

Wavelet–Analysis
Wintersemester 2006/2007

Joachim Stöckler

Inhaltsverzeichnis

Literatur	5
Kapitel 1. Einführung	7
1. Wichtige Begriffe aus der Linearen Algebra	8
2. Die diskrete Welt	10
3. Die kontinuierliche Welt	14
Kapitel 2. Kontinuierliche Wavelet-Transformation	19
Kapitel 3. Grundlagen der Fourier-Analyse	25
1. Fourier-Reihen	25
2. Fourier-Transformation in $L^1(\mathbb{R})$	27
3. Faltung und Faltungskerne	32
4. Fourier-Transformation in $L^2(\mathbb{R})$	35
5. Unschärferelation und Zeit-Frequenz-Atome	38
6. Die gefensterter Fourier-Transformation	41
Zusätze zu Kapitel 2: Kontinuierliche Wavelet-Transformation	43
Kapitel 4. Die diskrete Wavelet-Transformation	51
1. Die Grundidee	51
2. Shift-Invarianz	54
3. Vollständige Charakterisierung orthogonaler Wavelets	62
Kapitel 5. Multiskalen-Analyse und DWT	75
1. Definition und Eigenschaften der Multiskalen-Analyse	75
2. Konstruktion von MRA-Wavelets	82
3. Rekursiver Algorithmus zur DWT	86
4. Weitere Eigenschaften	90
5. Erweiterung der Aussagen auf MRA Tight-Wavelet-Frames	93
Kapitel 6. Skalierungsfunktionen und Wavelets mit kompaktem Träger	99
1. Skalierungsfunktionen mit kompaktem Träger haben endliche Masken	99
2. Schwache und starke Konvergenz des Kaskadenalgorithmus	101
3. Einschub: Das Spektrum des Transfer-Operators	112
4. Stabilität der Skalierungsfunktion, Cohen's Bedingung	115
5. Die Daubechies Skalierungsfunktionen	124
Kapitel 7. Wavelet-Transformation in der Signal- und Bildverarbeitung	129
1. Wavelets für unendliche Signale	129
2. Wavelets für endliche Signale	132
3. Wavelets für zweidimensionale Daten	139

4. Quantisierung und Kodierung der Wavelet-Zerlegung	141
Kapitel 8. Wavelet-Packets	157
1. Konstruktion	157
2. Beste Basen	162

Literatur

Der Katalog der Universität Dortmund liefert 85 Treffer auf das Suchwort "Wavelets".

Als Einführung in Wavelets, auch für Nichtmathematiker gedacht, sind folgende Bücher:

- W. Bäni, "Wavelets: eine Einführung für Ingenieure", Oldenbourg, 2005.
- J. Bergh, F. Ekstedt, M. Lindberg, "Wavelets", Studentlitteratur, 1999.
- C. Blatter, "Wavelets: Eine Einführung", Vieweg, 2003.
- A. Boggress, F. Narcowich, "A First Course in Wavelets with Fourier Analysis", Prentice Hall, 2001.
- C. K. Chui, "Wavelets: a mathematical tool for signal analysis", SIAM, 1997.
- M. W. Frazier, "An Introduction to Wavelets through Linear Algebra", Springer, 1999.
- Y. Meyer, "Wavelets: algorithms and applications", SIAM, 1994.
- G. Strang, T. Nguyen, "Wavelets and Filter Banks", Wellesley-Cambridge Press, 1997.

Fundierte mathematische Einführungen in Wavelet-Analysis geben:

- I. Daubechies, "Ten Lectures on Wavelets", CBMS-NSF Reg. Conf. Series in Appl. Math., SIAM, 1992.
- E. Hernández, G. Weiss, "A first course on Wavelets", CRC Press, 1996.
- A. K. Louis, P. Maaß, A. Rieder, "Wavelets: Theorie und Anwendungen", Teubner, 1998.
- S. Mallat, "A Wavelet Tour of Signal Processing", 2nd. Ed., Academic Press, 1999. (Sehr umfangreich, beinhaltet sehr viele Aspekte der Anwendungen.)
- Y. Meyer, "Wavelets and Operators", Cambridge University Press, 1992. Übersetzung von Band 1 "Ondelettes et Opérateurs", Hermann, Paris.

Weiterführende Bücher, zum Teil als Beiträge verschiedener Autoren oder Tagungsbände:

- C. K. Chui, "Wavelets: a tutorial in theory and applications", Academic Press, 1992.

- C. K. Chui, L. Montefusco, L. Puccio, “Wavelets: theory, algorithms, and applications”, Academic Press, 1994.
- Y. Meyer, “Wavelets: Calderón-Zygmund and Multilinear Operators”, Cambridge University Press, 1997. Übersetzung der Bände 2 und 3 von “Ondelettes et Opérateurs”, Hermann, Paris.
- L. L. Schumaker, G. Webb, “Recent advances in wavelet analysis”, Academic Press, 1994.
- G. V. Welland, “Beyond Wavelets”, Academic Press, 2003.

Daneben benötigen wir Grundlagen der Fourier-Reihen und Fourier-Transformation. Als Nachschlagewerk zu Fourier-Reihen (und Aussagen zur Lebesgue-Integration) kann z.B. dienen:

- A. Zygmund, “Trigonometric Series”, Cambridge University Press, 1959 (paperback 1988).

Weiterhin bezieht sich die Vorlesung auf einige einschlägige Veröffentlichungen:

- I. Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, Commun. Pure Appl. Math. 41, No.7, 909-996 (1988), [Zbl 0644.42026].
- R. Q. Jia, Z. Shen, Multiresolution and Wavelets, Proc. Edinburgh Math. Soc. 37 (1994), 271–300.
- W. Lawton, S. L. Lee, Z. Shen, Convergence of the multivariate cascade algorithm, Numer. Math. 78 (1998), 427–438.
- A. Ron, Z. Shen, Affine systems in $L_2(\mathbb{R}^d)$: the analysis of the analysis operator, J. Functional Analysis 148 (1997), 408-447.

KAPITEL 1

Einführung

Wavelet–Analysis ist ein modernes Gebiet der Angewandten Mathematik, das die Theorie der Fourier-Transformation (siehe Analysis 2) erweitert. Die *Wavelet-Transformation* dient in erster Linie der Analyse von Teilinformationen, die eine gegebene Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ enthält. In praktischen Anwendungen ist f zum Beispiel die Wellenform eines akustischen Signals ($d = 1$) oder die Grauwertverteilung eines Bildes ($d = 2$, \mathbb{R}^2 wird ersetzt durch einen rechteckigen Definitionsbereich).

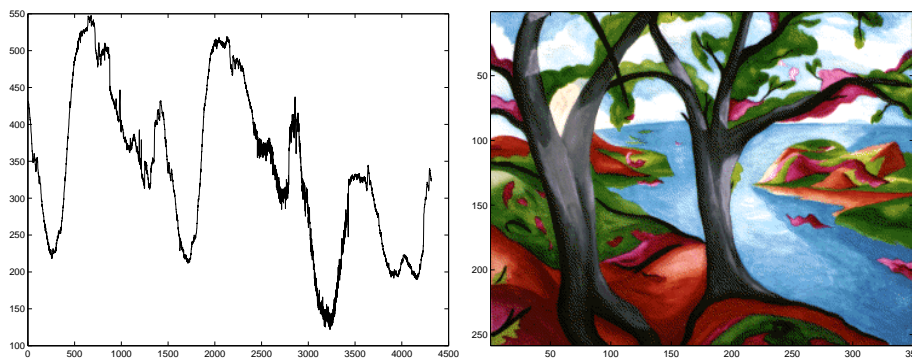


BILD 1.1. Funktionen in der Signal- und Bildverarbeitung

Ziele der Wavelet-Transformation sind unter anderem

- die zeitlich eingegrenzte Frequenzanalyse eines akustischen Signals,
- die Datenkompression (z.B. JPEG2000 bei der Bildverarbeitung),
- das Entrauschen gestörter Messwerte.

Hierbei werden besonders die Eigenschaften der Wavelet-Transformation als *Filter* betont, der Eigenschaften aus einer gegebenen Funktion f “herausfiltert”.

Als mathematisches Werkzeug dient die Wavelet-Transformation weiterhin

- zur Charakterisierung von “lokalen” Eigenschaften von Funktionen, z.B. der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von Funktionen,
- zur Darstellung und Definition von wichtigen Funktionenräumen (z.B. Sobolev-Räume),
- zur Diskretisierung von Differentialgleichungen.

Dadurch werden enge Beziehungen zur Funktionalanalysis, Approximationstheorie und Numerischen Mathematik hergestellt.

1. Wichtige Begriffe aus der Linearen Algebra

DEFINITION 1.1. Gegeben sei ein Vektorraum V über dem Körper \mathbb{C} sowie eine Abbildung

$$\langle \cdot, * \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) *Definitheit:* $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$, und $\langle v, v \rangle = 0$ nur für $v = 0$;
- (ii) *Linearität in der 1. Komponente:* $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $u, v, w \in V$;
- (iii) *Symmetrie:* $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ für alle $v, w \in V$.

Dann heißt die Abbildung $\langle \cdot, * \rangle$ Skalarprodukt auf V . Der Vektorraum V , versehen mit dieser Abbildung, ist ein Skalarproduktraum.

Auf einem Skalarproduktraum wird durch

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad v \in V,$$

eine Norm induziert. Hiermit ist jeder Skalarproduktraum auch ein *normierter Raum*. Damit ist insbesondere die Konvergenz von Folgen $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Folgengliedern $v_n \in V$ wie üblich definiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\| = 0.$$

Ebenso ist der Begriff der Cauchy-Folge in V wie üblich definiert: $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \geq N$ die Ungleichung $\|v_n - v_m\| < \epsilon$ gilt; dies wird kurz ausgedrückt in der Form

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|v_n - v_m\| = 0.$$

Der Skalarproduktraum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert, also zu jeder Cauchy-Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V ein Element $v \in V$ existiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$.

DEFINITION 1.2. Ein vollständiger Skalarproduktraum V heißt Hilbertraum.

BEMERKUNG 1.3. In einem Skalarproduktraum V gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$(1.1) \quad |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|, \quad v, w \in V.$$

BEISPIEL 1.4.

- a) Die Elemente von \mathbb{C}^N werden als Spaltenvektoren $x = (x_1, \dots, x_N)^T$ aufgefasst. Versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^N x_k \overline{y_k}$$

ist \mathbb{C}^N ein Hilbertraum, der N -dimensionale Euklidische Raum. Wir identifizieren diesen Raum häufig mit den folgenden Räumen:

– $\ell_N := \{(x_0, \dots, x_{N-1}); x_k \in \mathbb{C} \text{ für } 0 \leq k \leq N-1\}$, mit dem Skalarprodukt

$$(1.2) \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \overline{y_k}.$$

– dem Vektorraum der N -periodischen Folgen

$$\tilde{\ell}_N := \{(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}; x_k \in \mathbb{C}, x_{k+N} = x_k \text{ für } k \in \mathbb{Z}\},$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \overline{y_k}, \quad x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}, y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \tilde{\ell}_N,$$

– dem Vektorraum V aller Abbildungen $f : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \overline{g(k)}, \quad f, g \in V.$$

b) Der Vektorraum der quadrat-summierbaren Folgen

$$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}) := \{(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}; x_k \in \mathbb{C}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2 < \infty\},$$

ist mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \overline{y_k}$$

ein Hilbertraum. Die zugehörige Norm ist die sog. ℓ^2 -Norm

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Hier lautet die Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \overline{y_k} \right| \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |y_k|^2 \right)^{1/2}.$$

c) Der Vektorraum der quadrat-integrierbaren Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ (unbeschränkte Intervalle eingeschlossen)

$$L^2(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ messbar und } \int_I |f(x)|^2 dx < \infty\},$$

ist mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) \overline{g(x)} dx$$

ein Hilbertraum. Die zugehörige Norm ist die sog. L^2 -Norm

$$\|f\|_2 = \left(\int_I |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Hier lautet die Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\left| \int_I f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \left(\int_I |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_I |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

ÜBUNG 1.5. Der Vektorraum $C([0, 1])$ mit dem obigen Skalarprodukt ist ein Skalarproduktraum, aber kein Hilbertraum. (Hinweis: Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ für $x \in [0, 1]$)

2. Die diskrete Welt

Wir wollen nun versuchen, das Wesen der Wavelet-Analyse anhand des Hilbertraums \mathbb{C}^N bzw. des isomorphen Raumes ℓ_N zu verstehen. Dazu benötigen wir den folgenden Begriff.

DEFINITION 1.6. Die Vektoren $e_n \in \ell_N$, $0 \leq n \leq N-1$, bilden eine Orthonormalbasis von ℓ_N , falls

$$\langle e_m, e_n \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n, \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases}$$

gilt.

BEMERKUNG 1.7. Zu gegebener Orthonormalbasis $(e_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ besitzt jedes Element $v \in \ell_N$ die Basisdarstellung

$$(1.3) \quad v = \sum_{k=0}^{N-1} \langle v, e_k \rangle e_k.$$

Der Satz des Pythagoras liefert die Beziehung

$$(1.4) \quad \|v\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |\langle v, e_k \rangle|^2,$$

d.h. die "Energie" $\|v\|^2$ des Signals v wird exakt von der Gesamtheit der Koeffizienten dargestellt. Wir betrachten den einzelnen Koeffizienten $c_k := \langle v, e_k \rangle$ als die "Teilinformation" über den Vektor v , den die Basisfunktion e_k liefert (oder repräsentiert).

BEISPIEL 1.8. a) Die "kanonische" Orthonormalbasis von ℓ_N lautet

$$\begin{aligned} e_0 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ e_1 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ e_{N-1} &= (0, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Der Koeffizient $c_k = \langle v, e_k \rangle = v_k$ liefert den Wert der k -ten Koordinate von v . Betrachten wir v als diskretes Signal (mit Amplituden v_k an den Zeitpunkten kT , $T = \text{Zeiteinheit}$), so wird hierdurch die Amplitude zum Zeitpunkt kT repräsentiert.

b) Von der trigonometrischen Interpolation (siehe Numerik I) kennen wir die Orthonormalbasis der komplexen Vektoren

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{N}} (1, e^{2\pi i \frac{k}{N}}, e^{2\pi i \frac{2k}{N}}, \dots, e^{2\pi i \frac{(N-1)k}{N}}), \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Der Koeffizient

$$c_k = \langle v, e_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} v_j e^{-2\pi i \frac{jk}{N}}$$

ist (bis auf einen Faktor $\frac{1}{\sqrt{N}}$) der diskrete Fourierkoeffizient¹ von v . Die Identität (1.3) repräsentiert v als (lineare) Überlagerung der “harmonischen Frequenzen” e_k . Also liefert $|c_k|$ die Amplitude der k -ten Frequenz von v . Der Koeffizientenvektor $(c_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ wird *diskrete Fourier-Transformierte* von v genannt. Zu seiner Berechnung wird die “Schnelle Fourier-Transformation” (FFT=fast Fourier transform) verwendet. Für $N = 2^K$ werden dazu anstatt $\mathcal{O}(N^2)$ nur $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ Rechenoperationen benötigt.

- c) Die *diskrete Walsh-Transformation*² entsteht durch die Wahl von Vektoren $\tilde{e}_k = \sqrt{N}e_k$, $0 \leq k \leq N-1$, die die folgenden Eigenschaften haben:
- \tilde{e}_k besitzt nur die Einträge $+1$ und -1 und hat genau k Vorzeichenwechsel,
 - die Vektoren sind paarweise orthogonal.

Solche Vektoren sind für alle $N = 2^K$ bekannt. Die Koeffizienten $c_k = \langle v, e_k \rangle$ bilden die Walsh-Transformierte von v . Da die Vektoren e_k , $0 \leq k \leq N-1$, mit wachsendem k stärker oszillieren, wird diese Transformation manchmal als “Poor man’s FFT” bezeichnet. Ihre Berechnung ist effizienter als die der FFT, da nur Additionen und Subtraktionen auftreten. Über Anwendungen in der Signalverarbeitung und Kryptographie unterrichtet der Artikel

www.cast.uni-linz.ac.at/Department/Publications/Pubs2004/Walsh_Functions_Wien9_04.doc.

ÜBUNG 1.9. Geben Sie die Vektoren \tilde{e}_k , $0 \leq k \leq 7$, für $N = 8$ an.

Wie wir gesehen haben, liefert die Wahl verschiedener Orthonormalbasen $(e_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ anhand der Koeffizienten $c_k = \langle v, e_k \rangle$ auch unterschiedlichen Informationsgehalt. Die am stärksten “lokalisierte” Information erhalten wir von der kanonischen Basis der Einheitsvektoren (Beispiel a), die beste Frequenz-Information von der diskreten Fouriertransformation (Beispiel b). Andererseits liefert die kanonische Basis keinerlei Information über die Frequenzen des Vektors v , denn dazu müssten ja mehrere Werte v_k miteinander verglichen werden. Analog liefern die diskreten Fourierkoeffizienten von v keine direkte Information über die Signalwerte v_k selbst, da ein Mittel über den gesamten Zeitbereich gebildet wird.

In gewisser Weise stellt die Wavelet-Analyse einen Zwischenweg zwischen diesen beiden Extremfällen dar. Die erhaltenen Koeffizienten erlauben sowohl Rückschlüsse auf die Komponenten v_k selbst als auch auf die diskreten Fourierkoeffizienten. Wir machen dies am Beispiel der (diskreten) Haar-Wavelets³ deutlich.

Wir betrachten den Fall $N = 2^K$ mit $K \in \mathbb{N}$. Die ersten beiden Elemente der Orthonormalbasis sind

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_N, \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\underbrace{(1, \dots, 1)}_{N/2}, \underbrace{(-1, \dots, -1)}_{N/2} \right),$$

¹Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830

²Joseph Leonard Walsh, 1895–1973

³Alfréd Haar, 1885–1933

stimmen also mit denen der Walsh-Basis überein. Alle weiteren Elemente entstehen durch “Stauchern” und “Verschieben” von e_1 und Auffüllen mit Nullen, z.B. sind

$$e_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{N/4}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{N/4}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N/2} \right), \quad e_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{N/2}, \underbrace{1, \dots, 1}_{N/4}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{N/4} \right).$$

Allgemein wird e_n für $n = 2^j + k$, $0 \leq j \leq K-1$, $0 \leq k < 2^j$, definiert durch

$$e_n = \frac{\sqrt{2^j}}{\sqrt{N}} \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{kN/2^j}, \underbrace{1, \dots, 1}_{N/2^{j+1}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{N/2^{j+1}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(2^j - k - 1)N/2^j} \right).$$

Man erkennt hieran, dass für festes $0 \leq j \leq N-1$ der Bereich der nicht verschwindenden Koordinaten von e_{2^j+k} die Länge $N/2^j$ besitzt und mit wachsendem k von links nach rechts wandert, ohne dass Überlappungen auftreten.

ÜBUNG 1.10. Zeigen Sie, dass die Vektoren e_n , $0 \leq n \leq 2^K - 1$, eine Orthonormalbasis von ℓ_{2^K} bilden. (Hinweis: Für $n = 2^j + k$ und $m = 2^{j'} + k'$ wie in der Definition betrachte man zuerst $j \neq j'$ und dann, nur für $j = j'$, den Fall $k \neq k'$.)

