gerade ist, also eine Basis der Länge 1 besitzt, und die Dimension 2, wenn er eine Ebene ist, also von zwei linear unabhängigen Vektoren erzeugt wird.

Satz 4.26 (Isomorphe Bilder von $I\!K^m$)
Ist V ein $I\!K$-Vektorraum der Dimension m, dann und nur dann ist V isomorph zu $I\!K^m$.

Beweis Man zeigt, wenn $\Phi : I\!K^m \to V$ eine isomorphe Abbildung ist und $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_m}$ eine Basis von $I\!K^m$, dass dann $\Phi(\mathbf{e_1}), \ldots, \Phi(\mathbf{e_m})$ eine Basis von V ist. Ist umgekehrt V ein $I\!K$-Vektorraum mit Basis $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$, dann ist

$$\Phi : I\!K^m \to V, \ (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \mapsto \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v_m}$$

eine isomorphe Abbildung. □

Korollar 4.27
Sei V ein n-dimensionaler $I\!\!K$-Vektorraum. Dann gelten
i) Wenn $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ Erzeugendensystem von V, dann $m \geq n$.
ii) Wenn $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ linear unabhängig und in V, dann $m \leq n$.
iii) Wenn $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ Erzeugendensystem von V, dann ist es Basis von V; wenn $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ linear unabhängig und in V, dann ist es Basis von V.
iv) Wenn U Untervektorraum von V, dann $dim(U) \leq dim(V)$.
v) Wenn U Untervektorraum von V und $dim(U) = dim(V)$, dann $U = V$.

Beweis Sei $\Phi : V \to I\!\!K^n$ ein (nach Satz 4.26 existierender) Isomorphismus.
Zu i) : Ist $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ Erzeugendensystem von V, dann ist $\Phi(\mathbf{v_1}), \ldots, \Phi(\mathbf{v_m})$ Erzeugendensystem von $I\!\!K^n$. Nach Lemma 4.17 folgt $n \leq m$.
Zu ii) : Ist $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ lin. unabh. und in V, dann ist $\Phi(\mathbf{v_1}), \ldots, \Phi(\mathbf{v_m})$ lin. unabh. und in $I\!\!K^n$. Nach Lemma 4.18 folgt $m \leq n$.
Zu iii) : Ist $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ ein Erzeugendensystem von V, dann ist eine Teilmenge davon Basis. Nach dem Basissatz kann keine echte Teilmenge Basis sein. Also ist $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ selbst schon Basis. Ist $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ linear unabhängig und in V, dann kann man dieses Vektorsystem zu einer Basis von V ergänzen. Weil ein linear unabhängiges Vektorsystem höchstens die Länge n hat, ist $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ bereits Basis.
Zu iv) : Ist $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$ Basis von U, dann kann man dieses Vektorsystem zu einer Basis von V ergänzen. Es folgt $dim(U) = k \leq n = dim(V)$.
Zu v) : Wie in iv), nur dass man schon mit den $n = dim(V)$ Basiselementen von U auskommt, so dass U und V dieselbe Basis besitzen. $\square$

Definition und Satz 4.28 (Kern)
Der *Kern einer linearen Abbildung* $\Phi : V \to W$ ist definiert als

$$Kern\ \Phi := \{\mathbf{v} \in V \mid \Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}.$$

$Kern\ \Phi$ ist ein Untervektorraum von V.

Beweis. Die Definition des Kerns gibt $Kern\ \Phi \subseteq V$.
Wegen $\Phi(\mathbf{0}) = \Phi(0 \cdot \mathbf{v}) = 0 \cdot \Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ ist $\mathbf{0} \in Kern\ \Phi$. Wenn $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in Kern\ \Phi$, also $\Phi(\mathbf{v_1}) = \Phi(\mathbf{v_2}) = \mathbf{0}$, folgt $\Phi(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = \Phi(\mathbf{v_1}) + \Phi(\mathbf{v_2}) = \mathbf{0}$, also $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} \in Kern\ \Phi$. Aus $\mathbf{v_1} \in Kern\ \Phi$, $\alpha \in I\!\!K$ folgt $\Phi(\alpha \cdot \mathbf{v_1}) = \alpha \cdot \Phi(\mathbf{v_1}) = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, d.h., $\alpha \cdot \mathbf{v_1} \in Kern\ \Phi$ wenn $\mathbf{v_1} \in Kern\ \Phi$. $\square$

