Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler

Wintersemester 2011/12

8.12.2011

Wavelet-Analysis

6. Übungsblatt

Abgabetermin: in der Übung am 13.12.2011

Anwendungen der Identitäten zur Charakterisierung orthogonaler Wavelets

Jedes orthogonale Wavelet $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ mit $\|\psi\|_2 = 1$ ist in Theorem 4.24 charakterisiert durch die beiden Identitäten

$$X(\omega) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j\omega)|^2 = 1 \quad \text{für fast alle } \omega \in \mathbb{R},$$

$$t_q(\omega) := \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j\omega)\overline{\hat{\psi}(2^j(\omega + 2q\pi))} = 0 \quad \text{für fast alle } \omega \in \mathbb{R} \text{ und jedes } \textit{ungerade } q \in \mathbb{Z}.$$

Wir wollen hierzu Anwendungen betrachten.

Aufgabe 20 Beweisen Sie mit Hilfe von Theorem 4.24 erneut, dass das Meyer-Wavelet ein orthogonales Wavelet ist.

Aufgabe 21 Die Funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ sei ein orthogonales Wavelet und $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei eine messbare 2π-periodische Funktion mit $|\sigma(\omega)| \equiv 1$ für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann die Funktion η mit $\hat{\eta} = \sigma\hat{\psi}$ ebenfalls ein orthogonales Wavelet ist.

Aufgabe 22: Wavelet-Mengen (vgl. Bemerkung 4.21)
Eine messbare Menge $E \subseteq \mathbb{R}$ heißt "Wavelet-Menge", wenn

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (E + 2k\pi) = \mathbb{R}, \qquad \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} 2^j E = \mathbb{R},$$

jeweils Partitionen von $\mathbb{R}$ sind.

a) Zeigen Sie, dass dann die Funktion ψ mit $\hat{\psi} = \chi|_E$ ein orthogonales Wavelet ist.

b) Zeigen Sie, dass

$$E = [-\frac{32\pi}{7}, -4\pi) \cup [-\pi, -\frac{4\pi}{7}) \cup [\frac{4\pi}{7}, \pi) \cup [4\pi, \frac{32\pi}{7})$$

eine Wavelet-Menge ist. Berechnen Sie eine Darstellung des zugehörigen Wavelets ψ mit $\hat{\psi} = \chi|_E$ im Zeitbereich. (Verwenden Sie eine geeignete Linearkombination von Funktionen der Form $\frac{\sin \alpha t}{\alpha t}$.)

Aufgabe 23 Haar-Wavelet
Jetzt verwenden wir die Identitäten einmal anders herum. Wir wissen (oder ich habe es zumindest einmal angedeutet), dass die Funktion $\psi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$ ein orthogonales Wavelets ist, das sog. *Haar Wavelet* benannt nach Alfred Haar (1885-1933). Berechnen Sie $\hat{\psi}$ und ziehen Sie Schlussfolgerungen aus den Identitäten in Theorem 4.24.