Um den Informationsgehalt der Koeffizienten $c_k = \langle v, e_k \rangle$ zu interpretieren, bezeichnen wir für gerades $M \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} a_0(x_0, \dots, x_{M-1}) &:= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=0}^{M-1} x_k, \\ d_0(x_0, \dots, x_{M-1}) &:= \frac{1}{\sqrt{M}} \left(\sum_{k=0}^{M/2-1} x_k - \sum_{k=M/2}^{M-1} x_k \right) \end{aligned}$$

die ersten beiden Koeffizienten zur Walsh-Basis der Länge M . Dann gilt

- $c_0 = a_0(v_0, \dots, v_{N-1})$ enthält das Mittel des gesamten Vektors v ,
- $c_1 = d_0(v_0, \dots, v_{N-1})$ enthält die Differenz der beiden Mittel gebildet über je die Hälfte der Koordinaten von v ,
- $c_{2^j+k} = d_0(v_{kN/2^j}, \dots, v_{(k+1)N/2^j-1})$ enthält die Differenz der beiden Mittel gebildet über einen Abschnitt von v der Länge $N/2^j$. Dieser Abschnitt ergibt bei festem j und wachsendem k eine disjunkte Partition des Vektors.

Mit anderen Worten: Die Stauchung (Parameter 2^j) bewirkt die Analyse immer kürzerer Abschnitte des Vektors v . Wir betrachten daher 2^j (oder einfach j) als die Verfeinerungsstufe der Wavelet-Analyse. Die zusätzliche Verschiebung (Parameter k) stellt sicher, dass auf jeder Verfeinerungsstufe der gesamte Vektor in die Analyse einbezogen wird. Die einzelnen Koeffizienten geben daher eine (grobe) Frequenzinformation über einen bestimmten Teilbereich des gegebenen Vektors v , dessen Länge mit einer Zweierpotenz (“dyadisch”) abnimmt.

Weiterhin zeigen die Formeln

$$\begin{aligned} a_0(x_0, \dots, x_{M-1}) &= 2^{-1/2} (a_0(x_0, \dots, x_{M/2-1}) + a_0(x_{M/2}, \dots, x_{M-1})), \\ d_0(x_0, \dots, x_{M-1}) &= 2^{-1/2} (a_0(x_0, \dots, x_{M/2-1}) - a_0(x_{M/2}, \dots, x_{M-1})), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a_0(x_0, \dots, x_{M/2-1}) &= 2^{-1/2} (a_0(x_0, \dots, x_{M-1}) + d_0(x_0, \dots, x_{M-1})), \\ a_0(x_{M/2}, \dots, x_{M-1}) &= 2^{-1/2} (a_0(x_0, \dots, x_{M-1}) - d_0(x_0, \dots, x_{M-1})), \end{aligned}$$

dass sehr effiziente rekursive Algorithmen zur Berechnung der Verfeinerungsstufen vorliegen. Das abschließende numerische Beispiel soll die 4 Transformationen gegenüberstellen.

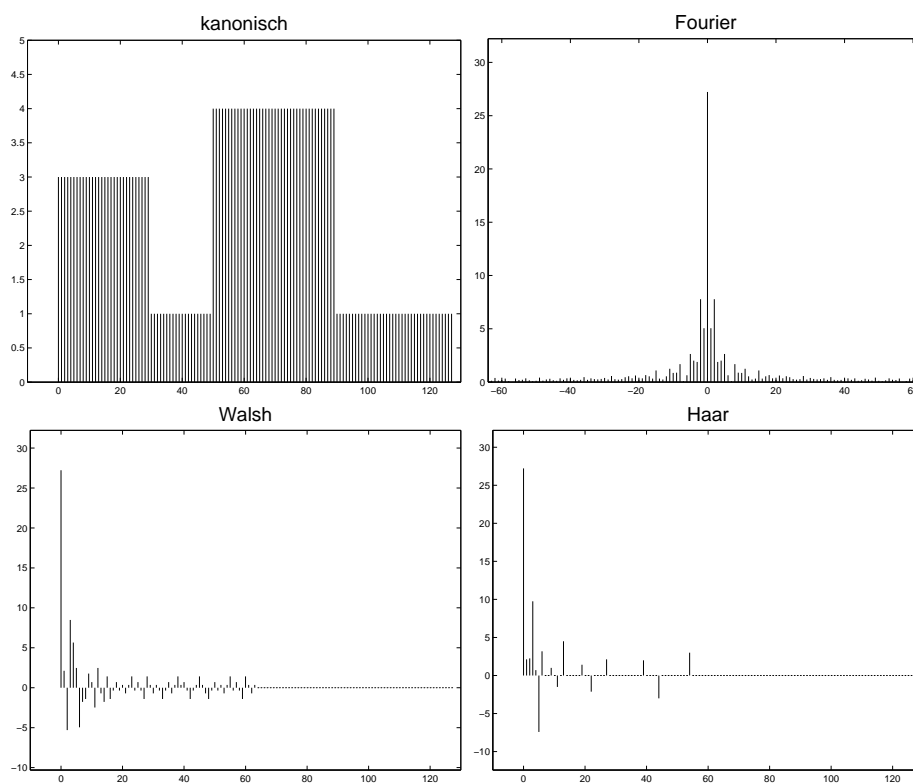


BILD 1.2. Darstellung eines einfachen Signals in vier verschiedenen Orthonormalbasen

Hier noch ein kleines Matlab-Programm, das die Vektoren \tilde{e}_n , $0 \leq n \leq 2^K - 1$, der nicht-normalisierten Walsh-Basis als Zeilen einer Matrix w liefert.

```
function w=walsh(K)
% generate 2^K Walsh functions
w=[1];
for i=1:K
    w=[w,w;w,-w];
end
% for sequence ordering according to number of sign changes
c=sum(abs(diff(w')))/2; % number of sign changes in rows
[c,i]=sort(c);
w=w(i,:);
```

Weitere Informationen (incl. der obigen Rekursion) enthält die Datei walsh.html auf der Kurs-Webseite.

3. Die kontinuierliche Welt

Die eigentliche Struktur der Wavelet-Analyse zeigt sich noch besser durch Betrachtung von Funktionenräumen wie z.B. den Hilberträumen $L^2([0,1])$ oder $L^2(\mathbb{R})$. Wir gehen vor wie im vorherigen Abschnitt und definieren zunächst den Begriff der Orthonormalbasis.

DEFINITION 1.11. H sei ein Hilbertraum mit $\dim H = \infty$. Die Vektoren $e_n \in H$, $n \in \mathbb{N}$, bilden eine Orthonormalbasis von H , falls die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:

(1)

$$\langle e_m, e_n \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n, \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases}$$

(2) Für jedes $h \in H$ gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| h - \sum_{n=1}^N \langle h, e_n \rangle e_n \right\| = 0.$$

BEMERKUNG 1.12. a) Die zweite Eigenschaft besagt, dass

$$(1.5) \quad h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle e_n$$

gilt, wobei die Reihe in der Norm von H konvergiert (sog. "starke Konvergenz"). Man nennt die Reihe auch eine Orthogonalreihe. Solche Reihen dürfen beliebig umgeordnet werden, ohne dass der Grenzwert sich ändert. Deshalb können wir auch andere abzählbare Indermengen, wie z.B. \mathbb{Z} oder $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ verwenden. Dies ist manchmal hilfreich, um gewisse Eigenschaften der Basisfunktion e_n auszudrücken (s. Beispiele unten).

b) Es gelten die Besselsche Ungleichung

$$(1.6) \quad \sum_{n=1}^N |\langle h, e_n \rangle|^2 \leq \|h\|^2, \quad h \in H,$$

sowie die Parseval-Identität

$$(1.7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, e_n \rangle|^2 = \|h\|^2, \quad h \in H.$$

Diese Identität ist wiederum äquivalent zur Plancherel-Identität für das Skalarprodukt von zwei Elementen,

$$(1.8) \quad \langle g, h \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, e_n \rangle \overline{\langle h, e_n \rangle}, \quad g, h \in H.$$

Da auf der rechten Seite das ℓ^2 -Skalarprodukt der Koeffizientenfolgen $c = (\langle g, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ von g sowie $d = (\langle h, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ von h steht, wird durch jede Orthonormalbasis ein Isomorphismus der Hilberträume H und $\ell^2(\mathbb{N})$ erzeugt.

BEMERKUNG 1.13. Ein Hilbertraum H mit $\dim H = \infty$ heißt separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge $M \subset H$ gibt, die dicht in H ist. Die folgende Aussage ist

gar nicht schwer zu beweisen: Der Hilbertraum H ist genau dann separabel, wenn er eine Orthonormalbasis besitzt.

Beweis von “ \implies ”: Die Gram-Schmidt Orthogonalisierung macht aus einer abzählbaren dichten Teilmenge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (unter Weglassen evtl. entstehender Nullvektoren) eine Orthonormalbasis.

Beweis von “ \impliedby ”: Zu gegebener Orthonormalbasis $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist die Menge

$$M = \left\{ \sum_{n=1}^N c_n e_n; N \in \mathbb{N}, c_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \text{ für } 1 \leq n \leq N \right\}$$

abzählbar und dicht in H .

Die von uns verwendeten Hilberträume sind sämtlich separabel.

BEISPIEL 1.14. a) Der Hilbertraum $L^2([0, 1])$ besitzt die Orthonormalbasis der Funktionen e_n , $n \in \mathbb{Z}$, mit

$$e_n(x) = e^{2\pi i n x}, \quad x \in [0, 1].$$

(Hier wird als Indexmenge \mathbb{Z} anstatt \mathbb{N} verwendet, weil dadurch die Basiselemente e_n klarer beschrieben werden.) Anders ausgedrückt: jede quadratintegrierbare Funktion $f \in L^2([0, 1])$ ist der Grenzwert ihrer Fourier-Reihe

$$(1.9) \quad f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e_n, \quad c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Die Konvergenz erfolgt in der Norm des Hilbertraums $L^2([0, 1])$ und wird *Konvergenz im quadratischen Mittel* genannt,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{2\pi i n x} \right|^2 dx = 0.$$

Die Koeffizienten $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$ sind die *Fourierkoeffizienten* der Funktion f . Die Darstellung von f in (1.9) besagt, dass jede Funktion $f \in L^2([0, 1])$ eine (unendliche) Überlagerung harmonischer Schwingungen e_n , $n \in \mathbb{Z}$, ist. Der Fourierkoeffizient gibt die Amplitude und Phasenverschiebung der n -ten periodischen Schwingung an.

Der Hilbertraum $L^2([0, 1])$ wird mit dem Raum der 1-periodischen Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x) = f(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$, identifiziert.

Physikalische Messungen liefern häufig nicht die zugrunde liegende Funktion f (in ihrer “Wellenform”), sondern die Werte $c_n(f)$ ihres Spektrums (s. Spektroskopie).

b) Der Hilbertraum $L^2(\mathbb{R})$ der (nicht-periodischen) quadrat-integrierbaren Funktionen ist separabel. Eine Orthonormalbasis (die aber nicht weiter verwendet wird) ist durch die Familie $e_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{Z}$, mit

$$e_{n,k}(x) = e^{2\pi i n(x-k)} \chi_{[k, k+1)}(x)$$

Hierbei bezeichnet χ_I die charakteristische Funktion zur Menge I .

c) Die Walsh-Funktionen werden ähnlich wie im diskreten Fall gebildet. Die n -te Walsh-Funktion $w_n: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 0$, nimmt nur die Werte 1 oder -1 an, erfüllt $w_n(0) = 1$, hat genau n Sprungstellen in “dyadischen” Punkten der Form

$k2^{-j} \in (0, 1)$ und ist (bzgl. des gewöhnlichen Skalarprodukts) orthogonal zu w_0, \dots, w_{n-1} (und damit zu allen w_k , $k \neq n$). Eine explizite Formel findet sich z.B. bei Wikipedia:

$$w_n(x) = (-1)^{k_0x_0+k_1x_1+\dots+k_mx_m}$$

für $n = \sum_{i=0}^m k_i 2^i$ und $x = \sum_{i \geq 0} x_i 2^{-1-i}$.

Wir kommen nun zur Vorstellung der einfachsten Wavelet-Basis, der so genannten *Haar-Basis* von $L^2([0, 1])$. Die Indexmenge zur Bezeichnung der Basiselemente wird wieder nicht durch \mathbb{N} , sondern durch

$$\mathbb{J} = \{0\} \cup \{(j, k); j \in \mathbb{N}_0, 0 \leq k \leq 2^j - 1\}$$

festgelegt. Die Funktionen der Orthonormalbasis lauten

(1.10)

$$e_0(x) = 1, \quad e_{j,k}(x) = \begin{cases} 2^{j/2}, & x \in [k2^{-j}, (k + \frac{1}{2})2^{-j}), \\ -2^{j/2}, & x \in [(k + \frac{1}{2})2^{-j}, (k + 1)2^{-j}), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [0, 1).$$

Der Träger $\text{supp } e_{j,k}$ ist der Abschluss des dyadischen Intervalls $I_{j,k} = [k2^{-j}, (k + 1)2^{-j}]$. Dieses Intervall hat die Länge 2^{-j} .

THEOREM 1.15. *Die Funktionen $e_0, e_{j,k}$ mit $j \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq 2^j - 1$ bilden eine Orthonormalbasis von $L^2([0, 1])$.*

Beweis: Orthonormalität: Es gilt $\|e_0\| = 1$ sowie

$$\langle e_0, e_{j,k} \rangle = \int_0^1 e_{j,k}(x) dx = 0, \quad j \in \mathbb{N}_0, 0 \leq k \leq 2^j - 1.$$

Weiterhin ist für alle $j \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq 2^j - 1$

$$\|e_{j,k}\|^2 = \int_0^1 |e_{j,k}(x)|^2 dx = \int_{I_{j,k}} 2^j dx = 1.$$

Für $0 \leq k' \leq 2^j - 1$, $k \neq k'$, gilt $\langle e_{j,k'}, e_{j,k} \rangle = 0$, weil die Träger der Funktionen disjunkt sind (genauer: der Durchschnitt ist höchstens ein Punkt, also eine Nullmenge). Für $j' < j$ und $0 \leq k' \leq 2^{j'} - 1$ ist

$$\langle e_{j',k'}, e_{j,k} \rangle = \int_{I_{j,k}} e_{j',k'}(x) e_{j,k}(x) dx = 0,$$

weil $e_{j',k'}$ auf $I_{j,k}$ konstant ist (entweder 0, 1 oder -1) und das Integralmittel von $e_{j,k}$ Null ist. Damit ist die paarweise Orthogonalität aller Funktionen gezeigt.

Vollständigkeit: Wir zeigen, dass für beliebiges $f \in L^2([0, 1])$ aus

$$(1.11) \quad \langle f, e_0 \rangle = \langle f, e_{j,k} \rangle = 0 \quad \text{für alle } j, k$$

auch $f = 0$ folgt.

1. Schritt: Für ein dyadisches Intervall $I_{j,k} = [k2^{-j}, (k + 1)2^{-j}]$ (mit $j \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq 2^j - 1$) sei

$$a_{j,k} := 2^{j/2} \int_{I_{j,k}} f(x) dx.$$

Mittels vollständiger Induktion nach j zeigen wir, dass $a_{j,k} = 0$ für alle j, k gilt. Zunächst folgt aus $I_{0,0} = [0, 1)$ und der ersten Identität in (1.11) sofort $a_{0,0} = 0$. Das dyadische Intervall $I_{j,k}$ ist Vereinigung der disjunkten Intervalle $I_{j+1,2k}$ und $I_{j+1,2k+1}$. Einfaches Nachrechnen ergibt für die charakteristischen Funktionen

$$2^{j/2}\chi_{I_{j,k}} + e_{j,k} = 2^{(j+2)/2}\chi_{I_{j+1,2k}}, \quad 2^{j/2}\chi_{I_{j,k}} - e_{j,k} = 2^{(j+2)/2}\chi_{I_{j+1,2k+1}}.$$

Daher folgt aus $a_{j,k} = 0$ und der zweiten Identität in (1.11)

$$a_{j+1,2k} = a_{j+1,2k+1} = 0.$$

Damit ist der Induktionsschritt von j nach $j + 1$ gezeigt.

2. Schritt: Jede Funktion $f \in L^2([0, 1))$ ist Lebesgue-integrierbar. Aus $\int_{I_{j,k}} f(x) dx = 0$ für jedes dyadische Intervall $I_{j,k}$ folgt mit elementaren Argumenten der Integrationstheorie, dass $\int_I f(x) dx = 0$ für jede messbare Menge $I \subset [0, 1)$ gilt. Daraus folgt wiederum $f = 0$. \square

BEMERKUNG 1.16. *Welchen Informationsgehalt hat nun der einzelne "Wavelet-Koeffizient" $b_{j,k} := \langle f, e_{j,k} \rangle$ der Haar-Basis? Wir stellen sofort fest, dass dieser Koeffizient nur vom Verhalten von f im dyadischen Intervall $I_{j,k}$ abhängt. Mit wachsendem k "zoomen" die Koeffizienten also in immer kleinere Bereiche der Funktion f . Mit $x_{j,k}$ bezeichnen wir den Mittelpunkt des Intervalls $I_{j,k}$. Wir betrachten nun die folgenden 2 speziellen Situationen:*

1. Fall: f ist stetig in $I_{j,k} \setminus x_{j,k}$ und hat eine Sprungstelle der Höhe $-2c$ an der Stelle $x_{j,k}$, also

$$f|_{I_{j,k}} \approx (a + c)\chi_{I_{j+1,2k}} + (a - c)\chi_{I_{j+1,2k+1}}.$$

Dann ist

$$b_{j,k} \approx \underbrace{a \int_{I_{j,k}} e_{j,k}(x) dx}_{=0} + c \underbrace{\int_{I_{j,k}} |e_{j,k}(x)| dx}_{=2^{-j/2}} = c2^{-j/2}.$$

2. Fall: f erfüllt im Intervall $I_{j,k}$ die Lipschitz-Bedingung

$$|f(x) - f(x_{j,k})| \leq M|x - x_{j,k}|^\alpha, \quad x \in I_{j,k},$$

mit einem $0 < \alpha \leq 1$. Dann ist wegen $\int_{I_{j,k}} e_{j,k}(x) dx = 0$ der Koeffizient

$$b_{j,k} = \int_{I_{j,k}} f(x)e_{j,k}(x) dx = \int_{I_{j,k}} (f(x) - f(x_{j,k}))e_{j,k}(x) dx,$$

also

$$|b_{j,k}| \leq M2^{j/2} \int_{I_{j,k}} |x - x_{j,k}|^\alpha dx = \frac{2^{-\alpha}M}{\alpha + 1} 2^{-j(\alpha+1/2)}.$$

Durch Betrachtung der Größe der Wavelet-Koeffizienten $b_{j,k}$ mit wachsendem j , die zu Intervallen $I_{j,k}$ in der Nähe der Stelle $x \in [0, 1)$ gehören, lässt sich tatsächlich eine Aussage zur "Glattheit" der Funktion f an der Stelle x machen. Wir werden dies im folgenden Kapitel genauer untersuchen.

