Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler

Wintersemester 2011/12

23.11.2011

Wavelet-Analysis

4. Übungsblatt

Abgabetermin: in der Übung am 29.11.2011

Aufgabe 13 Modifizierte Unschärfe
Für ein reell-wertiges Wavelet $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ sind $t^*(\psi)$ und $\Delta(\psi)$ wie üblich definiert, für die Fourier-Transformierte setzen wir neu

$$\omega_+^*(\hat{\psi}) = \frac{2}{\|\hat{\psi}\|_2^2} \int_0^\infty \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 \, d\omega, \qquad \Delta_+(\hat{\psi}) = \left(\frac{2}{\|\hat{\psi}\|_2^2} \int_0^\infty (\omega - \omega_+^*(\hat{\psi}))^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 \, d\omega \right)^{1/2}.$$

Hier werden also nur Frequenzen $\omega \in [0, \infty)$ berücksichtigt. Beweisen Sie die modifizierte Unschärferelation

$$\Delta(\psi)\Delta_+(\hat{\psi}) > \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 14
Überprüfen Sie, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 1 - |t|$ für $-1 \le t \le 1$, $f(t) = 0$ für $|t| > 1$, die Voraussetzungen der Poissonschen Summenformel erfüllt (Abschnitt 2.7) und beweisen Sie anhand der Formel

$$\frac{1}{\sin^2 y} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(y + k\pi)^2}, \qquad y \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}.$$

Lässt sich hieraus eine bekannte Reihendarstellung für $\cot y$ ermitteln?

Aufgabe 15
Berechnen Sie mit Hilfe der Poissonschen Summenformel die Autokorrelationsfunktion von f in Aufgabe 14.

Aufgabe 16
Zeigen Sie, dass der Teilraum

$$V = \{f \in L_1(\mathbb{R}); \hat{f}(0) = 0\}$$

von $L_1(\mathbb{R})$ abgeschlossen und shift-invariant bzgl. $\mathbb{R}$ ist.