technische universität dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko
Dipl.-Wirt.-Math. Tobias Springer

Dortmund, den 26. 10. 2011

Lineare Algebra für Lehramt Gymnasien und Berufskolleg

Musterlösung zu Aufgabe 6

Eine der de-Morganschen Regeln laut Vorlesung ist

$$\complement(M \cap N) = \complement M \cup \complement N \quad \text{für alle} \quad M, N \subseteq \Omega.$$

Die entsprechende de-Morgansche Regel laut der Vorlesung des vergangenen Wintersemesters war

$$L \setminus (M \cap N) = (L \setminus M) \cup (L \setminus N) \quad \text{für alle} \quad L, M, N \subseteq \Omega.$$

In dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass diese beiden Regeln äquivalent sind.

Setzt man in der letztgenannten Regel $L = \Omega$,

$$\Omega \setminus (M \cap N) = (\Omega \setminus M) \cup (\Omega \setminus N) \quad \text{für alle} \quad M, N \subseteq \Omega,$$

so folgt aus der Definition des Komplements sofort die erstgenannte Regel.

Gilt die erstgenannte Regel, dann folgt für beliebige $L \subseteq \Omega$

$$L \cap \complement(M \cap N) = L \cap \big(\complement M \cup \complement N\big) \quad \text{für alle} \quad L, M, N \subseteq \Omega.$$

Mit einer der beiden Distributivregeln (R4) also

$$L \cap \complement(M \cap N) = \big(L \cap \complement M\big) \cup \big(L \cap \complement N\big) \quad \text{für alle} \quad L, M, N \subseteq \Omega.$$

Wegen

$$L \cap (\complement M) = \{x \in L \mid x \notin M\} = L \setminus M$$

für beliebige Teilmengen L, M von Ω folgt daher weiter

$$L \setminus (M \cap N) = (L \setminus M) \cup (L \setminus N) \quad \text{für alle} \quad L, M, N \subseteq \Omega.$$

Das ist die de-Morgansche Regel des vergangenen Wintersemesters.