BEMERKUNG 1.17. Die Struktur der Haar-Wavelets ist besonders eindrucksvoll: Wir definieren die Funktion $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\psi(x) = \chi_{[0,1/2)}(x) - \chi_{[1/2,1)}(x).$$

Dann gilt für alle $j \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq 2^j - 1$ die Identität

$$e_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \quad (\text{insbesondere } e_{0,0} = \psi).$$

D.h. alle Basisfunktionen (mit Ausnahme von $e_0 = \chi_{[0,1)}$) werden von einer einzigen Funktion ψ durch Skalierung des Arguments (mit 2^j) und Verschiebung (um $2^{-j}k$) bestimmt. Man nennt die Funktion ψ daher das Mutter-Wavelet.

Die erste Basisfunktion e_0 wird durch die charakteristische Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi(x) = \chi_{[0,1)}(x)$ definiert. Diese Funktion spielt wegen der beiden Gleichungen

$$(1.12) \quad \phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1), \quad \psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1)$$

eine ebenso wichtige Rolle. Sie wird manchmal das Vater-Wavelet oder auch die Skalierungsfunktion des Haar-Wavelets genannt. Ihre Bedeutung steckt hauptsächlich in der effizienten Berechnung der Waveletkoeffizienten. Hierauf gehen wir erst später ein.

BEMERKUNG 1.18. Ebenso wie im “diskreten Regime” ist auch der Zusammenhang der Wavelet-Koeffizienten zu den Integralmitteln von f einfach herzuleiten. Wie oben setzen wir

$$\begin{aligned} a_{j,k} &= 2^{j/2} \int_{I_{j,k}} f(x) dx \\ d_{j,k} &= \langle f, e_{j,k} \rangle = 2^{j/2} \left(\int_{I_{j+1,2k}} f(x) dx - \int_{I_{j+1,2k+1}} f(x) dx \right), \end{aligned}$$

Dann gelten einerseits die “Zerlegungs-Relationen”

$$\begin{aligned} a_{j,k} &= 2^{-1/2}(a_{j+1,2k} + a_{j+1,2k+1}), \\ d_{j,k} &= 2^{-1/2}(a_{j+1,2k} - a_{j+1,2k+1}). \end{aligned}$$

Hiermit können die Wavelet-Koeffizienten $d_{j,k}$ für $j < J$ rekursiv aus den Integralmitteln $a_{J,k}$ berechnet werden. Umgekehrt gelten die “Synthese-Relationen”

$$\begin{aligned} a_{j+1,2k} &= 2^{-1/2}(a_{j,k} + d_{j,k}), \\ a_{j+1,2k+1} &= 2^{-1/2}(a_{j,k} - d_{j,k}). \end{aligned}$$

Hiermit lassen sich die Integralmittel zu den kürzeren Intervallen (nämlich $I_{j+1,2k}$ und $I_{j+1,2k+1}$) aus dem Integralmittel $I_{j,k}$ und dem zugehörigen Waveletkoeffizienten berechnen.

Kontinuierliche Wavelet–Transformation

Bevor wir zur Konstruktion weiterer Wavelet-Basen (etwa von $L^2(\mathbb{R})$) gehen, wollen wir genauer auf den Informationsgehalt der inneren Produkte $\langle f, e_{j,k} \rangle$ wie in Bemerkung 1.16 eingehen. Dazu führen wir den folgenden Begriff ein.

DEFINITION 2.1. Gegeben sei ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine (Lebesgue-)integrierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$.

a) Falls für $\nu \in \mathbb{N}_0$ das Integral

$$M_\nu(f) := \int_I t^\nu f(t) dt$$

existiert, heißt es das ν -te Moment von f .

b) Falls für ein $L \in \mathbb{N}$ die Momente $M_k(f)$, $0 \leq k \leq L-1$, existieren und gleich Null sind, so besitzt die Funktion f L verschwindende Momente.

HILFSSATZ 2.2. Sei $I = (a, b)$ ein (beschränktes oder unbeschränktes) Intervall. Eine stetige integrierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt genau dann ein verschwindendes Moment, wenn $f = g'$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ gilt, die

$$\lim_{t \rightarrow a} g(t) = \lim_{t \rightarrow b} g(t) = 0$$

erfüllt.

Beweis: Die Funktion $g(t) = \int_a^t f(s) ds$ besitzt die geforderten Eigenschaften. \square

ÜBUNG 2.3. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3\sigma}} \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1 \right) \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2} \right)$$

zwei verschwindende Momente besitzt. Diese Funktion heißt im Englischen “Mexican hat” (deutsch: Sombrero?), da der Graph bei Rotation um die y -Achse ein entsprechendes Bild liefert.

Eine weitere Möglichkeit, Funktionen auf $I = \mathbb{R}$ mit verschwindendem Moment zu erhalten, wird in der folgenden Aufgabe behandelt.

ÜBUNG 2.4. Gegeben sei eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, für die die ersten L Momente existieren und die $M_0(f) \neq 0$ erfüllt. Weiter seien $c_k \in \mathbb{C}$, $s_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq K$. Dann gilt: Die Funktion

$$g(t) = \sum_{k=1}^K c_k f(t - s_k)$$

besitzt genau dann L verschwindende Momente, wenn

$$\sum_{k=1}^K c_k s_k^\nu = 0, \quad 0 \leq \nu \leq L-1,$$

gilt.

BEMERKUNG 2.5. Für integrierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (also $f \in L^1(\mathbb{R})$) ist die Fourier-Transformierte

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} dt, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

definiert. Wegen der Integrierbarkeit von f ist \hat{f} stetig und beschränkt. Die Eigenschaft $M_0(f) = 0$ ist gleichwertig mit der Bedingung $\hat{f}(0) = 0$.

Im nächsten Kapitel behandeln wir weitere Rechenregeln für die Fourier-Transformation. Z.B. folgt aus der Integrierbarkeit von $t^\nu f(t)$, $0 \leq \nu \leq L-1$, dass die Fourier-Transformierte \hat{f} mindestens $L-1$ -mal stetig differenzierbar ist. Die Eigenschaft, L verschwindende Momente zu haben, ist äquivalent zu der Beziehung

$$\frac{d^\nu}{d\xi^\nu} \hat{f}(0) = 0, \quad 0 \leq \nu \leq L-1.$$

Wir kommen nun zur ersten, sehr allgemeinen Definition eines Wavelets.

DEFINITION 2.6. (Wavelet)

Eine Funktion $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ heißt Wavelet, wenn $M_0(f) = 0$ gilt.

Der englische Begriff "Wavelet" bezieht sich auf die Form des Grafen von ψ , den man sich als "kleine Welle" vorstellen kann. Wie beim Haar-Wavelet wird die Stauchung und Verschiebung der Funktion ψ eine wichtige Rolle spielen. Dazu die folgende Kurzschreibweise.

BEZEICHNUNG 2.7. Gegeben sei eine Funktion $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$ verwenden wir die Bezeichnung

$$\psi_{a,b} := |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right).$$

Ohne die Gefahr von Verwechslungen werden wir später für $j, k \in \mathbb{Z}$ auch

$$\psi_{j,k} := 2^{j/2} \psi(2^j \cdot -k)$$

verwenden. Dies entspricht der Wahl $a = 2^{-j}$ und $b = 2^{-j}k$.

DEFINITION 2.8. Sei $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ein Wavelet. Die kontinuierliche Wavelet-Transformation (CWT) ist der lineare Operator W_ψ auf $L_2(\mathbb{R})$ mit

$$(W_\psi f)(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad a \neq 0, b \in \mathbb{R}.$$

ÜBUNG 2.9. Man berechne (mit Matlab) die kontinuierliche Wavelet-Transformation $W_\psi f$ zum Mexican-Hat Wavelet ψ und der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & t \in [-1, 1], \\ 2/3, & t \in (1, \pi/2), \\ 2 \sin(50t) + 3 \cdot \text{rand}(1), & t \in [\pi/2, 2\pi]. \end{cases}$$

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f . Zum Zeichnen der Wavelet-Transformation $W_\psi f$ verwende man die Darstellung der Funktionswerte auf einem Rechteck mit Achsen $-10 \leq \log_2 a \leq 0$ und $-5 \leq b \leq 10$ durch Grau- oder Farbwerte.

BEMERKUNG 2.10. (i) Für festes $a \neq 0$ ist die Funktion $b \mapsto (W_\psi f)(a, b)$ die Faltung von f mit der Funktion

$$\tilde{\psi}_a(x) = |a|^{-1/2} \overline{\psi\left(-\frac{x}{a}\right)}.$$

Für die L_1 - und die L_2 -norm von $\tilde{\psi}_a$ gilt

$$\|\tilde{\psi}_a\|_2 = \|\psi\|_2, \quad \|\tilde{\psi}_a\|_1 = |a|^{1/2} \|\psi\|_1.$$

Die Cauchy-Schwarz Ungleichung liefert die punktweise Abschätzung

$$(2.1) \quad |(W_\psi f)(a, b)| \leq \|\tilde{\psi}_a\|_2 \|f\|_2.$$

Weiterhin gilt mit den üblichen Abschätzungen für die Faltung von Funktionen

$$\|(W_\psi f)(a, \cdot)\|_2 = \|f * \tilde{\psi}_a\|_2 \leq \|\tilde{\psi}_a\|_1 \|f\|_2 = |a|^{1/2} \|\psi\|_1 \|f\|_2.$$

Insbesondere ist also die Funktion $(W_\psi f)(a, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ quadrat-integrierbar. Zur Integrierbarkeit über den gesamten Parameterbereich $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ werden wir später eine genaue Aussage kennen lernen.

(ii) Der Wert $(W_\psi f)(a, b)$ bestimmt (im Fall $\|\psi\|_2 = 1$) die Korrelation von f und $\tilde{\psi}_a$.

DEFINITION 2.11. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Hölder- (oder Lipschitz-) stetig zum Exponenten $0 < \alpha \leq 1$, geschrieben $f \in \text{Lip}^\alpha(\mathbb{R})$, wenn $K > 0$ existiert mit

$$(2.2) \quad |f(x) - f(y)| \leq K \cdot |x - y|^\alpha$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. f heißt Hölder-stetig zum Exponenten α an der Stelle x_0 , falls $K > 0$ existiert mit

$$(2.3) \quad |f(x) - f(x_0)| \leq K \cdot |x - x_0|^\alpha$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

BEISPIEL 2.12. a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x) = \sqrt{|x|}$ ist in jedem Punkt $x_0 \neq 0$ Hölder-stetig zum Exponenten 1, in $x_0 = 0$ jedoch nur Hölder-stetig zum Exponenten $\frac{1}{2}$.
b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar und f' beschränkt impliziert $f \in H^1(\mathbb{R})$ (Beweis mit MWS).

Die Einschränkung des Hölder-Exponenten α auf $(0, 1]$ in der obigen Definition ist sinnvoll, da aus der Bedingung 2.2 mit $\alpha > 1$ sofort die Differenzierbarkeit von f sowie die Beziehung $f' \equiv 0$ folgt, f also eine konstante Funktion ist. Um trotzdem Hölder-Klassen zu beliebigem Exponenten $\alpha > 0$ zu betrachten, verwendet man Ableitungen von f .

DEFINITION 2.13. Für $\alpha > 0$, $\alpha = r + \beta$ mit $r \in \mathbb{N}_0$ und $\beta \in (0, 1]$, definieren wir

$$\text{Lip}^\alpha(\mathbb{R}) := \{f \in C^r(\mathbb{R}); f^{(r)} \in \text{Lip}^\beta(\mathbb{R})\}.$$

f heißt Hölder-stetig zum Exponenten α an der Stelle x_0 , falls f in einer Umgebung von x_0 r -mal differenzierbar ist und $f^{(r)}$ an der Stelle x_0 Hölder-stetig zum Exponenten β ist.

Sowohl für die globale wie auch für die lokale Hölder-Stetigkeit liefert die kontinuierliche Wavelet-Transformation (fast) scharfe Charakterisierungen.

SATZ 2.14. (Globale Hölder-Stetigkeit) Gegeben sei ein Wavelet ψ mit $r + 1$ verschwindenden Momenten sowie beschränktem Moment $M_{r+1}(\psi)$. Weiter sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ beschränkt und stetig.

(i) Falls f Hölder-stetig zum Exponenten $r < \alpha \leq r + 1$ ist und $f^{(r)}$ beschränkt ist, so existiert $K > 0$ mit

$$(2.4) \quad |W_\psi f(a, b)| \leq K \cdot |a|^{\alpha + \frac{1}{2}}, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

(ii) Die Umkehrung gilt für $r < \alpha < r + 1$ und ψ mit kompaktem Träger: Falls eine Konstante $K > 0$ so existiert, dass (2.4) gilt, so ist f Hölder-stetig zum Exponenten α .

Die Aussage über die lokale Hölder-Stetigkeit wird etwas komplizierter.

SATZ 2.15. Gegeben sei ein Wavelet ψ mit kompaktem Träger und $r + 1$ verschwindenden Momenten (sowie beschränktem Moment $M_{r+1}(\psi)$). Weiter sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ sowie $x_0 \in \mathbb{R}$.

(i) Falls f Hölder-stetig zum Exponenten $r < \alpha = r + \beta \leq r + 1$ an der Stelle x_0 ist, so existieren $a_0 > 0$ und $K > 0$ so, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < |a| < a_0$ gilt

$$(2.5) \quad |W_\psi f(a, b)| \leq K \cdot |a|^{r + \frac{1}{2}} (|a|^\beta + |b - x_0|^\beta).$$

(ii) Es gilt die folgende Umkehrung: Falls es Konstanten $a_0, K > 0$ sowie $\gamma > r$ so gibt, dass

$$(2.6) \quad |W_\psi f(a, b)| \leq K \cdot |a|^{\gamma + \frac{1}{2}},$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < |a| < a_0$ gilt, und falls darüber hinaus $0 < \beta < 1$ existiert mit

$$(2.7) \quad |W_\psi f(a, b)| \leq K \cdot |a|^{r + \frac{1}{2}} \left(|a|^\beta + \frac{|b - x_0|^\beta}{1 + |\log |b - x_0||} \right)$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < |a| < a_0$, so ist f Hölder-stetig zum Exponenten $\alpha = r + \beta$ an der Stelle x_0 .

Die Beweise der Umkehrungen (ii) der obigen Sätze können wir erst nach weiteren Vorbereitungen (insb. Hilfsmittel aus der Fourier-Transformation) in Kapitel 3 angeben. Ohne weitere Vorbereitung können aber die Teile (i) schon mit einfachen Hilfsmitteln der Analysis bewiesen werden.

Beweis. Zu $x_0 \in \mathbb{R}$ wählen wir eine Umgebung U so, dass f in U mindestens r -mal differenzierbar und die r -te Ableitung Hölder-stetig zum Exponenten β ist. Unter den Voraussetzungen von Satz 2.14 kann $U = \mathbb{R}$ gewählt werden, ansonsten werde $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mit $\delta > 0$ gewählt. Die Taylorentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $b \in U$ lautet

$$f(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{f^{(j)}(b)}{j!} (x-b)^j + \int_b^x \frac{f^{(r)}(t)}{(r-1)!} (x-t)^{r-1} dt, \quad x \in U.$$

Die Voraussetzungen an ψ liefern für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, die Identität

$$(2.8) \quad \int_{\mathbb{R}} \psi_{a,b}(x) (x-b)^j dx = 0, \quad 0 \leq j \leq r.$$

Hieraus folgt insbesondere für $j = r$ und $U = \mathbb{R}$

$$(2.9) \quad \int_{\mathbb{R}} \left(\int_b^x \frac{f^{(r)}(t)}{(r-1)!} (x-t)^{r-1} dt \right) \psi_{a,b}(x) dx = 0.$$

Dann erhalten wir weiter für $U = \mathbb{R}$ aus den Voraussetzungen von Satz 2.14(i)

$$\begin{aligned} |W_\psi f(a, b)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\int_b^x \frac{f^{(r)}(t) - f^{(r)}(b)}{(r-1)!} (x-t)^{r-1} dt \right) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx \right| \\ &\leq K |a|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_b^x \frac{|t-b|^\beta}{(r-1)!} (x-t)^{r-1} dt \right)}_{\leq |x-b|^{\beta+r}/(r-1)!} \left| \psi \left(\frac{x-b}{a} \right) \right| dx \\ &= \tilde{K} |a|^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |y|^\alpha |\psi(y)| dy. \end{aligned}$$

Die Existenz von $M_{r+1}(\psi)$ sichert zu, dass das letzte Integral endlich ist. Die Konstante K in (2.4) hängt also nur von r , ψ und der Lipschitz-Konstante K der r -ten Ableitung von f ab. Damit ist Satz 2.14(i) bewiesen.

In Satz 2.15 wird vorausgesetzt, dass ψ kompakten Träger besitzt. Also existiert $a_0 > 0$ so, dass für alle $|a| \leq a_0$ und $b \in [x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]$ die Beziehung $\text{supp } \psi_{a,b} \subset U$ gilt. Wegen $0 < \beta \leq 1$ gilt die allgemeine Ungleichung

$$|x-y|^\beta \leq |x-z|^\beta + |z-y|^\beta.$$

Für alle $|a| \leq a_0$ und $b \in [x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]$ folgt dann wie beim vorherigen Beweisteil

$$\begin{aligned}
|W_\psi f(a, b)| &= \left| \int_U f(x) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx \right| \\
&= \left| \int_U \left(\int_b^x \frac{f^{(r)}(t) - f^{(r)}(x_0)}{(r-1)!} (x-t)^{r-1} dt \right) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx \right| \\
&\leq K |a|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_b^x \frac{|t-x_0|^\beta}{(r-1)!} (x-t)^{r-1} dt \right)}_{\leq (|x-b|^\beta + |b-x_0|^\beta) |x-b|^{r/(r-1)!}} \left| \psi \left(\frac{x-b}{a} \right) \right| dx \\
&= \tilde{K} \left(|a|^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |y|^\alpha |\psi(y)| dy + |b-x_0|^\beta |a|^{r+\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |y|^r |\psi(y)| dy \right).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung von Satz 2.15(i). \square

BEISPIEL 2.16. Das Signal `nbump3.mat` in der Wavelet-Toolbox von Matlab (siehe Ordner `wavedemo`) wird mit dem Haar-Wavelet analysiert. Wir rufen hierzu die Wavelet-Toolbox auf mit `wavemenu`.

Grundlagen der Fourier–Analysis

1. Fourier–Reihen

In den Grundvorlesungen werden häufig die Fourier–Reihen behandelt. Zu einer 2π –periodischen (Lebesgue–)integrierbaren Funktion sind die Fourierkoeffizienten

$$(3.1) \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

sowie die Fourierreihe

$$(3.2) \quad f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

definiert. Konvergenzeigenschaften der Fourierreihen werden ausführlich in H. Heuser, "Lehrbuch der Analysis", Band 2, Kapitel 17 behandelt (siehe auch Bogges, Narcowich, Kapitel 1). Wir beschränken uns auf die komplexe Darstellung der Fourier–Koeffizienten und verwenden die folgende Bezeichnung.

BEZEICHNUNG 3.1. *Der Vektorraum der trigonometrischen Polynome vom Grad $N \in \mathbb{N}_0$ wird mit*

$$\mathcal{T}_N := \left\{ \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}; c_k \in \mathbb{C} \text{ für } -N \leq k \leq N \right\}$$

bezeichnet.

