Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler

Wintersemester 2011/12

30.11.2011

Wavelet-Analysis

5. Übungsblatt

Abgabetermin: in der Übung am 6.12.2011

Shift-invariante Räume und der Umgang mit dem Klammerprodukt

Es sei $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ und

$$G_\phi(\omega) := [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega), \qquad \omega \in \mathbb{R},$$

das Klammerprodukt von $\hat{\phi}$ mit sich selbst. Bereits bewiesen wurde $G_\phi \in L_1(0, 2\pi)$. Für die weitere Untersuchung halten wir schon einmal die Beziehungen

$$0 \leq A := \operatorname*{ess\,inf}_{\omega \in (0,2\pi)} G_\phi(\omega) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\omega \in (0,2\pi)} G_\phi(\omega) =: B \leq \infty$$

fest. (Der Fall $B = \infty$ ist hier eingeschlossen, denn G_ϕ ist möglicherweise kein Element von $L_\infty(0, 2\pi)$.)
Weiterhin definieren wir den Vektorraum der endlichen Linearkombinationen von $\mathbb{Z}$-Shifts,

$$V_0(\phi) := \operatorname{span}(\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}),$$

und den Abschluss $V(\phi) = \operatorname{clos}_{L_2(\mathbb{R})} V_0(\phi)$ genau wie in der Vorlesung.

Aufgabe 17 (Bessel-Bedingung und Stabilitätsbedingung)

a) Für jede Funktion $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \phi(\cdot - k) \in V_0(\phi)$ gilt

$$A \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2 \leq B \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2.$$

b) Die Konstanten A und B in dieser Ungleichungskette sind optimal im folgenden Sinne: zu $\tilde{A} > A$ existiert ein $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \phi(\cdot - k) \in V_0(\phi)$ mit $\|f\|_2^2 < \tilde{A} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$; entsprechendes gilt für $\tilde{B} < B$.

Im Fall $A > 0$ und $B < \infty$ nennt man die Familie $(\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z})$ eine *Riesz-Basis* von $V(\phi)$.

Aufgabe 18 (Besser als Gram-Schmidt)
Nun gelte $A > 0$ und $B < \infty$. Wir definieren die Funktion $\phi^\perp$ durch die Festlegung

$$\widehat{\phi^\perp}(\omega) := \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\sqrt{G_\phi(\omega)}}, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

a) $V(\phi) = \{f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \phi(\cdot - k) : c_k \in \mathbb{C},\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty\}.$

b) $\phi^\perp \in V(\phi)$.

c) $[\widehat{\phi^\perp}, \widehat{\phi^\perp}] \equiv 1$.

d) $\phi \in V(\phi^\perp)$.

Also ist die Familie $(\phi^\perp(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z})$ eine Orthonormalbasis von $V(\phi) = V(\phi^\perp)$.

Aufgabe 19
Betrachten Sie die Orthogonalisierungs-Methode aus Aufgabe 18 anhand des Beispiels $\phi(t) = (1 - |t|)_+$. Überzeugen Sie sich zuerst, dass G_ϕ die Voraussetzungen erfüllt. (Tipp: G_ϕ wurde in Aufgabe 15 berechnet.)

Zeichnen Sie den Graphen von $\phi^\perp$.