Satz 4.29 (Dimension von Bild und Kern)
Sind V und W $I\!\!K$-Vektorräume, V endlich erzeugt und $\Phi : V \to W$ lineare Abbildung, dann gilt

$$dim(V) = dim(Kern\ \Phi) + dim(Bild\ \Phi).$$

Beweis $Bild\ \Phi$ ist ein $I\!\!K$-Vektorraum, denn mit $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in Bild\ \Phi$, also mit $\exists \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in V : \mathbf{w_1} = \Phi(\mathbf{v_1}), \mathbf{w_2} = \Phi(\mathbf{v_2})$, ist $\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2} = \Phi(\mathbf{v_1}) + \Phi(\mathbf{v_2}) =$

$\Phi(\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}) \in Bild\ \Phi$. Und wenn $\mathbf{w} = \Phi(\mathbf{v}),\ \alpha \in I\!\!K$, dann $\alpha \cdot \mathbf{w} = \Phi(\alpha \cdot \mathbf{v}) \in Bild\ \Phi$. Für $\alpha = 0$ folgt $\mathbf{0} \in Bild\ \Phi$.
$Bild\ \Phi$ ist endlich erzeugt, denn wenn $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ ein Erzeugendensystem von V ist (es existiert, weil V endlich erzeugt ist), dann gilt für jedes $\mathbf{w} \in Bild\ \Phi$ mit $\mathbf{w} = \Phi(\mathbf{v})$

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v_m} \Rightarrow \mathbf{w} = \Phi(\mathbf{v}) = \alpha_1 \cdot \Phi(\mathbf{v_1}) + \ldots + \alpha_m \cdot \Phi(\mathbf{v_m}).$$

Damit ist $\Phi(\mathbf{v_1}), \ldots, \Phi(\mathbf{v_m})$ ein Erzeugendensystem von $Bild\ \Phi$.
$Bild\ \Phi$ hat also eine Basis $\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_s}$. Zu jedem $\mathbf{w_i}$ gibt es ein $\mathbf{z_i} \in V$ mit $\mathbf{w_i} = \Phi(\mathbf{z_i})$. Ist $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_r}$ eine Basis von $Kern\ \Phi$, dann brauchen wir nur noch zu zeigen, dass

$$\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_r}, \mathbf{z_1}, \ldots, \mathbf{z_s}$$

eine Basis von V ist. Dann gilt nämlich die Behauptung des Satzes

$$dim(V) = r + s = dim(Kern\ \Phi) + dim(Bild\ \Phi).$$

$\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_r}, \mathbf{z_1}, \ldots, \mathbf{z_s}$ sind linear unabhängig, denn gilt

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \cdot \mathbf{u_1} + \ldots + \alpha_r \cdot \mathbf{u_r} + \beta_1 \cdot \mathbf{z_1} + \ldots + \beta_s \cdot \mathbf{z_s},$$

dann gibt Φ auf beide Seiten der Gleichung angewendet und $\Phi(\mathbf{u_i}) = \mathbf{0}$ ausgenutzt,

$$\mathbf{0} = \beta_1 \cdot \Phi(\mathbf{z_1}) + \ldots + \beta_s \cdot \Phi(\mathbf{z_s}) = \beta_1 \cdot \mathbf{w_1} + \ldots + \beta_s \cdot \mathbf{w_s}.$$

Weil $\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_s}$ linear unabhängig sind, folgt $\beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$ und damit

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \cdot \mathbf{u_1} + \ldots + \alpha_r \cdot \mathbf{u_r}.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der $\mathbf{u_i}$ folgt, dass auch $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$ gilt. $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_r}, \mathbf{z_1}, \ldots, \mathbf{z_s}$ sind damit linear unabhängig.
Sie bilden auch ein Erzeugendensystem von V, denn für beliebiges $\mathbf{v} \in V$ gilt $\Phi(\mathbf{v}) \in Bild\ \Phi$, also

$$\Phi(\mathbf{v}) = \beta_1\mathbf{w_1} + \ldots + \beta_s\mathbf{w_s}.$$

Der Vektor $\mathbf{u} := \mathbf{v} - \beta_1\mathbf{z_1} - \ldots - \beta_s\mathbf{z_s}$ erfüllt

$$\Phi(\mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{v}) - \beta_1\Phi(\mathbf{z_1}) - \ldots - \beta_s\Phi(\mathbf{z_s}) = \Phi(\mathbf{v}) - \beta_1\mathbf{w_1} - \ldots - \beta_s\mathbf{w_s} = \mathbf{0}.$$