Zur Betrachtung der punktweisen Konvergenz der Fourierreihe stellen wir die Partialsummen

$$(3.3) \quad s_N(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

dar mit Hilfe des Dirichlet–Kerns $D_N(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N e^{ikx} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$,

$$(3.4) \quad s_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt.$$

Ohne Beweis geben wir die folgenden grundlegenden Aussagen an.

SATZ 3.2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sei 2π –periodisch und Lebesgue–integrierbar auf $(0, 2\pi)$, also $f \in L^1(0, 2\pi)$.

a) *Riemann–Lebesgue*: Dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0 = \lim_{k \rightarrow -\infty} c_k$.

b) *Dirichlet-Regel: Ist f auf einer abgeschlossenen δ -Umgebung von x_0 von beschränkter Variation, so gilt*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x_0) = s(x_0) := \frac{f(x_{0+}) + f(x_{0-})}{2}.$$

Insbesondere also $s_N(x_0) \rightarrow f(x_0)$, wenn f in x_0 stetig und in einer δ -Umgebung von x_0 von beschränkter Variation ist.

BEMERKUNG 3.3. *Zum Begriff der beschränkten Variation: Für eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wird die Totalvariation definiert als*

$$\sup_P \sum_i |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

wobei das Supremum über alle Partitionen $P = \{x_0 < \dots < x_n\}$ des Intervalls $[a, b]$ gebildet wird. Man nennt f von beschränkter Variation (kurz $f \in BV[a, b]$), wenn die Totalvariation endlich ist. Funktionen von beschränkter Variation sind genau diejenigen Funktionen f , die sich als Differenz zweier monotoner Funktionen $f = g - h$ schreiben lassen. Sie dienen in erster Linie zur Definition der Riemann-Stieltjes Integrale. Für $f \in BV[a, b]$ gilt

- *Die Menge der Unstetigkeitsstellen von f ist höchstens abzählbar.*
- *In jedem Punkt $x_0 \in [a, b]$ existieren die einseitigen Grenzwerte $f(x_{0-})$ und $f(x_{0+})$.*
- *f ist fast überall differenzierbar.*

Beispiele: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \\ x^k \sin(1/x), & \text{falls } x \neq 0 \end{cases}$ ist für $k = 2$ von beschränkter Variation auf dem Intervall $[0, 1]$, jedoch nicht für $k = 1$.

Die "natürliche" Konvergenz im Raum $L^2(0, 2\pi)$ ist die Konvergenz im quadratischen Mittel, also bzgl. der L^2 -Norm:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - s_N\|_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - S_N(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Hier ergeben sich folgende Aussagen aufgrund der

- Orthogonalität der Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$,
- Vollständigkeit der Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$.

SATZ 3.4. *$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sei 2π -periodisch und quadrat-integrierbar auf $(0, 2\pi)$, also $f \in L^2(0, 2\pi)$. Dann gilt:*

a) *Orthogonalprojektion: Für jedes $N \in \mathbb{N}_0$ und $T \in \mathcal{T}_N$ gilt*

$$\|f - T\|_2^2 = \|f - s_N\|_2^2 + \|s_N - T\|_2^2.$$

Also ist s_N das eindeutig bestimmte Element von \mathcal{T}_N mit der Eigenschaft

$$\|f - s_N\|_2 = \inf_{T \in \mathcal{T}_N} \|f - T\|_2$$

(„Bestapproximation“), und es gilt

$$\langle f - s_N, T \rangle = 0, \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_N.$$

b) Konvergenz: $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - s_N\|_2 = 0$.

c) Besselsche Ungleichung: $\sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2$,

Parsevalsche Gleichung: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2$.

Aufgrund von Satz 3.4 ist die Abbildung

$$f \mapsto \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad (\text{Fourier-Koeffizienten von } f)$$

ein Isomorphismus von $L^2(0, 2\pi)$ und $l^2(\mathbb{Z})$; d.h. die quadrat-integrierbaren 2π -periodischen Funktionen sind genau die Fourierreihen $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ mit quadrat-summierbaren Koeffizienten.

BEMERKUNG 3.5. Es gilt

$$\mathbb{R}[0, 2\pi] \subset L^2(0, 2\pi) \subset L^1(0, 2\pi),$$

wobei $\mathbb{R}[0, 2\pi]$ den Raum der Riemann-integrierbaren Funktionen bezeichnet.

2. Fourier-Transformation in $L^1(\mathbb{R})$

Wir wenden uns nun der Fourier-Transformation (Lebesgue-)integrierbarer Funktionen auf \mathbb{R} zu.

Wir definieren, wie üblich,

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \right\}$$

Ein wichtiges Hilfsmittel stellt die folgende Aussage aus der Lebesgueschen Integrationstheorie dar.

HILFSSATZ 3.6. Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$ existiert $\phi \in C(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger so, dass $\|f - \phi\|_1 < \varepsilon$ gilt.

Beweis. Der Beweis erfolgt in fünf Schritten.

1. Wir wählen $r > 0$ so, dass $\int_{|x|>r} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}$ gilt, und setzen $f_1 := f|_{[-r,r]}$.

2. Wir wählen $N > 0$ so, dass mit

$$f_2(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } |f(x)| < N \text{ und } |x| \leq r, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

die Beziehung $\|f_1 - f_2\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$ gilt. Dazu schreiben wir

$$\|f_1\|_1 = \int_{-r}^r |f_1(x)| dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f_1(x)| dx$$

mit den messbaren Mengen $E_k := \{x \in [-r, r] \mid k-1 \leq |f_1(x)| < k\}$. Die Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite folgt aus $\|f_1\|_1 < \infty$. Also existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{E_k} |f_1(x)| dx = \int_{\substack{x \in [-r, r] \\ |f_1(x)| \geq N}} |f_1(x)| dx = \|f_1 - f_2\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

3. Zunächst setzen wir $F_2(x) = \int_{-r}^x f_2(t) dt$ (“Stammfunktion”). Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\psi_n(x) = n \left[F_2 \left(x + \frac{1}{n} \right) - F_2(x) \right] = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f_2(t) dt$$

stetig, und die Folge der Funktionen ψ_n ist gleichmäßig beschränkt durch N . Weiterhin ist $\psi_n(x) = 0$ für alle $x < -r-1$ und $x > r$. Also besitzt die Differenz $\psi_n - f_2$

die integrierbare Majorante $g(x) = \begin{cases} N & \text{für } x \in [-r-1, r] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

4. Lebesgues Satz zur Differentiation des unbestimmten Integrals (siehe z.B. Zygmund, Satz II.11.1, Seite 65) besagt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f_2(t) - f_2(x)| dt = 0 \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}.$$

Also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\psi_n(x) - f_2(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_x^{x+1/n} |f_2(t) - f_2(x)| dt = 0 \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hieraus folgt mit dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x) - f_2(x)| dx = 0.$$

5. Wähle nun $\phi = \psi_{n_0}$ so, dass $\|\psi_{n_0} - f_2\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann ist ϕ stetig, hat kompakten Träger und erfüllt

$$\|f - \phi\|_1 \leq \|f - f_1\|_1 + \|f_1 - f_2\|_1 + \|f_2 - \psi_{n_0}\|_1 < \varepsilon. \quad \square$$

BEMERKUNG 3.7. Ebenso kann auch $\phi \in C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, mit kompaktem Träger oder sogar $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ (= Testfunktionen mit kompaktem Träger) gefordert werden. So wird gezeigt, dass die Räume $C_0^k(\mathbb{R})$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $L^1(\mathbb{R})$ liegen.

ÜBUNG 3.8. Sei

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ 1, & 1/2 < t \leq 1, \end{cases}$$

und für $0 < \delta < 1/2$

$$g_\delta(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/2 - \delta, \\ \frac{t}{2\delta} - \frac{1}{4\delta} + \frac{1}{2}, & 1/2 - \delta < t \leq 1/2 + \delta, \\ 1, & 1/2 + \delta < t \leq 1. \end{cases}$$

a) Stellen Sie f und g_δ für $\delta = 0.1$ graphisch dar.

b) Zeigen Sie, dass $\|f - g_\delta\|_1 \rightarrow 0$ für $\delta \rightarrow 0$.

- c) Die oben angegebenen Funktionen g_δ sind stetig, aber nicht differenzierbar. Können Sie die Vorschrift für g_δ so ändern, dass $g_\delta \in C^1$ und immer noch gilt $\|f - g_\delta\|_1 \rightarrow 0$ für $\delta \rightarrow 0$?

Nach diesen Vorbemerkungen zur Struktur des Raumes $L^1(\mathbb{R})$ kommen wir zur Definition der Fourier-Transformation und der (formal) inversen Fourier-Transformation. Die Beziehung beider Transformationen zueinander wird erst in Satz 3.16 formuliert und in Abschnitt 3.4 bewiesen werden.

DEFINITION 3.9. (Fourier-Transformation, inverse FT)

- a) Die Fourier-Transformierte einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist definiert als

$$\hat{f}(\omega) = (\mathcal{F}f)(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

- b) Gegeben sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Dann definiert

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

die inverse Fourier-Transformierte von \hat{f} .

Grundlegende Eigenschaften der Fourier-Transformierten auf $L^1(\mathbb{R})$:

SATZ 3.10. Es sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und \hat{f} die Fourier-Transformierte von f . Dann gilt:

- a) \hat{f} ist gleichmäßig stetig und beschränkt, $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.
 b) Falls f' existiert und in $L^1(\mathbb{R})$ liegt, so ist

$$(\hat{f}')(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

- c) Riemann-Lebesgue: $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

Beweis. (a) Für $\delta > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \sup_{\omega} |\hat{f}(\omega + \delta) - \hat{f}(\omega)| &= \sup_{\omega} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} (e^{-i\delta x} - 1) f(x) dx \right| \\ (3.5) \qquad \qquad \qquad &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\delta x} - 1| \cdot |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Wegen $|e^{-i\delta x} - 1| \leq 2$ und $\int_{-\infty}^{\infty} 2|f(x)| dx < \infty$ folgt aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\delta x} - 1| \cdot |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\lim_{\delta \rightarrow 0} |e^{-i\delta x} - 1| \cdot |f(x)|}_{=0} dx = 0.$$

Also ist die gleichmäßige Stetigkeit von \hat{f} gezeigt. Die Ungleichung $\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{\omega} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \|f\|_1$ ist trivial.

Zum Beweis von (b) benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

HILFSSATZ 3.11. *Aus $f \in L^1(\mathbb{R})$ und der Existenz von $f' \in L^1(\mathbb{R})$ folgt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.*

Beweis Durch Betrachtung von $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ kann o.B.d.A. angenommen werden, dass f reellwertig ist. Der Beweis erfolgt durch Widerspruch. Wir nehmen an, es existiere eine Folge (x_n) mit $\lim x_n = \infty$ und $c > 0$ so, dass $f(x_n) \geq c > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wähle $R > 0$ so, dass $\int_R^\infty |f'(x)| dx < \frac{c}{2}$ erfüllt ist. Weiterhin wähle n_0 so, dass $x_{n_0} > R$ gilt. Dann gilt für alle $x > x_{n_0}$

$$f(x) = f(x_{n_0}) + \int_{x_{n_0}}^x f'(x) dx \geq c - \int_{x_{n_0}}^x |f'(x)| dx \geq \frac{c}{2}.$$

Damit wäre aber $f \notin L^1(\mathbb{R})$. \square

Nun folgt die Aussage (b) in Satz 3.10 durch partielle Integration (wieder begründet durch die Lebesgue-Integrierbarkeit von f und f'):

$$(f')^\wedge(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot (-i\omega)e^{-i\omega t} dt = i\omega \hat{f}(\omega).$$

(c) 1. Falls f' existiert und in $L^1(\mathbb{R})$ liegt, folgt für $\omega \neq 0$ sofort

$$|\hat{f}(\omega)| = \frac{1}{|\omega|} |(f')^\wedge(\omega)| \leq \frac{1}{|\omega|} \|f'\|_1 \rightarrow 0, \quad \text{für } |\omega| \rightarrow \infty.$$

2. Andernfalls wählen wir zu $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $g' \in L^1(\mathbb{R})$ so, dass $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega)| &\leq |\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega)| + |\hat{g}(\omega)| \\ &\leq \|f - g\|_1 + |\hat{g}(\omega)| < \varepsilon + |\hat{g}(\omega)|. \end{aligned}$$

Mit Teil 1. folgt $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{g}(\omega) = 0$ und hieraus die Behauptung. \square

BEMERKUNG 3.12. *Als Ergänzung zu Teil a) des obigen Satzes formulieren wir die folgende Verschärfung: Falls für ein $0 < \alpha \leq 1$ die Bedingung*

$$K := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|(1 + |x|^\alpha) dx < \infty$$

erfüllt ist, so gilt $\hat{f} \in \operatorname{Lip}^\alpha(\mathbb{R})$. Zum Beweis schätzen wir den Ausdruck in (3.5) weiter ab gemäß

$$\begin{aligned} \sup_{\omega} |\hat{f}(\omega + \delta) - \hat{f}(\omega)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\delta x} - 1| \cdot |f(x)| dx \\ &\leq \int_{|x| \leq 1/\delta} |\delta x| \cdot |f(x)| dx + \int_{|x| > 1/\delta} 2|f(x)| dx. \end{aligned}$$

Im ersten Integral folgt aus $|\delta x| \leq 1$ und $\alpha \in (0, 1]$ sofort $|\delta x| \leq |\delta x|^\alpha$, und im zweiten Integral folgt $2 \leq 2|\delta x|^\alpha$. Also erhalten wir die Abschätzung

$$\sup_{\omega} |\hat{f}(\omega + \delta) - \hat{f}(\omega)| \leq 2\delta^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha |f(x)| dx \leq 2K\delta^\alpha.$$

Das Resultat lässt sich sogar auf beliebige $\alpha > 0$ und die zugehörigen $\operatorname{Lip}^\alpha$ -Räume ausdehnen. Auf einen Beweis verzichten wir hier.

BEISPIEL 3.13. a) Obwohl $|\hat{f}(\omega)| \rightarrow 0$ für $\omega \rightarrow \pm\infty$, muss nicht $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ gelten:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \leq x, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \text{hat } \hat{f}(\omega) = \frac{1}{1-i\omega}.$$

b) Gauss-Funktion

Für $a > 0$ sei $g_a(x) := e^{-ax^2}$. Es gilt

$$\hat{g}_a(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\omega^2/4a}$$

(d.h. die Fourier-Transformierte der Gauss-Funktion ist wieder eine Gauss-Funktion).

Beweis. Wir definieren die Funktion

$$\begin{aligned} f(y) &:= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+xy} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-\frac{y}{2a})^2 + \frac{y^2}{4a}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{y^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{y^2/4a} \end{aligned}$$

zunächst für $y \in \mathbb{R}$. Beide Seiten der Identität definieren eine ganze Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, also gilt die Identität sogar für alle $y \in \mathbb{C}$. Setzen wir $y = -ix$ mit $x \in \mathbb{R}$ ein, so gibt dies die Behauptung. \square

ÜBUNG 3.14. Berechnen Sie \hat{f} für

$$f(t) = \begin{cases} \sin(3t), & -\pi \leq t \leq \pi, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEMERKUNG 3.15. Wir verwenden häufig den Satz von Fubini in der "einfachen Form"

$$\int_A \int_B h(x, y) dy dx = \int_B \int_A h(x, y) dx dy, \quad \text{falls } \int_{A \times B} |h(x, y)| dx dy < \infty.$$

Mit seiner Hilfe erhalten wir für $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ sofort die Identität

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{g}(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-itx} dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) g(x) dx. \end{aligned}$$

Dies ist eine Form der Plancherel-Identität, kurz $\langle f, \hat{g} \rangle = \langle \hat{f}, g \rangle$.

Der folgende Satz erklärt, dass die formale Definition der "inversen Fourier-Transformieren" in Definition 3.9 tatsächlich die inverse Transformation darstellt. Dies werden wir später auf den Raum der L^2 -Funktionen verallgemeinern.

SATZ 3.16. Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ gilt

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

in allen Stetigkeitspunkten von f .

Zum Beweis benötigen wir noch weitere Hilfsmittel, die im folgenden Abschnitt 3.3 erläutert werden. Vorher wollen wir aber noch weitere Eigenschaften und Rechenregeln der Fourier-Transformation für Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ festhalten. Dabei seien jeweils “natürliche” Voraussetzungen (etwa an die Existenz der Ableitungen und deren Integrierbarkeit) gestellt.

EIGENSCHAFTEN UND RECHENREGELN 3.17. *Es gelten die folgenden Rechenregeln:*

<i>Eigenschaft</i>	<i>Funktion</i>	<i>Fourier-Transformierte</i>
	$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
<i>Translation</i>	$f(t - u)$	$e^{-iu\omega} \hat{f}(\omega)$
<i>Modulation</i>	$e^{i\xi t} f(t)$	$\hat{f}(\omega - \xi)$
<i>Skalierung</i>	$f(t/s)$	$ s \hat{f}(s\omega)$
<i>Ableitung in der Zeit-Komponente</i>	$f^{(k)}(t)$	$(i\omega)^k \hat{f}(\omega)$
<i>Ableitung in der Frequenz-Komponente</i>	$(-it)^k f(t)$	$\frac{d^k}{d\omega^k} \hat{f}(\omega)$
<i>Komplex-Konjugierte</i>	$\overline{f(t)}$	$\overline{\hat{f}(-\omega)}$
<i>Reelle Funktion</i>	$f = \operatorname{Re} f$	$\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$
<i>Faltung</i>	$f * g(t)$	$\hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$
<i>Produkt</i>	$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}(\omega)$
<i>Inverse</i>	$\hat{f}(t)$	$2\pi f(-\omega)$

ÜBUNG 3.18. *Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Fourier-Transformierten:*

$$\mathcal{F}[f^{(p)}(t)](\omega) = (i\omega)^p \hat{f}(\omega) \quad (\text{Ableitungsformel im Zeit-Bereich}),$$

$$\mathcal{F}[(-it)^p f(t)](\omega) = \hat{f}^{(p)}(\omega) \quad (\text{Ableitungsformel im Frequenz-Bereich}).$$

3. Faltung und Faltungskerne

DEFINITION 3.19. (*Faltung*)

Für $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ist die Faltung definiert als

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

SATZ 3.20. (*Youngsche Ungleichung*) Für $1 \leq p, q, r \leq \infty$ gelte die Beziehung $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Dann gilt für alle $f \in L^p$ und $g \in L^q$

$$f * g \in L^r \quad \text{sowie} \quad \|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Speziell folgt hieraus:

- a) $f, g \in L^1 \Rightarrow f * g \in L^1$ und $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
 b) $f \in L^p, g \in L^q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow f * g \in L^\infty$ und $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Beweis: (siehe z.B. Zygmund, Satz II.1.15, Seite 37)

Wegen $|f * g| \leq |f| * |g|$ können wir ohne Einschränkung $f \geq 0$ und $g \geq 0$ annehmen. Durch die Gleichungen

$$\lambda = r, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{\nu} = \frac{1}{q} - \frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{1}{p},$$

werden Zahlen $1 \leq \lambda, \mu, \nu \leq \infty$ definiert, für die

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 1$$

gilt. Also können wir das Produkt $f(t)g(x-t)$ (unter Weglassen der Argumente t und $x-t$) schreiben als Produkt von 3 Faktoren

$$(f^{p/\lambda} g^{q/\lambda}) \cdot f^{p/\mu} \cdot g^{q/\nu}.$$

Die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung für 3 Faktoren (siehe Zygmund, Satz I.9.8, Seite 18) ergibt

$$f * g(x) \leq \left[\int_{\mathbb{R}} f^p(t) g^q(x-t) dt \right]^{1/\lambda} \left[\int_{\mathbb{R}} f^p(t) dt \right]^{1/\mu} \left[\int_{\mathbb{R}} g^q(x-t) dt \right]^{1/\nu}.$$

Die letzten beiden Faktoren sind gerade $\|f\|_p^{p/\mu}$ und $\|g\|_q^{q/\nu}$. Also erhalten wir (wegen $\lambda = r$)

$$\begin{aligned} \|f * g\|_r &\leq \|f\|_p^{p/\mu} \|g\|_q^{q/\nu} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f^p(t) g^q(x-t) dt dx \right)^{1/\lambda} \\ &= \|f\|_p^{p/\mu} \|g\|_q^{q/\nu} \left(\int_{\mathbb{R}} f^p(t) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g^q(x-t) dx}_{=\|g\|_q^q} dt \right)^{1/\lambda} \\ &= \|f\|_p^{p/\mu} \|g\|_q^{q/\nu} \|f\|_p^{p/\lambda} \|g\|_q^{q/\lambda} = \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

Damit ist die Young'sche Ungleichung bewiesen.

Die Spezialfälle sind sofort ersichtlich. \square

Um zu $f \in L^1(\mathbb{R})$ eine Funktion $\phi \in C^k(\mathbb{R})$ (oder $C^\infty(\mathbb{R})$) mit $\|f - \phi\|_1 < \varepsilon$ zu finden, werden häufig Faltungskerne verwendet.

DEFINITION 3.21. (*Approximative Einheit*)

Gegeben sei $g \in C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, mit $g \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$ und $\|g^{(\nu)}\|_1, \|g^{(\nu)}\|_\infty \leq c_\nu < \infty$ für $0 \leq \nu \leq k$. Weiter sei $g^{(\nu)}(x) = \mathcal{O}(|x|^{-\nu-2})$ für $x \rightarrow \pm\infty$.

Zu $\alpha > 0$ sei

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} g\left(\frac{x}{\alpha}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann heißt $(g_\alpha)_{\alpha>0}$ *approximative Einheit*.

HILFSSATZ 3.22. Definiert $g \in C^k(\mathbb{R})$ eine approximative Einheit $(g_\alpha)_{\alpha>0}$, so gilt für $f \in L^1(\mathbb{R})$

- a) $f * g_\alpha \in C^{k+1}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ für jedes $\alpha > 0$;
 b) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f * g_\alpha(x) = f(x)$ in jedem Stetigkeitspunkt von f ;
 c) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|f - f * g_\alpha\|_1 = 0$.

Beweis. a) $\|g_\alpha\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} g\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \|g\|_1 < \infty$ impliziert $f * g_\alpha \in L^1$. Für $k = 1$ erhält man

$$\begin{aligned} |f * g_\alpha(x + \delta) - f * g_\alpha(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [g_\alpha(x + \delta - t) - g_\alpha(x - t)] dt \right| \\ &\leq \|f\|_1 \sup_t |g_\alpha(x + \delta - t) - g_\alpha(x - t)| \leq c_1 \cdot \delta \cdot \|f\|_1, \end{aligned}$$

somit ist $f * g_\alpha$ gleichmäßig Lipschitz stetig.

b) f sei stetig in x . Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\eta > 0$ mit $|f(x) - f(x - y)| < \varepsilon$ für alle $|y| < \eta$. Es gilt

$$\begin{aligned} |f * g_\alpha(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(x - t) - f(x)] \cdot g_\alpha(x - t) dt \right| \\ &\leq \int_{|t| \leq \eta} |f(x - t) - f(x)| g_\alpha(t) dt + \int_{|t| > \eta} |f(x - t) - f(x)| g_\alpha(t) dt \\ &\leq \varepsilon + \int_{|t| > \eta} |f(x - t)| g_\alpha(t) dt + |f(x)| \int_{|t| > \eta} g_\alpha(t) dt \\ &\leq \varepsilon + \|f\|_1 \sup_{|t| > \eta} g_\alpha(t) + |f(x)| \int_{|t| > \frac{\eta}{\alpha}} g(t) dt \\ &= \varepsilon + \|f\|_1 \sup_{|t| > \frac{\eta}{\alpha}} \frac{g(t)}{\alpha} + |f(x)| \int_{|t| > \frac{\eta}{\alpha}} g(t) dt. \end{aligned}$$

c) wird nicht bewiesen. □

BEISPIEL 3.23. Der Gauß-Kern definiert die approximative Einheit (mit $\sqrt{\alpha}$ als Skalierungsfaktor zum Index α)

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

BEMERKUNG 3.24. $L^1(\mathbb{R})$ ist eine Faltungsalgebra (d.h. ein Vektorraum mit Ringstruktur); hier ist die Multiplikation von Funktionen als Faltung erklärt. Die Faltungsalgebra besitzt kein Einselement. Hingegen wird durch jede approximative Einheit $(g_\alpha)_{\alpha > 0}$ das Einselement im Sinne von Hilfssatz 3.22 approximiert.

Anstelle des Einselements führt man die Delta-Distribution ein, die jedoch kein Element des Raumes $L^1(\mathbb{R})$ ist. Genauer bezeichnet

$$\delta : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \delta(f) = f(0),$$

ein stetiges lineares Funktional auf dem Raum $C_0^\infty(\mathbb{R})$ der Testfunktionen (der mit geeigneter Topologie versehen wird: dies leistet die Funktionalanalysis!) Durch die Verwendung der Schreibweise $\delta(f) =: \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$ ergibt sich (formal) die Beziehung

$$\delta * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t) \cdot \delta(t) dt = f(x).$$

Man beachte aber, dass diese Beziehung nicht im Sinne der Lebesgue-Integrale zu verstehen ist.

Wir sind schließlich in der Lage, den Beweis von Satz 3.16 zur inversen Fourier-Transformation auszuführen.

Beweis von Satz 3.16. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Weiter sei f stetig in x . Setze $h_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} e^{itx} e^{-\alpha t^2}$ mit $\alpha > 0, t \in \mathbb{R}$. Dann ist $\hat{h}_\alpha(y) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-(y-x)^2/4\alpha} = g_\alpha(y-x)$ mit $g_\alpha(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-x^2/4\alpha}$ und es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_\alpha(y) dy = 1$. Somit ist $(g_\alpha)_{\alpha>0}$ eine approximative Einheit und

$$\begin{aligned} f * g_\alpha(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g_\alpha(x-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \hat{h}_\alpha(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) h_\alpha(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} e^{-\alpha y^2} dy. \end{aligned}$$

Für $\alpha \rightarrow 0$ konvergiert die linke Seite gegen $f(x)$. Wegen $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ konvergiert die rechte Seite für $\alpha \rightarrow 0$ gegen $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy$. \square

Zum Abschluss des Abschnittes über die Faltung geben wir die Verbindung zur Fourier-Transformation.

SATZ 3.25. (*Faltungssatz*)

Für $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ gilt $(f * g)^\wedge(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$.

Beweis. Satz von Fubini. \square

4. Fourier-Transformation in $L^2(\mathbb{R})$

Wie bei den Fourier-Reihen ist auch bei der FT der "natürliche" Definitionsbereich der Raum $L^2(\mathbb{R})$ der quadrat-integrierbaren Funktionen. Wegen $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ ist die Definition der FT auf $L^2(\mathbb{R})$ nun komplizierter.

HILFSSATZ 3.26. Die Autokorrelation von $f \in L^2(\mathbb{R})$ ist definiert als

$$F(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} f(x+t) dt.$$

F ist gleichmäßig stetig und beschränkt mit $|F(x)| \leq \|f\|_2^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Die Beschränktheit folgt aus

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \cdot |f(x+t)| dt \\ &\stackrel{CS}{\leq} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Die gleichmäßige Stetigkeit folgt aus

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot |f(x+h+t) - f(x+t)| dt \\ &\stackrel{CS}{\leq} \|f\|_2 \|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_2 \end{aligned}$$

mit Hilfe eines Satzes der Lebesgue-Integration:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_2 = 0. \quad \square$$

Die Fourier-Transformation \mathcal{F} ist ein linearer Operator auf $L^1(\mathbb{R})$. Die folgende Aussage liefert die Beschränktheit des Operators bezüglich der L^2 -Norm. Dies ist die wesentliche Grundlage zur Definition der Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$.

SATZ 3.27. Für $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ gilt $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$; genauer: es gilt die Parseval-Identität

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \|f\|_2^2.$$

Beweis. \hat{f} ist stetig und beschränkt nach Satz 3.10 a). Wir verwenden die approximative Einheit $g_\alpha(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-x^2/4\alpha}$, $\alpha > 0$, also $\hat{g}_\alpha(y) = e^{-\alpha y^2}$. Dann ist $\hat{g}_\alpha |\hat{f}|^2 \in L^1(\mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_\alpha(x) |\hat{f}(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_\alpha(x) \hat{f}(x) \overline{\hat{f}(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_\alpha(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itx} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)} e^{ixu} du \right) \\ \stackrel{\text{Fubini}}{=} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(u)} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_\alpha(x) e^{ix(u-t)} dx \right)}_{=2\pi g_\alpha(u-t), \text{ nach Satz 3.16}} du dt \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)} g_\alpha(u-t) du dt \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(x+t)} dt}_{=: \overline{F(x)} \text{ (Autokorrelation)}} dx. \end{aligned}$$

F ist laut Lemma 3.26 stetig und beschränkt. Somit folgt aus Hilfssatz 3.22

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_\alpha(x) |\hat{f}(x)|^2 dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(x) \overline{F(x)} dx = 2\pi \overline{F(0)} = 2\pi \|f\|_2^2.$$

Darüber hinaus gilt die punktweise Konvergenz

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \hat{g}_\alpha(x) |\hat{f}(x)|^2 = |\hat{f}(x)|^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Anwendung von Fatous Lemma ergibt zunächst die Abschätzung

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \hat{g}_\alpha(x) |\hat{f}(x)|^2 dx \leq \liminf_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_\alpha(x) |\hat{f}(x)|^2 dx = 2\pi \|f\|_2^2.$$

Also gilt $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Aus $\hat{g}_\alpha(x) |\hat{f}(x)|^2 \leq |\hat{f}(x)|^2$ für alle $\alpha > 0$ folgt mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz schließlich

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_\alpha(x) |\hat{f}(x)|^2 dx = 2\pi \|f\|_2^2. \quad \square$$

BEMERKUNG 3.28. $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \rightarrow L^2$ ist ein linearer beschränkter Operator; seine Norm ist

$$\|\mathcal{F}\|_{L^1 \cap L^2 \rightarrow L^2} = \sup_{\substack{f \in L^1 \cap L^2 \\ \|f\|_2 = 1}} \|\mathcal{F}f\|_2 = \sqrt{2\pi}.$$

Weil $L^1 \cap L^2$ dicht in L^2 liegt, kann \mathcal{F} eindeutig auf $L^2(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden (stetige Ergänzung) unter Beibehaltung der Norm. Konkret lässt sich diese Fortsetzung durch verschiedene Approximationen $f_n \xrightarrow{L^2} f$ mit $f_n \in L^1 \cap L^2$ angeben. Dies führt zu (äquivalenten) Definitionen der Fourier-Transformierten von $f \in L^2(\mathbb{R})$. Wir geben zwei Standardformen an.

i) Gegeben sei $f \in L^2(\mathbb{R})$. Für $N \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq N, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $f_N \in L^1 \cap L^2$ und $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\|_2 = 0$. Aus der Parseval-Identität folgt, dass die Funktionenfolge $(\hat{f}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R})$ ist. Die Vollständigkeit von $L^2(\mathbb{R})$ sichert die Existenz der Grenzfunktion (im Sinne der L^2 -Konvergenz) $\hat{f} := \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}_N \in L^2(\mathbb{R})$ zu. Dies liefert die Definition

$$(3.6) \quad \hat{f}(\omega) := \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}_N(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(t) e^{-it\omega} dt$$

der Fourier-Transformierten von $f \in L^2(\mathbb{R})$. Diese Definition ist nicht punktweise, sondern bzgl. der Konvergenz im quadratischen Mittel zu verstehen.

ii) Sei wieder $f \in L^2(\mathbb{R})$ gegeben. Mit dem Gauss-Kern $g_a(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$, erhalten für das Produkt $f_a = f \cdot g_a$ sowohl $f_a \in L^1 \cap L^2$ als auch $\lim_{a \rightarrow 0} \|f - f_a\|_2 = 0$. Deshalb wird durch

$$(3.7) \quad \hat{f}(\omega) := \lim_{a \rightarrow 0} \hat{f}_a(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-at^2} e^{-it\omega} dt$$

eine (zu (3.6) äquivalente) Definition der Fourier-Transformierten von $f \in L^2(\mathbb{R})$ gegeben. Wiederum ist die Definition nicht punktweise, sondern im Sinne der Konvergenz im quadratischen Mittel zu verstehen.

DEFINITION 3.29. Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ ist die Fourier-Transformierte $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ durch eine der (äquivalenten) Definitionen (3.6) und (3.7) gegeben.

Mit den bisherigen Vorbereitungen folgt nun der Hauptsatz der Fourier-Transformation sehr einfach.

SATZ 3.30. (Hauptsatz zur FT)

Der Operator $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ ist ein Isomorphismus des Hilbertraums $L^2(\mathbb{R})$ (d.h. eine lineare beschränkte bijektive Abbildung mit beschränkter Umkehr-Abbildung); weiterhin gilt

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

d.h. der Operator $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}$ ist eine Isometrie.

Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}^{-1}g = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}g)^-,$$

wobei $h^-(x) = h(-x)$ die Spiegelung von h an der y -Achse bezeichnet.

Beweis. Zu beweisen ist nur die Surjektivität und die Formel für \mathcal{F}^{-1} . Zu $g \in L^2(\mathbb{R})$ setze $h(x) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}g)^-$ und zeige $\|\hat{h} - g\|_2 = 0$. \square

KOROLLAR 3.31. Für $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ gelten

- a) $\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi\|f\|_2^2$ (Parseval-Identität);
 b) $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt = 2\pi\langle f, g \rangle$.

Beweis mit

$$\langle f, g \rangle = \frac{\|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2}{4} + \frac{\|f - ig\|_2^2 - \|f + ig\|_2^2}{4i}. \square$$

ÜBUNG 3.32. Sei

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte von ϕ .
 b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2} dy$$

unter Anwendung der Parsevalschen Gleichung.

5. Unschärferelation und Zeit-Frequenz-Atome

Der Satz von Paley-Wiener besagt, dass die FT $\hat{f}(\omega)$ einer Funktion $f(t)$ mit kompaktem Träger eine (in ganz \mathbb{C}) analytische Funktion ist. Insbesondere kann $\hat{f}(\omega)$ nur isolierte Nullstellen haben, also nicht kompakten Träger in \mathbb{R} haben.

Es existieren verschiedene Ansätze, das gleichzeitige Lokalisierungsverhalten einer Funktion $f(t)$ (im Zeitbereich) und ihrer Fourier-Transformation $\hat{f}(\omega)$ (im Frequenzbereich) zu quantifizieren.

5.1. Slepian-Pollak-Landau. Man definiert die "Abschneide-Operatoren"

$$P_T f(t) = \begin{cases} f(t), & |t| \leq T, \\ 0, & |t| > T, \end{cases}$$

$$(\hat{P}_\Omega f)(t) = f * \mathcal{F}^{-1}(\chi_{[-\Omega, \Omega]})(t),$$

wobei $\mathcal{F}^{-1}(\chi_{[-\Omega, \Omega]})(x) = \frac{\sin x\Omega}{2x\Omega}$. Als Maß für die Konzentration von f auf das "Zeit-Frequenz-Fenster"

$$[-T, T] \times [-\Omega, \Omega] \subset \mathbb{R}^2$$

wird die ‐Teilenergie‐ $\|\hat{P}_\Omega P_T f\|_2^2 / \|f\|_2^2$ definiert. Man kann nachweisen, dass der zusammengesetzte Operator $\hat{P}_\Omega P_T$ selbstadjungiert ist. Deshalb ist der Maximalwert der möglichen Teilenergie der größte Eigenwert dieses Operators. (Hier wird der Rayleigh-Quotient benutzt, der aus der Numerik I für symmetrische Matrizen eingeführt wurde.) Die zugehörige Funktion f , für die solch ein Maximum angenommen wird, ist eine Eigenfunktion zum größten Eigenwert. Es ergeben sich die sog. ‐spheroidal wave functions‐, die durch gewisse Differentialgleichungen beschrieben werden.

5.2. Standardabweichung der Verteilungsdichte. Wir definieren die zentrierten Momente (wie in der Stochastik üblich) zu den zwei Dichtefunktionen $|f(t)|^2 / \|f\|_2^2$ bzw. $|\hat{f}(\omega)|^2 / \|\hat{f}\|_2^2$.

DEFINITION 3.33. Gegeben sei $h \in L^2(\mathbb{R})$ mit $th(t), \omega\hat{h}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$. Wir setzen

$$(3.8) \quad t^*(h) := \frac{1}{\|h\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} t|h(t)|^2 dt,$$

$$(3.9) \quad \omega^*(\hat{h}) := \frac{1}{\|\hat{h}\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega|\hat{h}(\omega)|^2 d\omega,$$

sowie

$$(3.10) \quad \Delta(h) := \left(\frac{1}{\|h\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*(h))^2 |h(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

$$(3.11) \quad \Delta(\hat{h}) := \left(\frac{1}{\|\hat{h}\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega^*(\hat{h}))^2 |\hat{h}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}.$$

h wird ein Zeit-Frequenz-Atom genannt; sein ‐Zeit-Frequenz-Zentrum‐ ist der Punkt $(t^*(h), \omega^*(\hat{h}))$; sein ‐Zeit-Frequenz-Fenster‐ ist das Rechteck

$$[t^*(h) - \Delta(h), t^*(h) + \Delta(h)] \times [\omega^*(\hat{h}) - \Delta(\hat{h}), \omega^*(\hat{h}) + \Delta(\hat{h})].$$

Die Größen $\Delta(h), \Delta(\hat{h})$ beschreiben eine Unschärfe-Relation, die in Beziehung zur Heisenbergschen Unschärferelation (1927) der Quantenmechanik steht.

THEOREM 3.34. Falls $h \in L^2(\mathbb{R})$ die Bedingungen in Definition (3.33), erfüllt, so ist

$$\Delta(h)\Delta(\hat{h}) \geq \frac{1}{2}.$$

Die untere Schranke 1/2 wird genau für die Funktion

$$h(t) = ce^{iat} e^{-\alpha(t-b)^2}$$

angenommen, wobei $a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\alpha > 0$ ist.