Daher gilt $\mathbf{u} \in Kern\ \Phi$. Weil $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_r}$ eine Basis von $Kern\ \Phi$ ist, folgt $\mathbf{u} = \gamma_1\mathbf{u_1} + \ldots + \gamma_r\mathbf{u_r}$ und damit endlich

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \beta_1\mathbf{z_1} + \ldots + \beta_s\mathbf{z_s} = \gamma_1\mathbf{u_1} + \ldots + \gamma_r\mathbf{u_r} + \beta_1\mathbf{z_1} + \ldots + \beta_s\mathbf{z_s}.$$

$\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_r}, \mathbf{z_1}, \ldots, \mathbf{z_s}$ ist also auch Erzeugendensystem von V und damit Basis von V. $\square$

Sind U_1 und U_2 Untervektorräume eines Vektorraums V, dann ist auch

$$U_1 + U_2 := \{\mathbf{v} \in V \mid \exists \mathbf{u_1} \in U_1, \mathbf{u_2} \in U_2 : \mathbf{v} = \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}\}$$

ein Untervektorraum von V, und zwar ist es der kleinste Untervektorraum, der U_1 und U_2 enthält. Dagegen ist $U_1 \cap U_2$ der größte Untervektorraum von V, der sowohl in U_1 als auch in U_2 enthalten ist.

Satz 4.30 (Dimensionsformel für Summen von Untervektorräumen)
Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum, U_1 und U_2 Untervektorräume von V. Dann gilt

$$dim(U_1) + dim(U_2) = dim(U_1 + U_2) + dim(U_1 \cap U_2).$$

Beweis Sei $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k}$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$. Weil $U_1 \cap U_2$ Untervektorraum von U_1 und von U_2 ist, kann man die Basis von $U_1 \cap U_2$ mit dem Basisergänzungssatz sowohl zu einer Basis von U_1 als auch zu einer von U_2 ergänzen. Sei also

$$\begin{array}{ll} \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s} & \text{Basis von } U_1, \\ \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k}, \mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_t} & \text{Basis von } U_2. \end{array}$$

Also $dim(U_1) = k + s$ und $dim(U_2) = k + t$. Diese Formeln gelten auch im Fall $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ (mit $k = 0$), im Fall $U_1 \cap U_2 = U_1$ (mit $s = 0$) und im Fall $U_1 \cap U_2 = U_2$ (mit $t = 0$).
Wenn wir zeigen, dass

$$\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}, \mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_t} \quad \text{Basis von } U_1 + U_2 \tag{3}$$

ist, dann folgt

$$\begin{aligned} dim(U_1) + dim(U_2) &= k + s + k + t = dim(U_1 \cap U_2) + k + s + t \\ &= dim(U_1 + U_2) + dim(U_1 \cap U_2). \end{aligned}$$

Es reicht also, (3) zu zeigen.
<u>Zur linearen Unabhängigkeit von $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}, \mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_t}$:</u>
Betrachte

$$\alpha_1 \mathbf{u_1} + \ldots + \alpha_k \mathbf{u_k} + \beta_1 \mathbf{v_1} + \ldots + \beta_s \mathbf{v_s} + \gamma_1 \mathbf{w_1} + \ldots + \gamma_t \mathbf{w_t} = \mathbf{0}.$$

Zu zeigen ist, dass alle α_i, β_i und γ_i Null sind. Der Vektor

$$\mathbf{w} := \gamma_1 \mathbf{w_1} + \ldots + \gamma_t \mathbf{w_t}$$

liegt in U_2. Andererseits hat er die Darstellung

$$\mathbf{w} = -\alpha_1 \mathbf{u_1} - \ldots - \alpha_k \mathbf{u_k} - \beta_1 \mathbf{v_1} - \ldots - \beta_s \mathbf{v_s}.$$

Er liegt also auch in U_1. Damit liegt er in $U_1 \cap U_2$ und hat eine Darstellung

$$\mathbf{w} = \delta_1 \mathbf{u_1} + \ldots + \delta_k \mathbf{u_k}.$$

Als Vektor in U_2 hat er damit zwei verschiedene Darstellungen mit der Basis $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k}, \mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_t}$ von U_2,