Beweis. O.B.d.A. sei $\|h\|_2 = 1$, also $\|\hat{h}\|_2^2 = 2\pi$. Weiterhin kann $t^*(h) = 0$ und $\omega^*(\hat{h}) = 0$ durch Verschiebung bzw. Modulation (Multiplikation mit $e^{i\omega^* t}$) erreicht werden.

Die Voraussetzungen an h liefern

$$\begin{aligned} th(t) &\in L^2 && \text{und} \\ \omega \hat{h}(\omega) &\in L^2 &\Leftrightarrow & h' \in L^2. \end{aligned}$$

Für die Hilfsfunktion $g(t) := t|h(t)|^2$ gilt

$g \in L^1$, weil h und $th(t)$ in L^2 liegen (Cauchy-Schwarz-Ungl.),

$$\frac{d}{dt}g(t) = \underbrace{|h(t)|^2}_{\in L^1} + 2\operatorname{Re} \left[\underbrace{th(t)}_{\in L^2} \underbrace{h'(t)}_{\in L^2} \right] \in L^1.$$

Hieraus folgt zunächst

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} g(t) = 0.$$

Wir erhalten also

$$\Delta^2(\hat{h}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{h}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |h'(t)|^2 dt = \|h'\|_2^2,$$

indem wir die Parseval-Identität anwenden, und hieraus

$$\begin{aligned} \Delta(h) \cdot \Delta(\hat{h}) &= \|th(t)\|_2 \cdot \|h'\|_2 \stackrel{C.S.}{\geq} \int_{-\infty}^{\infty} |th(t)\overline{h'(t)}| dt \\ &\geq -\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} th(t)\overline{h'(t)} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\|h\|_2^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}g(t) dt \right) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

wegen $\|h\|_2 = 1$ und $\int_{-\infty}^{\infty} g'(t) dt = 0$.

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn

- (i) $-\operatorname{Re} th(t)\overline{h'(t)} = |th(t)\overline{h'(t)}|$ und somit die zweite Ungleichung eine Gleichheit wird, und
- (ii) $|th(t)| = \alpha|h'(t)|$ mit $\alpha > 0$ und somit die Cauchy-Schwarz-Ungleichung eine Gleichung wird.

Somit ist $-th(t)\overline{h'(t)}$ reell, nicht negativ für alle $t \in \mathbb{R}$, und

$$\begin{aligned} th(t)\overline{h'(t)} &= -|th(t)\overline{h'(t)}| - \alpha|h'(t)|^2 = -\alpha h'(t)\overline{h'(t)} \\ \stackrel{\text{mit(ii)}}{\Rightarrow} th(t) &= -\alpha h'(t), \text{ also } h' \text{ stetig} \\ \Rightarrow h(t) &= ce^{-t^2/(2\alpha)}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \square \end{aligned}$$

BEISPIEL 3.35. Das Gaußfenster $g_\alpha(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-t^2/4\alpha}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(x) dx = 1$ hat $t^* = 0$ (wegen $g_\alpha(x) = g_\alpha(-x)$). Es gilt $\hat{g}_\alpha(\omega) = e^{-\alpha\omega^2}$. Also ist $\omega^* = 0$ (wegen $\hat{g}_\alpha(\omega) = \hat{g}_\alpha(-\omega)$), und $\Delta(g_\alpha) = \alpha^{1/2}$, $\Delta(\hat{g}_\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$.

6. Die gefensterterte Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation liefert Informationen über den Gesamt-Frequenzinhalt eines Signals. Für eine detailliertere Analyse von Signalen ist jedoch der zeitliche Verlauf des Frequenzinhalts von Interesse. Das führt zu dem Begriff der Zeit-Frequenz-Analyse.

Als erste Methode zur Zeit-Frequenz-Analyse von Signalen hat Dennis Gabor 1946 die gefensterterte (oder Kurzzeit-) Fourier-Transformation eingeführt (im Englischen: 'windowed Fourier transform' = WFT, 'short time Fourier transform' = STFT).

DEFINITION 3.36. Sei $g \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\|g\|_2 = 1$ eine Hilfsfunktion. Die gefensterterte Fourier-Transformierte der Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ bzgl. g wird durch

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_g f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \mathcal{F}_g f(\omega, t) &:= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \overline{g(u-t)} e^{-i\omega u} du \end{aligned}$$

definiert. Die Abbildung $f \mapsto \mathcal{F}_g f$ heißt die gefensterterte Fourier-Transformation bzgl. der Fenster-Funktion g (die so gewählt wird, dass sie eine Lokalisierung im Zeitbereich bewirkt; z.B. als Gauss-Funktion). Mit

$$g_{\omega,t}(u) := g(u-t)e^{i\omega u} \quad \text{erhält man} \quad \mathcal{F}_g f(\omega, t) = \langle f, g_{\omega,t} \rangle.$$

Die Funktion $g_{\omega,t}$ kann man sich als harmonische Schwingung der Frequenz ω , gesehen durch das Fenster g beim Zeitpunkt t , vorstellen (falls g um $t_0 = 0$ lokalisiert ist).

ÜBUNG 3.37. Beweisen Sie, dass gilt:

$$\mathcal{F}_g f(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-it\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u) \overline{\hat{g}(u-\omega)} e^{itu} du.$$

Somit stellt \hat{g} eine Fenster-Funktion im Frequenzbereich dar.

ÜBUNG 3.38. a) Für $g(u) := e^{-u^2}$ stellen Sie $\mathbf{Re}(g_{\omega,t})$ graphisch dar (für festes $(\omega, t) \in \mathbb{R}^2$).

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 2-t, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Skizzieren Sie das Heisenberg-Fenster (= Zeit-Frequenz-Fenster) von f . Berechnen Sie dazu zunächst alle erforderlichen Größen: den mittleren Zeitpunkt $t^*(f)$, die mittlere Frequenz $\omega^*(f)$, die Signalbreite $\Delta(f)$, die Bandbreite $\Delta(\hat{f})$ (evtl. mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems). Verifizieren Sie in diesem konkreten Fall die Heisenbergsche Unschärferelation.

c) Sei $g \in L^2(\mathbb{R})$ im Zeitbereich um $t^*(g) = 0$ mit Signalbreite $\Delta(g)$ und im Frequenzbereich um $\omega^*(g) = 0$ mit Bandbreite $\Delta(\hat{g})$ lokalisiert. Sei $(\omega, t) \in \mathbb{R}^2$ fest gewählt. Zeigen Sie, dass die Funktion $g_{\omega,t}$ um den Punkt (t, ω) lokalisiert ist, mit Signalbreite $\Delta(g_{\omega,t}) = \Delta(g)$ und Bandbreite $\Delta(\hat{g}_{\omega,t}) = \Delta(\hat{g})$.

Zusätze zu Kapitel 2: Kontinuierliche Wavelet–Transformation

Motivation. Das Abklingverhalten der Fourier–Transformation $\hat{f}(\omega)$ für $|\omega| \rightarrow \infty$ spiegelt die Glattheit von f wider, ohne jedoch die Stelle der “Singularität” von f (Unstetigkeitsstelle von f , f' etc.) anzugeben. Dagegen stellt die Wavelet–Transformation (WT) sowohl Informationen über die Art der Singularität, als auch über die Stelle, an der die Singularität vorliegt, bereit.

Mit Hilfe der Fourier–Transformation wird nun die folgende neue Definition eines Wavelets angegeben.

DEFINITION 2.17. (*Wavelet*)

Eine Funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ heißt Wavelet, wenn

$$(2.10) \quad 0 < C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

ÜBUNG 2.18. Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ so, dass

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 = \text{konstant} =: D_\psi.$$

Zeigen Sie, dass ψ ein Wavelet ist mit $C_\psi = 2 \ln 2 \cdot D_\psi$.

BEMERKUNG 2.19. Wegen $\hat{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$ ist das Integral in (2.10) genau dann endlich, wenn

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

für ein $\delta > 0$ gilt. Entscheidend ist also das Verhalten von $\hat{\psi}$ in einer Umgebung von $\omega = 0$. Falls $\hat{\psi}$ stetig in 0 ist, so ist $\hat{\psi}(0) = M_0(\psi) = 0$ notwendig für die Existenz des Integrals, also hat ψ ein verschwindendes Moment. Dies zeigt, dass beide Definitionen 2.6 und 2.17 ungefähr die gleiche Funktionenklasse beinhalten.

BEMERKUNG 2.20. Die kontinuierliche Wavelet–Transformation ist definiert als

$$(2.11) \quad W_\psi f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle, \quad \psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Die FT von $\psi_{a,b}$ lässt sich mit den einfachen Rechenregeln berechnen als

$$(2.12) \quad \hat{\psi}_{a,b}(\omega) = |a|^{1/2} e^{-ib\omega} \hat{\psi}(a\omega).$$

Die Plancherel-Identität führt (2.11) über in

$$(W_\psi f)(a, b) = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{a,b} \rangle = \frac{\sqrt{|a|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)} e^{ib\omega} d\omega.$$

Dies ist eine Formel der “Kurzzeit-Fouriertransformation” (oder Fenster-FT) für \hat{f} , wobei die Fensterfunktion $g_a(\omega) := \sqrt{|a|} \hat{\psi}(a\omega)$ mit dem Skalierungsparameter a gedehnt oder gestaucht wird.

Gleichzeitig bewirkt der Skalierungsfaktor a eine Frequenzverschiebung. Sei dazu $\|\psi\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{\psi}\|_2^2 = 1$ vorausgesetzt. Die Parameter

$$t^* = t^*(\psi) = \int_{\mathbb{R}} t |\psi(t)|^2 dt, \quad \Delta(\psi) = \left(\int_{\mathbb{R}} (t - t^*)^2 |\psi(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

wurden in (3.8) und (3.10) definiert. Im Unterschied zu den Definitionen für $\hat{\psi}$ setzen wir

$$(2.13) \quad \omega_+^* = \omega_+^*(\hat{\psi}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega, \quad \Delta_+(\hat{\psi}) = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (\omega - \omega_+^*)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}.$$

Hier werden also nur Frequenzen $\omega \in [0, \infty)$ berücksichtigt. Dies ist insbesondere für reelle Funktionen $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sinnvoll, da ja durch $\hat{\psi}(-\omega) = \overline{\hat{\psi}(\omega)}$ die negativen Frequenzen keine zusätzliche Information enthalten. Ähnlich zum Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation zeigt man

$$(2.14) \quad \Delta(\psi) \Delta_+(\hat{\psi}) > \frac{1}{2}$$

für alle ψ . (Gleichheit wird nie erreicht.)

Wird ψ nun mit $a \neq 0$ skaliert und $b \in \mathbb{R}$ verschoben, so ergibt sich durch einfache Rechnung

$$\begin{aligned} t^*(\psi_{a,b}) &= b + a \cdot t^*(\psi), & \Delta(\psi_{a,b}) &= a \cdot \Delta(\psi), \\ \omega_+^*(\hat{\psi}_{a,b}) &= \omega_+^*(\hat{\psi})/a, & \Delta_+(\hat{\psi}_{a,b}) &= \Delta_+(\hat{\psi})/a. \end{aligned}$$

Das Zeit-Frequenz-Fenster von $\psi_{a,b}$ ist also gegeben durch

$$(b + a \cdot [t^*(\psi) - \Delta(\psi), t^*(\psi) + \Delta(\psi)]) \times \left(\frac{1}{a} \cdot [\omega_+^*(\hat{\psi}) - \Delta_+(\hat{\psi}), \omega_+^*(\hat{\psi}) + \Delta_+(\hat{\psi})] \right).$$

Insbesondere ergibt die Skalierung wegen $\omega_+^*(\hat{\psi}) > 0$ nicht nur eine Dehnung/Stauchung des Frequenzintervalls, sondern gleichzeitig eine Verschiebung auf der positiven Frequenzachse. Skaliert man z.B. mit Zweierpotenzen $2, 4, 8, \dots$, so entstehen “Oktaaven” im Frequenzbereich, die zur Analyse akustischer Signale sinnvoll verwendet werden können. Diese Bedeutung des Skalierungsparameters a als gleichzeitiger Dehnungs- und Verschiebungs-Parameter im Frequenzbereich ist zentral zum Verständnis der Wavelet-Transformation.

ÜBUNG 2.21. Führen Sie den Beweis der modifizierten Unschärferelation (2.14) aus.

Die Frage nach der Injektivität von W_f wird durch die Calderon¹-Identität beantwortet, die für die CWT von Grossmann und Morlet (1984) angegeben wurde.

SATZ 2.22. Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ ein Wavelet mit C_ψ in (2.10). Dann gilt für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(a, b) \overline{(W_\psi g)(a, b)} \frac{da}{a^2} = C_\psi \langle f, g \rangle.$$

Beweis. Die Funktionen $F_a(\omega) = |a|^{1/2} \hat{f}(\omega) \cdot \overline{\hat{\psi}(a\omega)}$ und $G_a(\omega) = |a|^{1/2} \hat{g}(\omega) \cdot \overline{\hat{\psi}(a\omega)}$ sind in $L^2(\mathbb{R})$ (weil $\psi \in L^1$, also $\hat{\psi}$ beschränkt). Die Plancherel-Identität liefert

$$\begin{aligned} (W_\psi f)(t, a) &= \langle f, \psi_{t,a} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{t,a} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_a(\omega) e^{it\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \hat{F}_a(-t). \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir $(W_\psi g)(t, a) = \frac{1}{2\pi} \hat{G}_a(-t)$. Nochmalige Anwendung der Plancherel-Identität ergibt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(t, a) \overline{(W_\psi g)(t, a)} dt &= \frac{1}{4\pi^2} \langle \hat{F}_a, \hat{G}_a \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle F_a, G_a \rangle \\ &= \frac{|a|}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} \cdot |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Aus

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = |a| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(a\omega)|^2}{|a\omega|} d\omega$$

folgt weiter

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(t, a) \overline{(W_\psi g)(t, a)} \frac{da}{a^2} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} \cdot |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega \frac{da}{|a|} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(a\omega)|^2}{|a|} da \right] d\omega \\ &= \frac{C_\psi}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = C_\psi \langle f, g \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

BEMERKUNG 2.23. a) Auf $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (= multiplikative Gruppe von \mathbb{R}) ist durch $\frac{da}{a^2}$ das kanonische Maß definiert. Das kartesische Produkt $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ wird mit dem Maß $\frac{da}{a^2} dt$ versehen. Der Raum $L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \frac{da}{a^2} dt)$ enthält alle quadratintegrierbaren Funktionen bzgl. dieses Maßes, d.h.

$$h \in L^2\left(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \frac{da}{a^2} dt\right) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |h(a, t)|^2 \frac{da}{a^2} dt < \infty.$$

Die Bilder $W_\psi f$ des Operators W_ψ bilden also einen Teilraum $V \subset L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \frac{da}{a^2} dt)$. Satz 2.22 erklärt, dass $\frac{1}{\sqrt{C_\psi}} W_\psi$ eine Isometrie von $L^2(\mathbb{R})$ auf V ist, daher ist V sogar abgeschlossen.

¹Alberto P. Calderón, 1920–1998, berühmt für Arbeiten zu “Singulären Integralen”

b) Die Calderón-Identität kann auch geschrieben werden als

$$(2.15) \quad f = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(t, a) \psi_{t,a} dt \frac{da}{a^2}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

wobei die Gleichheit im Sinne der schwachen Konvergenz zu verstehen ist. Deshalb wird die Formel auch "resolution of identity" (ROI) genannt.

c) Die Calderón-Identität gilt sogar allgemeiner: Seien ψ_1 und ψ_2 Wavelets. Falls

$$C_{\psi_1, \psi_2} := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \overline{\hat{\psi}_2(\omega)}}{|\omega|} d\omega \neq 0$$

gilt, so erhalten wir die Identität

$$C_{\psi_1, \psi_2} \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_{\psi_1} f)(t, a) \overline{(W_{\psi_2} g)(t, a)} dt \frac{da}{a^2}.$$

Damit kann (bei Wahl von $\psi_1 \in L^2(\mathbb{R})$, $\psi_2 \in L^2(\mathbb{R})$ mit $t\psi_2(t)$, $\omega\hat{\psi}_2(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$) sogar punktweise Konvergenz in der ROI-Identität erzielt werden, i.e.,

$$C_{\psi_1, \psi_2} f(x) = \lim_{\substack{A_1 \rightarrow 0 \\ A_2 \rightarrow \infty}} \int_{A_1 \leq |a| \leq A_2} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi_1} f(t, a) \psi_{2,t,a}(x) dt \frac{da}{a^2}$$

für beschränktes $f \in L^2(\mathbb{R})$ in jedem Stetigkeitspunkt von f (siehe Daubechies "Ten Lectures on Wavelets", Proposition 4.2).

Wir kommen nun zu den noch ausstehenden Beweisen der zweiten Teile in Satz 2.14 und Satz 2.15.

Beweis. Es seien $r \in \mathbb{N}_0$ und $r < \alpha = r + \beta < r + 1$ gegeben. Die Teile (ii) von Satz 2.14 und Satz 2.15 werden in 4 Schritten bewiesen.

Schritt 1. Wir verwenden die Identität (2.15) mit einem zweiten Wavelet $\psi_1 \in L^2(\mathbb{R})$, das beschränkt, $(r+1)$ -mal stetig differenzierbar ist und kompakten Träger hat. Weiterhin sei ψ_1 so normalisiert, dass $C_{\psi, \psi_1} = 1$ gilt. Aus (2.15) folgt dann $f(x) = f_S(x) + f_L(x)$ mit

$$f_S(x) = \int_{|a| \leq 1} |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(a, b) \psi_1\left(\frac{x-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2}$$

für "feine" Skalen (engl. 'small scales'), und

$$f_L(x) = \int_{|a| > 1} |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(a, b) \psi_1\left(\frac{x-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2}$$

für "grobe" Skalen (engl. 'large scales').

Schritt 2. Wir zeigen, dass f_L und f_S r -mal differenzierbar sind und dass alle Ableitungen bis zur Ordnung r stetig und beschränkt sind. Hierzu zeigen wir, dass die Ableitungen durch Differenzieren des Integranden (nach x) erzielt werden. Da ψ_1 kompakten Träger besitzt, sind sowohl ψ_1 als auch die Ableitungen $\psi_1^{(k)}$, $0 \leq k \leq r+1$, beschränkt. Aus $|W_\psi f(a, b)| \leq \|\psi\|_2 \|f\|_2$ (siehe (2.1)) folgt für

$$0 \leq k \leq r + 1$$

$$\begin{aligned} & \int_{|a| \geq 1} |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\psi} f(a, b)| \left| a^{-k} \psi_1^{(k)} \left(\frac{x-b}{a} \right) \right| db \frac{da}{a^2} \\ & \leq \|\psi\|_2 \|f\|_2 \int_{|a| \geq 1} |a|^{-k-3/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \left| a^{-1} \psi_1^{(k)} \left(\frac{x-b}{a} \right) \right| db}_{=\|\psi_1^{(k)}\|_1} da < \infty. \end{aligned}$$

Also ist die Funktion f_L sogar $r + 1$ -mal stetig differenzierbar. Die Ableitungen bis zur Ordnung $r + 1$ sind beschränkt durch

$$|f_L^{(k)}(x)| \leq \frac{2}{2k+1} \|\psi_1^{(k)}\|_1 \|\psi\|_2 \|f\|_2.$$

Zur Diskussion von f_S verwenden wir den Parameter γ aus (2.6) in Satz 2.15 bzw. $\gamma := \alpha$ aus (2.4). Dann erhalten wir für $0 \leq k \leq r$ ganz ähnlich

$$\begin{aligned} & \int_{|a| \leq 1} |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\psi} f(a, b)| \left| a^{-k} \psi_1^{(k)} \left(\frac{x-b}{a} \right) \right| db \frac{da}{a^2} \\ & \leq K \int_{|a| \leq 1} |a|^{\gamma-k-1} \|\psi_1^{(k)}\|_1 da < \infty. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus $\gamma - r - 1 > -1$. Damit sind auch die Ableitungen von f_S bis zur Ordnung r gegeben durch die Differentiation unter dem Integral. Sie sind jeweils beschränkt durch

$$|f_S^{(k)}(x)| \leq \frac{2K}{\gamma - k} \|\psi_1^{(k)}\|_1.$$

Schritt 3. Die Beschränktheit der r -ten Ableitungen ergibt bereits die Lipschitz Bedingung zum Exponenten 1 für große Differenzen $h := |x - y|$. Ist $\text{supp } \psi_1 \subset [-R, R]$ mit $R > 0$, so wählen wir $h_0 = 1/(2R + 2)$ und erhalten für alle $|h| \geq h_0$ und $x \in \mathbb{R}$ (bzw. $x = x_0$ für die lokale Abschätzung)

$$|g(x+h) - g(x)| \leq |g(x+h)| + |g(x)| \leq 2\|g\|_{\infty} \leq (4R+4)\|g\|_{\infty} \cdot |h|.$$

Darüber hinaus ist $f_L^{(r)}$ sogar (global) Hölder-stetig mit Exponent 1, da $f_L^{(r+1)}$ beschränkt ist.

Schritt 4. Wir betrachten nun die Hölder-Stetigkeit der r -ten Ableitung

$$(2.16) \quad f_S^{(r)}(x) = \int_{|a| \leq 1} |a|^{-r-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi} f(a, b) \psi_1^{(r)} \left(\frac{x-b}{a} \right) db \frac{da}{a^2}.$$

Dazu sei wieder $\text{supp } \psi_1 \subset [-R, R]$ vorausgesetzt. Unter der Voraussetzung $W_\psi f(a, b) \leq K|a|^{\alpha+\frac{1}{2}}$ aus Satz 2.14 folgt für $0 < h < 1$, dass

$$\begin{aligned}
& |f_S^{(r)}(x+h) - f_S^{(r)}(x)| \\
& \leq K \int_{0 < |a| \leq h} |a|^{\alpha-r} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \psi_1^{(r)}\left(\frac{x+h-b}{a}\right) \right| + \left| \psi_1^{(r)}\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| \right) db \frac{da}{a^2} \\
& \quad + K \int_{h < |a| \leq 1} |a|^{\alpha-r} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left| \psi_1^{(r)}\left(\frac{x+h-b}{a}\right) - \psi_1^{(r)}\left(\frac{x-b}{a}\right) \right|}_{=0, \text{ falls } |x-b| > |a|R+h} db \frac{da}{a^2} \\
& \leq 2K \int_{0 < |a| \leq h} |a|^{\alpha+1-r} \|\psi_1^{(r)}\|_1 \frac{da}{a^2} + 2K \int_{h < |a| \leq 1} |a|^{\alpha-r} (|a|R+h) h \|\psi_1^{(r+1)}\|_\infty \frac{da}{a^2} \\
& = 4K \|\psi_1^{(r)}\|_1 \frac{h^{\alpha-r}}{\alpha-r} + 4K \|\psi_1^{(r+1)}\|_\infty \left(Rh \frac{1-h^{\alpha-r}}{\alpha-r} + h^2 \frac{h^{\alpha-1-r}-1}{r+1-\alpha} \right) \\
& = \tilde{C} h^{\alpha-r}.
\end{aligned}$$

Also ist auch f_S Hölder-stetig zum Exponenten α .

Wir verwenden nun die Voraussetzungen aus Satz 2.15(ii) sowie die Bezeichnungen $\gamma = r + \sigma$, $\alpha = r + \beta$ und die vereinfachende Annahme $x_0 = 0$. Weiterhin können wir o.B.d.A. auch $\beta > \sigma$ annehmen, da die Aussage sonst schon aus Satz 2.14 folgt. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
& |f_S^{(r)}(h) - f_S^{(r)}(0)| \\
& \leq K \int_{0 < |a| \leq h^{\beta/\sigma}} |a|^\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \left| \psi_1^{(r)}\left(\frac{h-b}{a}\right) \right| db \frac{da}{a^2} \\
& \quad + K \int_{h^{\beta/\sigma} < |a| \leq h} \int_{-\infty}^{\infty} \left(|a|^\beta + \frac{|b|^\beta}{1+|\log|b||} \right) \left| \psi_1^{(r)}\left(\frac{h-b}{a}\right) \right| db \frac{da}{a^2} \\
& \quad + K \int_{0 < |a| \leq h} \int_{-\infty}^{\infty} \left(|a|^\beta + \frac{|b|^\beta}{1+|\log|b||} \right) \left| \psi_1^{(r)}\left(\frac{-b}{a}\right) \right| db \frac{da}{a^2} \\
& \quad + K \int_{h < |a| \leq 1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(|a|^\beta + \frac{|b|^\beta}{1+|\log|b||} \right) \left| \psi_1^{(r)}\left(\frac{h-b}{a}\right) - \psi_1^{(r)}\left(\frac{-b}{a}\right) \right| db \frac{da}{a^2}.
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die vier Integrale auf der rechten Seite mit T_1 bis T_4 , so wird weiter abgeschätzt

$$T_1 \leq K \int_{0 < |a| \leq h^{\beta/\sigma}} |a|^{\sigma-1} \|\psi_1^{(r)}\|_1 da \leq C_1 |h|^\beta.$$

Betrachten wir nun T_2 . Mit $h_0 = 1/(2R+2)$ aus Schritt 3 und $|a| \leq |h| \leq h_0$ folgt aus $\psi_1^{(r)}\left(\frac{h-b}{a}\right) \neq 0$ sofort $|b| \leq |a|R+h \leq h(R+1) \leq 1/2$. Die Monotonie der Funktion $\frac{|b|^\beta}{1+|\log|b||}$ auf $(0, 1/2]$ ergibt

$$\frac{|b|^\beta}{1+|\log|b||} \leq \frac{(h(R+1))^\beta}{1+|\log(h(R+1))|} \leq \frac{(h(R+1))^\beta}{|\log h|}.$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} T_2 &\leq K \int_{h^{\beta/\sigma} < |a| \leq h} \left(|a|^{\beta-1} + |a|^{-1} \frac{(h(R+1))^\beta}{|\log h|} \right) \|\psi_1^{(r)}\|_1 da \\ &\leq C_2 |h|^\beta \left[1 + \frac{1}{\log h} \underbrace{\int_{h^{\beta/\sigma} < |a| \leq h} |a|^{-1} da}_{=2|\log h|(\beta/\sigma-1)} \right] \\ &\leq C'_2 |h|^\beta. \end{aligned}$$

Für T_3 erhalten wir analog aus $\psi_1(-b/a) \neq 0$ die Beziehung $|b| \leq |a|R \leq 1/2$, also auch

$$\frac{|b|^\beta}{1 + |\log |b||} \leq \frac{(|a|R)^\beta}{1 + |\log(|a|R)|} \leq C|a|^\beta.$$

Daraus folgt einfacher als bei T_2 die Abschätzung

$$T_3 \leq C_3 \int_{0 < |a| \leq h} |a|^{\beta-1} da = C'_3 h^\beta.$$

Bei T_4 verwenden wir wieder

$$\left| \psi_1^{(r)} \left(\frac{x+h-b}{a} \right) - \psi_1^{(r)} \left(\frac{x-b}{a} \right) \right| \begin{cases} = 0, & \text{falls } |b| > |a|R+h, \\ \leq \frac{h}{|a|} \|\psi_1^{(r+1)}\|_\infty, & \text{falls } |b| \leq |a|R+h. \end{cases}$$

Wegen $|a|R+h \leq (R+1)|a|$ für alle $h \leq |a| \leq 1$ ergibt sich nun

$$\begin{aligned} T_4 &\leq 2Kh \|\psi_1^{(r+1)}\|_\infty \int_{h < |a| \leq 1} |a|^{-3} (|a|R+h) (|a|^\beta + (|a|R+h)^\beta) da \\ &\leq C_4 h \int_{h < |a| \leq 1} |a|^{-2+\beta} da \leq C'_4 h^\beta. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also die Behauptung von Satz 2.14(ii). \square

BEMERKUNG 2.24. a) *Der Term $|b - x_0|^\alpha$ in der Charakterisierung der lokalen Lipschitz-Stetigkeit gibt den "Einflussbereich" einer isolierten Singularität von f an einer Stelle x_0 an. Nehmen wir an, dass f stetig differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ und Hölder-stetig zum Exponenten $0 < \alpha < 1$ an der Stelle x_0 ist. Weiter gelte $\text{supp } \psi \subset [-c, c]$ mit einem $c > 0$. Dann wirkt sich die Singularität überhaupt nicht auf die Werte $W_\psi f(a, b)$ mit $|b - x_0| > ac$ aus. Also erhalten wir die Abschätzung genau wie in der globalen Lipschitz-Stetigkeit*

$$|W_\psi f(a, b)| \leq K|a|^{3/2}, \quad \text{falls } |b - x_0| > ac.$$

Für kleine Werte von $|a|$ wird sich die Singularität von f nur innerhalb des Kegels

$$K_{x_0, c} \{(a, b); a \neq 0, b \in [x_0 - ac, x_0 + ac]\}$$

anhand der Größe $\mathcal{O}(|a|^{\alpha+1/2})$ zeigen.

Man kann also einen Schätzwert für den lokalen Hölder-Exponenten an der Stelle x_0 erzielen, indem man

$$\liminf_{a \rightarrow 0} \max_{|b-x_0| \leq ac} \left(\frac{\ln |W_\psi f(a, b)|}{\ln |a|} - 1/2 \right)$$

bestimmt.

Hierbei ist eine natürliche Grenze durch die Anzahl L der verschwindenden Momente von ψ gegeben. Will man also einen großen Bereich von Hölder-Exponenten abdecken, muss man von vornherein ein Wavelet ψ mit mehreren verschwindenden Momenten verwenden.

- b) *Eine Vermutung von Mallat besagt: Die relativen Extrema von $W_\psi f(2^j, t)$ mit $j \in \mathbb{Z}$ (als Funktionen von t) liefern eine vollständige Beschreibung von f . Diese Vermutung ist falsch, dennoch führen auf diesen Extrema basierende Rekonstruktionsalgorithmen (ähnlich zur ROI) häufig auf gute Approximationen von f .*

ÜBUNG 2.25. *Führen Sie die Untersuchung zur Schätzung des lokalen Hölder-Exponenten für die Funktion aus Übung 2.9 durch.*

Die diskrete Wavelet-Transformation

1. Die Grundidee

Wir wenden uns nun der Betrachtung von Orthonormalbasen des Hilbertraums $L^2(\mathbb{R})$ zu. Die beim Haar-Wavelet (1.10) beobachtete Struktur legen wir der folgenden Definition zu Grunde.

DEFINITION 4.1. (*Orthogonales Wavelet*)

Die Funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ sei ein Wavelet im Sinne der Definition 2.17. Wir setzen

$$(4.1) \quad \psi_{j,k} := 2^{j/2} \psi(2^j \cdot -k) = 2^{j/2} \psi(2^j(\cdot - k2^{-j})), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Falls die Familie $\Psi = \{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$ ist, so heißt ψ ein orthogonales Wavelet.

Wir werden noch Methoden kennenlernen, um orthogonale Wavelets mit gewissen Zusatzeigenschaften zu konstruieren. Besonders wünschenswert ist dabei die Berücksichtigung der folgenden Eigenschaften von ψ :

- beliebig hohe Anzahl verschwindender Momente,
- beliebig hohe Glattheit,
- die Eigenschaft, dass ψ kompakten Träger hat.

Die Kombination aller drei Eigenschaften wurde in den 1980'er Jahren als wichtiges Problem der "Harmonischen Analysis" angesehen. 1988 gab I. Daubechies¹ die erste erfolgreiche Konstruktion solcher Funktionen ψ an. Ähnliche Konstruktionen wurden unter dem Namen " ϕ -Transformation" fast zeitgleich von M. Frazier und B. Jawerth² angegeben. Seither nimmt die Wavelet-Analysis (oder Wavelet-Theorie) einen wichtigen Platz in der Angewandten Mathematik ein.

Wir führen die folgenden Notationen ein.

BEZEICHNUNG 4.2. Zu einem orthogonalen Wavelet ψ definieren wir die Waveleträume

$$(4.2) \quad W_j := \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \text{span} \{\psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

sowie die orthogonalen Projektionen

$$(4.3) \quad \mathcal{Q}_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow W_j, \quad \mathcal{Q}_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

¹Ingrid Daubechies, geb. 1954 in Belgien, seit 1993 Professorin an der Princeton University

²Michael Frazier, Michigan State University, Björn Jawerth, University of South Carolina

Zu $f \in L^2(\mathbb{R})$ setzen wir weiterhin

$$(4.4) \quad b_j(f) = (b_{j,k}(f); k \in \mathbb{Z}), \quad b_{j,k}(f) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle.$$

Einige einfache Aussagen folgen direkt aus der Definition.

FESTSTELLUNG 4.3. Für ein orthogonales Wavelet ψ gelten die folgenden Aussagen.

- a) Die Familie $\{\psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Orthonormalbasis von W_j für $j \in \mathbb{Z}$.
- b) Die Waveleträume W_j , $j \in \mathbb{Z}$, sind paarweise orthogonal.
- c) Es gilt die Zerlegung

$$L^2(\mathbb{R}) = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \left(\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j \right),$$

wobei \bigoplus die direkte Summe (hier sogar: orthogonale Summe) von Vektorräumen bezeichnet. Mit anderen Worten: für jedes $f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathcal{Q}_j f, \quad \langle \mathcal{Q}_j f, \mathcal{Q}_\ell f \rangle = 0 \text{ falls } j \neq \ell.$$

Weiterhin gilt

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|\mathcal{Q}_j f\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|b_j(f)\|_{\ell_2(\mathbb{Z})}^2.$$

Der Skalierungsparameter $a = 2^{-j}$, $j \in \mathbb{Z}$, wird also zur "Sortierung" der Wavelet-Basis Ψ verwendet. Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel wird durch folgenden Begriff eingeführt.

DEFINITION 4.4. (Skalenraum)

Der Vektorraum

$$V_j := \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \left(\bigoplus_{\ell=-\infty}^{j-1} W_\ell \right)$$

heißt Skalenraum zum Wavelet ψ . Mit

$$\mathcal{P}_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j, \quad \mathcal{P}_j f = \sum_{\ell=-\infty}^{j-1} \mathcal{Q}_\ell f$$

bezeichnen wir die orthogonale Projektion auf V_j .

Die folgenden Eigenschaften der Skalenräume V_j zum Wavelet ψ sind wieder einfach nachzuweisen.

FESTSTELLUNG 4.5. a) Die Skalenräume V_j , $j \in \mathbb{Z}$, sind ineinander geschachtelt, d.h.

$$\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset L^2(\mathbb{R}).$$

b) Sie erfüllen die Dichtheitsrelation

$$(4.5) \quad \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \left(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j \right) = L^2(\mathbb{R})$$

und die Trennungsrelation

$$(4.6) \quad \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}.$$

c) V_j besitzt die orthogonalen Zerlegungen

$$V_j = W_{j-1} \oplus V_{j-1} = W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \cdots \oplus W_{j-n} \oplus V_{j-n}$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt für jedes $f \in V_j$ die Zerlegungsrelation

$$\begin{aligned} f &= \mathcal{P}_j f \\ &= \mathcal{Q}_{j-1} f + \mathcal{P}_{j-1} f \\ &\vdots \\ &= \mathcal{Q}_{j-1} f + \mathcal{Q}_{j-2} f + \cdots + \mathcal{Q}_{j-n} f + \mathcal{P}_{j-n} f. \end{aligned}$$

d) V_j ist orthogonal zu allen W_{j+n} mit $n \geq 0$.

Beweis: Bis auf die Trennungsrelation folgen alle Aussagen direkt aus der Definition. Sei also $f \in \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j$. Dann gilt $f \in V_j$ für alle $j \in \mathbb{Z}$, mit Teil d) also auch $f \perp W_j$ für alle $j \in \mathbb{Z}$. Damit ist

$$f \perp \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \left(\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j \right) = L^2(\mathbb{R}),$$

also $f = 0$. \square

Aufgrund der Definition der Funktionen $\psi_{j,k}$ durch die Skalierung der Funktion ψ ergibt sich die folgende "Skalierungs-Invarianz".

FESTSTELLUNG 4.6. Für $j \in \mathbb{Z}$ gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} f \in W_j &\iff f(2^{-j}\cdot) \in W_0, \\ f \in V_j &\iff f(2^{-j}\cdot) \in V_0. \end{aligned}$$

Beweis: Die Elemente von W_j sind genau die Funktionen der Form

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k 2^{j/2} \psi(2^j \cdot - k),$$

wobei die Folge $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ quadrat-summierbar ist. Also ist $f \in W_j$ genau dann, wenn

$$f(2^{-j}\cdot) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \psi(\cdot - k),$$

wobei die Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (2^{j/2} b_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ quadrat-summierbar ist. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass $f \in W_0$ gilt. Weiterhin können wir sogar schließen: $f \in W_j \iff f(2^{-\ell}\cdot) \in W_{j-\ell}$ für alle $\ell \in \mathbb{Z}$.

Die Elemente von V_j sind genau die Elemente der Form

$$f = \sum_{\ell=-\infty}^{j-1} f_\ell,$$

wobei $f_\ell \in W_\ell$ und $\sum_{\ell=-\infty}^{j-1} \|f_\ell\|^2 < \infty$ gilt. Also ist $f \in V_j$ genau dann, wenn

$$f(2^{-j}\cdot) = \sum_{\ell=-\infty}^{j-1} g_\ell = \sum_{\ell=-\infty}^{-1} g_{j+\ell}$$

gilt, wobei die Funktionen $g_\ell := f_\ell(2^{-j}\cdot) \in W_{\ell-j}$ die Beziehung

$$\sum_{\ell=-\infty}^{j-1} \|g_\ell\|^2 = 2^j \sum_{\ell=-\infty}^{j-1} \|f_\ell\|^2 < \infty$$

erfüllen. Dies ist wiederum gleichbedeutend mit $f(2^{-j}\cdot) \in V_0$. \square

2. Shift-Invarianz

Nun soll die Struktur der einzelnen Waveleträume W_j und der Skalenräume V_j untersucht werden. Hierzu dient der folgende Begriff.