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \delta_1 \cdot \mathbf{u_1} + \ldots + \delta_k \cdot \mathbf{u_k} & +0 \cdot \mathbf{w_1} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{w_t} \\ &= 0 \cdot \mathbf{u_1} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{u_k} & +\gamma_1 \cdot \mathbf{w_1} + \ldots + \gamma_t \cdot \mathbf{w_t} \end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit der Darstellung von $\mathbf{w}$ als Linearkombination der Basiselemente folgt $\delta_1 = \ldots = \delta_k = \gamma_1 = \ldots = \gamma_t = 0$ und insbesondere $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Es verbleibt

$$\beta_1 \mathbf{v_1} + \ldots + \beta_s \mathbf{v_s} = \mathbf{0}.$$

Weil die $\mathbf{v_i}$ (als Elemente der Basis von U_1) linear unabhängig sind, folgt auch $\beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit von $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k}$, $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}$, $\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_t}$ gezeigt.
Erzeugendensystem:
Jedes $\mathbf{v} \in U_1 + U_2$ hat eine Darstellung $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ mit $\mathbf{x} \in U_1$ und $\mathbf{y} \in U_2$. Mit den Basen von U_1 und U_2 also

$$\begin{aligned} & \mathbf{x} = && \alpha_1 \mathbf{u_1} + \ldots + \alpha_k \mathbf{u_k} + \beta_1 \mathbf{v_1} + \ldots + \beta_s \mathbf{v_s}, \\ & \mathbf{y} = && \gamma_1 \mathbf{u_1} + \ldots + \gamma_k \mathbf{u_k} + \delta_1 \mathbf{w_1} + \ldots + \delta_t \mathbf{w_t}, \\ \Rightarrow \quad & \mathbf{v} = && (\alpha_1 + \gamma_1) \mathbf{u_1} + \ldots + (\alpha_k + \gamma_k) \mathbf{u_k} + \beta_1 \mathbf{v_1} + \ldots + \beta_s \mathbf{v_s} \\ & && + \delta_1 \mathbf{w_1} + \ldots + \delta_t \mathbf{w_t}. \end{aligned}$$

Damit ist $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}, \mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_t}$ auch ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$. $\square$

Definition 4.31 (direkte Summe und Komplement)
Ein Vektorraum V heißt *direkte Summe* zweier Untervektorräume U_1 und U_2, wenn $V = U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$ gilt. In diesem Fall heißt U_2 *Komplement zu* U_1 in V oder *komplementärer Untervektorraum zu* U_1 in V. Man schreibt dann $V = U_1 \bigoplus U_2$.

Korollar 4.32
Sind U_1 und U_2 Untervektorräume eines endlich erzeugten Vektorraums V, dann gelten folgende zwei Aussagen.
i) Wenn $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$, dann $dim(U_1 \bigoplus U_2) = dim(U_1) + dim(U_2)$.
ii) Wenn $dim(V) = dim(U_1) + dim(U_2)$, dann ist $V = U_1 \bigoplus U_2$, falls $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$ oder $V = U_1 + U_2$.

Beweis Zu i): U_1 und U_2 sind Untervektorräume von $U_1 + U_2$. Aus Satz 4.30 mit $V := U_1 + U_2$ folgt die Behauptung.
Zu ii): Nach Satz 4.30 ist $dim(U_1 + U_2) = dim(U_2) + dim(U_2)$ äquivalent zu

$dim(U_1 \cap U_2) = 0$, also zu $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$. Somit gilt: Wenn $V = U_1 + U_2$ und $dim(V) = dim(U_2) + dim(U_2)$, dann $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$, d.h., $V = U_1 \bigoplus U_2$, und wenn $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$, dann $dim(U_1 + U_2) = dim(U_2) + dim(U_2) = dim(V)$ und deshalb $V = U_1 + U_2$ (weil V gleiche Dimension hat wie sein Untervektorraum $U_1 + U_2$), d.h., $V = U_1 \bigoplus U_2$. □

Ist V ein endlich erzeugter Vektorraum, dann kann man zu jedem Untervektorraum U von V einen komplementären Untervektorraum konstruieren. Dazu braucht man den Basisergänzungssatz. Hat man nämlich eine Basis $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ von U durch Vektoren $\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_s}$ zu einer Basis von V ergänzt, dann ist

$$W := Lin\{\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_s}\}$$

Komplement zu U, denn $U + W = V$, weil die Vereinigung der Basen von U und W nach Konstruktion eine Basis von V ergeben und weil aus $\mathbf{v} \in U \cap W$ folgt $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \mathbf{v_m}$ und $\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{w_1} + \ldots + \beta_s \mathbf{w_s}$, zusammen also

$$\alpha_1 \mathbf{v_1} + \ldots + \alpha_m \mathbf{v_m} - \beta_1 \mathbf{w_1} - \ldots - \beta_s \mathbf{w_s} = \mathbf{0}.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}, \mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_s}$ ergibt sich jedoch $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$ (und $\beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$), also $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.