DEFINITION 4.7. *Es sei $G \subset \mathbb{R}$ eine Untergruppe der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$. Ein Funktionenraum V komplexer Funktionen auf \mathbb{R} heißt G -shift-invariant (oder G -verschiebungsinvariant), wenn für alle $f \in V$, $y \in G$ auch $f(\cdot - y) \in V$ gilt.*

BEISPIEL 4.8. (i) *Die üblichen Funktionenräume $C(\mathbb{R})$, $C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, $C^\infty(\mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R})$, $C_0^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, $C_0^\infty(\mathbb{R})$, $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, sind shift-invariant bzgl. $G = \mathbb{R}$. Z.B. gilt*

$$\|f\|_p = \|f(\cdot - y)\|_p \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

(ii) *Der Raum der bandbeschränkten Funktionen*

$$PW_B := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = 0 \text{ für alle } |\omega| > B\}$$

ist ebenfalls \mathbb{R} -shift-invariant. Ein berühmtes Resultat über shift-invariante Räume lautet: Zu jedem shift-invarianten abgeschlossenen Teilraum $V \subset L^2(\mathbb{R})$ existiert eine messbare Menge K , so dass

$$V = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = 0 \text{ für alle } |\omega| \notin K\}.$$

(Siehe H. Helson, Lectures on Invariant Subspaces, New York [u.a.] Acad. Press, New York, 1964 (FBB Mathematik b 341/Hels))

(iii) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ *ist eine additive Untergruppe. Der Raum der Treppenfunktionen mit Sprungstellen in \mathbb{Z} ist \mathbb{Z} -shift-invariant.*

ÜBUNG 4.9. *Zeigen Sie, dass der Raum*

$$V_0 = \{f \in L_1(\mathbb{R}); \hat{f}(0) = 0\}$$

shift-invariant bzgl. \mathbb{R} ist.

Die Bedeutung des Verschiebungsparameters k bei der Definition der Funktionen

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j(\cdot - k2^{-j})), \quad k \in \mathbb{Z},$$

in (4.1) lässt folgenden Schluss zu.

HILFSSATZ 4.10. *Der Waveletraum W_j und der Skalenraum V_j sind shift-invariant bzgl. der additiven Untergruppe $2^{-j}\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.*

Beweis: Für $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \psi_{j,k} \in W_j$ und $\ell \in \mathbb{Z}$ gilt

$$f(\cdot - \ell 2^{-j}) = 2^{j/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \psi(2^j(\cdot - (k + \ell)2^{-j})) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{k-\ell} \psi_{j,k} \in W_j.$$

Also ist W_j shift-invariant bzgl. $2^{-j}\mathbb{Z}$.

Für V_j verwenden wir ein anderes Argument. Zunächst definieren wir den Raum

$$(4.7) \quad X_j := \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} W_{j+n} \right).$$

Nach Feststellung 4.5(d) gilt $V_j \perp X_j$. Andererseits folgt aus der Dichtheitsrelation (4.5) auch

$$V_j \oplus X_j = L^2(\mathbb{R}).$$

Also muss $V_j = (X_j)^\perp$ gelten (orthogonales Komplement von X_j). Nun ist aber X_j shift-invariant bzgl. $2^{-j}\mathbb{Z}$, da jeder Summand in (4.7) diese Eigenschaft besitzt (denn: $2^{-(j+n)}\mathbb{Z}$ enthält $2^{-j}\mathbb{Z}$ für alle $n \geq 0$). Für beliebige $f \in V_j$, $g \in X_j$ und $\ell \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\langle f(\cdot - \ell 2^{-j}), g \rangle = \langle f, \underbrace{g(\cdot + \ell 2^{-j})}_{\in X_j} \rangle = 0.$$

Hieraus folgt $f(\cdot - \ell 2^{-j}) \in (X_j)^\perp = V_j$, und damit die Behauptung. \square

BEMERKUNG 4.11. *Wegen der Skalierungsinvarianz von Feststellung 4.6 hätte es genügt, zu zeigen, dass W_0 und V_0 jeweils \mathbb{Z} -shift-invariant sind.*

Wir wollen nun eine analytische Bedingung für ψ herleiten, die die Eigenschaft, dass $\Psi = \{\psi_{j,k}\}$ ein Orthonormalsystem (aber nicht unbedingt eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$) ist, charakterisieren. Hierzu wird die Fourier-Transformierte $\hat{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$ verwendet. Zur Vereinfachung führen wir noch die folgende Notation eines "inneren Produkts" ein.

BEZEICHNUNG 4.12. *Für $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ definieren wir das Klammerprodukt (engl. "bracket product")*

$$(4.8) \quad [\hat{f}, \hat{g}](\omega) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2k\pi) \overline{\hat{g}(\omega + 2k\pi)}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Einige Eigenschaften des Klammerprodukts fasst der folgende Hilfssatz zusammen.

HILFSSATZ 4.13. a) Für $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$(4.9) \quad \int_0^{2\pi} [\hat{f}, \hat{g}](\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

sowie

$$(4.10) \quad \int_0^{2\pi} |[\hat{f}, \hat{g}](\omega)| d\omega \leq \|\hat{f}\|_2 \|\hat{g}\|_2.$$

Insbesondere ist also $[\hat{f}, \hat{g}] \in L^1((0, 2\pi))$.

b) Für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$ gilt die punktweise Abschätzung

$$(4.11) \quad |[\hat{f}, \hat{g}](\omega)| \leq \left([\hat{f}, \hat{f}](\omega) \cdot [\hat{g}, \hat{g}](\omega) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

c) Es gelten die Eigenschaften eines inneren Produkts, also

1. $[\hat{f}, \hat{f}] \geq 0$ und $([\hat{f}, \hat{f}] \equiv 0 \iff \hat{f} = 0)$
2. $[\hat{f}, \hat{g}] = \overline{[\hat{g}, \hat{f}]}$,
3. $[a\hat{f}_1 + b\hat{f}_2, \hat{g}] = a[\hat{f}_1, \hat{g}] + b[\hat{f}_2, \hat{g}], \quad a, b \in \mathbb{C}.$

d) Ist $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische messbare Funktion mit $\tau\hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$, so gilt

$$(4.12) \quad [\tau\hat{f}, \hat{g}](\omega) = \tau(\omega) \cdot [\hat{f}, \hat{g}](\omega).$$

e) Ist die Autokorrelation

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} f(t+x) dt$$

der Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ von beschränkter Variation, so gilt für alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$(4.13) \quad [\hat{f}, \hat{f}](\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(k) \cdot e^{-ik\omega}.$$

ÜBUNG 4.14. Beweisen Sie die Eigenschaft e) aus dem obigen Hilfssatz.

Das Klammerprodukt erweist sich als besonders hilfreich zur Formulierung von Aussagen über shift-invariante Räume. Die folgenden Identitäten (4.14) und (4.15) liefern die Charakterisierung von Orthonormalsystemen der Form $\Psi = \{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$, ohne jedoch die Vollständigkeit in $L^2(\mathbb{R})$ zu garantieren.

SATZ 4.15. Gegeben sei eine Funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Mit $\psi_{j,k}$ bezeichnen wir wieder die Funktionen in (4.1).

a) Die Familie $\Psi_0 = \{\psi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\}$ ist genau dann eine Orthonormalbasis von $W_0 = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \text{span } \Psi_0$, wenn

$$(4.14) \quad [\hat{\psi}, \hat{\psi}](\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Die Familie $\Psi = \{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ ist genau dann ein Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$, wenn sowohl (4.14) als auch

$$(4.15) \quad [\hat{\psi}, \hat{\psi}(2^j \cdot)](\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(\omega + 2k\pi) \overline{\hat{\psi}(2^j(\omega + 2k\pi))} = 0$$

für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$ und alle $j > 0$ gilt.

Beweis: a) Für alle $k, m \in \mathbb{Z}$ folgt aus den Rechenregeln für die Fourier-Transformation, der Plancherel-Identität sowie Hilfssatz 4.13 a) und d)

$$\begin{aligned}\langle \psi(\cdot - k), \psi(\cdot - m) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle e^{-ik \cdot} \hat{\psi}, e^{-im \cdot} \hat{\psi} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-m)\omega} [\hat{\psi}, \hat{\psi}](\omega) d\omega.\end{aligned}$$

Das Integral der rechten Seite ist der Fourier-Koeffizient $c_{k-m}(g)$ der Funktion $g = [\hat{\psi}, \hat{\psi}] \in L^1((0, 2\pi))$. Die Familie Ψ_0 ist genau dann eine Orthonormalbasis von W_0 , wenn sie ein Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$ ist. Dies ist äquivalent zu $c_0(g) = 1$ und $c_k(g) = 0$ für alle $k \neq 0$, also zu $g \equiv 1$ fast überall. Für $j \in \mathbb{Z}$ erhalten wir durch die Substitution $y = 2^j x$ sofort

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,m} \rangle = \langle \psi_{0,k}, \psi_{0,m} \rangle, \quad j, k, m \in \mathbb{Z}.$$

Also ist dieselbe Bedingung auch äquivalent dazu, dass die Familie $\Psi_j := \{\psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$ ist.

b) Wir müssen noch die paarweise Orthogonalität der Familien Ψ_j , $j \in \mathbb{Z}$, nachweisen. Seien dazu $j, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $j > \ell$ gegeben. Für alle $k, m \in \mathbb{Z}$ erhalten wir durch einfache Substitutionen

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{\ell,m} \rangle = \langle \psi_{0,k}, \psi_{\ell-j,m} \rangle = \langle \psi_{0,k-2^{j-\ell}m}, \psi_{\ell-j,0} \rangle.$$

Mit (2.12) ergibt sich

$$\hat{\psi}_{\ell-j,0}(\omega) = 2^{(j-\ell)/2} \hat{\psi}(2^{j-\ell}\omega).$$

Anwendung der Rechenregeln 3.17, der Plancherel-Identität und Hilfssatz 4.13 a) und d) liefert weiter

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{\ell,m} \rangle = \frac{2^{(j-\ell)/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-2^{j-\ell}m)\omega} [\hat{\psi}, \hat{\psi}(2^{j-\ell}\cdot)](\omega) d\omega.$$

Die Orthogonalität von $\psi_{j,k}$ und $\psi_{\ell,m}$ für $j > \ell$ und alle $k, m \in \mathbb{Z}$ ist also äquivalent zu der Eigenschaft, dass sämtliche Fourierkoeffizienten der Funktion $[\hat{\psi}, \hat{\psi}(2^{j-\ell}\cdot)] \in L^1((0, 2\pi))$ verschwinden. Dies wiederum ist äquivalent zur Identität (4.15) für alle $j > 0$. \square

BEMERKUNG 4.16. Die paarweise Orthogonalität der Familien $\Psi_j = \{\psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ impliziert die paarweise Orthogonalität der Räume W_j , $j \in \mathbb{Z}$.

Beim Umgang mit shift-invarianten Räumen ist die Fourier-Transformation ein wichtiges Hilfsmittel, um z.B. Orthogonalität oder sogar explizite Formeln für die Orthogonalprojektion anzugeben. Dabei werden oft Koeffizientenfolgen $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit den zugehörigen Fourierreihen

$$(4.16) \quad (c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \longleftrightarrow C(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\omega}$$

assoziiert. Hierzu beachte man die Norm-Äquivalenz

$$\|(c_k)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|C\|_{L^2((0, 2\pi))}^2$$

und die Plancherel-Identität

$$\langle (c_k), (d_k) \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \frac{1}{2\pi} \langle C, D \rangle_{L^2((0, 2\pi))}.$$

HILFSSATZ 4.17. Es sei $\psi \in L^2(\mathbb{R})$.

a) Jede endliche Linearkombinationen $g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi_{j,k} \in W_j$ besitzt die Fouriertransformierte

$$(4.17) \quad \hat{g}(\omega) = 2^{-j/2} C(2^{-j}\omega) \hat{\psi}(2^{-j}\omega).$$

Die Aussage bleibt auch gültig für Folgen $(c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z})$, falls die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi_{j,k}$ in $L^2(\mathbb{R})$ konvergiert.

b) Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ und $j \in \mathbb{Z}$ sei die Folge $(d_k) := (\langle f, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}$ quadrat-summierbar. Dann gilt

$$(4.18) \quad D(\omega) = [2^{j/2} \hat{f}(2^j \cdot), \hat{\psi}].$$

Beweis: Der erste Teil in a) folgt aus den Rechenregeln der Fouriertransformation, der zweite Teil folgt sodann durch Grenzübergang zu unendlichen Reihen. Teil b) wird gezeigt, indem man die Fourierkoeffizienten der 2π -periodischen Funktion $[2^{j/2} \hat{f}(2^j \cdot), \hat{\psi}]$ berechnet, die ja nach Hilfssatz 4.13a) absolut-integrierbar ist. Mit Hilfssatz 4.13a) und d) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [2^{j/2} \hat{f}(2^j \cdot), \hat{\psi}](\omega) e^{ik\omega} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \langle 2^{j/2} \hat{f}(2^j \cdot), e^{-ik \cdot} \hat{\psi} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, 2^{-j/2} e^{-i2^{-j}k \cdot} \hat{\psi}(2^{-j} \cdot) \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{j,k} \rangle = \langle f, \psi_{j,k} \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Als einfache Anwendungen dieses Hilfssatzes erhält man die folgenden Aussagen.

SATZ 4.18. Gegeben seien Funktionen $\psi, \xi \in L^2(\mathbb{R})$.

a) Für endliche Linearkombinationen

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi_{j,k}, \quad g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \xi_{\ell,k}$$

mit $j \geq \ell$ gilt

$$(4.19) \quad \langle f, g \rangle = \frac{2^{(j-\ell)/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(\omega) \overline{D(2^{j-\ell}\omega)} [\hat{\psi}, \hat{\xi}(2^{j-\ell} \cdot)](\omega) d\omega.$$

Diese Identität gilt auch, wenn f und g durch L^2 -konvergente Reihen dargestellt sind.

b) Bezeichnen wir mit W_j und X_j den Abschluss der Räume, die durch $\{\psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ bzw. $\{\xi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ aufgespannt werden, so gilt für $j \geq \ell$

$$(4.20) \quad W_j \perp X_\ell \iff [\hat{\psi}, \hat{\xi}(2^{j-\ell} \cdot)](\omega) = 0 \text{ für fast alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

c) Falls $\{\psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von W_j ist, so ist die Orthogonalprojektion $\mathcal{Q}_j f$ von $f \in L^2(\mathbb{R})$ auf W_j gegeben durch

$$(4.21) \quad (\mathcal{Q}_j f)^\wedge(\omega) = 2^{-j/2} \tau_j(2^{-j}\omega) \hat{\psi}(2^{-j}\omega) \quad \text{mit} \quad \tau_j = [2^{j/2} \hat{f}(2^j \cdot), \hat{\psi}].$$

Weiterhin gilt

$$(4.22) \quad \|\mathcal{Q}_j f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\tau_j\|_{L^2((0,2\pi))}^2.$$

Beweis: a) Hilfssatz 4.17 a), die Plancherel-Identität und Substitution ergibt

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \frac{2^{-(j+\ell)/2}}{2\pi} \langle C(2^{-j}\cdot)\hat{\psi}(2^{-j}\cdot), D(2^{-\ell}\cdot)\hat{\xi}(2^{-\ell}\cdot) \rangle \\ &= \frac{2^{(j-\ell)/2}}{2\pi} \langle C\hat{\psi}, D(2^{j-\ell}\cdot)\hat{\xi}(2^{j-\ell}\cdot) \rangle\end{aligned}$$

Wegen $j > \ell$ ist die Funktion $D(2^{j-\ell}\cdot)$ ein trigonometrisches Polynom der Periode 2π . Also ergibt Hilfssatz 4.13 a) und d)

$$\langle f, g \rangle = \frac{2^{(j-\ell)/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(\omega) \overline{D(2^{j-\ell}\omega)} [\hat{\psi}, \hat{\xi}(2^{j-\ell}\cdot)](\omega) d\omega.$$

Der Rest folgt wieder durch Grenzwertübergang.

b) Die Orthogonalität aller endlichen Linearkombinationen $f \in W_j$ und $g \in X_\ell$, $j \geq \ell$, ist äquivalent zu

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(\omega) [\hat{\psi}, \hat{\xi}(2^{j-\ell}\cdot)](\omega) d\omega = 0,$$

wobei τ ein beliebiges trigonometrisches Polynom ist. Wegen $[\hat{\psi}, \hat{\xi}(2^{j-\ell}\cdot)] \in L^1((0, 2\pi))$ ist dies äquivalent zu (4.20).

c) ist direkte Folgerung aus Hilfssatz 4.17 c). \square

Mit Satz 4.15 haben wir die Möglichkeit, eine Familie $\Psi = \{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ als Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$ zu erkennen. Die Aussage von Satz 4.18 c) kann man heranziehen, um die Vollständigkeit eines solchen Orthonormalsystems zu zeigen, indem man die Gültigkeit der Parseval-Identität nachprüft.

ÜBUNG 4.19. Ist $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ein orthogonales Wavelet und $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine messbare 2π -periodische Funktion mit $|\sigma| \equiv 1$ (fast überall), so ist auch η mit $\hat{\eta} = \sigma\hat{\psi}$ ein orthogonales Wavelet.

BEISPIEL 4.20. Meyer-Wavelets

Y. Meyer³ konstruierte eine Familie orthogonaler Wavelets, für deren Träger im Frequenzbereich

$$(4.23) \quad \text{supp } \hat{\psi} \subset E_- \cup E_+ := \left[-\frac{8\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$$

gilt. ψ ist also eine **bandbeschränkte** Funktion. Zur expliziten Angabe von $\hat{\psi}$ verwendet man eine 2π -periodische gerade und reelle Funktion

$$(4.24) \quad P(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq |\omega| \leq \pi/3, \\ \sigma(|\omega|) & \text{für } \pi/3 < |\omega| \leq 2\pi/3, \\ 0 & \text{für } 2\pi/3 < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

wobei $0 \leq \sigma(\omega) \leq 1$ so gewählt wird, dass

³Yves Meyer, geb. 1939, ist emeritierter Professor der École Normale Supérieure de Cachan und Mitglied der Académie des Sciences. Er wird als Mitbegründer der Wavelet-Theorie (franz. "Ondelettes") betrachtet.

- (i) $P \in C^r(\mathbb{R})$ für ein $r \in \mathbb{N}_0$ und
(ii) $|P(\omega)|^2 + |P(\omega + \pi)|^2 \equiv 1$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$ gilt.

Weiter setzt man

$$(4.25) \quad \hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq |\omega| \leq 2\pi/3, \\ e^{-i\omega/2} \overline{P(\omega/2 + \pi)} & \text{für } 2\pi/3 < |\omega| \leq 4\pi/3, \\ e^{-i\omega/2} P(\omega/4) & \text{für } 4\pi/3 < |\omega| \leq 8\pi/3, \\ 0 & \text{für } |\omega| > 8\pi/3. \end{cases}$$

Dann gilt:

- ψ ist bandbeschränkt, also $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ (Satz von Paley-Wiener).
- $\frac{d^k}{d\omega^k} \hat{\psi}(0) = 0$ für beliebige $k \in \mathbb{N}_0$, also hat ψ eine unendliche Anzahl verschwindender Momente.

Wir zeigen nun, dass $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem ist. Dazu betrachten wir die Klammerprodukte aus Satz 4.15 auf dem Periodenintervall $[2\pi/3, 8\pi/3]$ (anstatt $[-\pi, \pi]$). Durch Ausnutzen der Trägereigenschaft (4.23) erhalten wir

$$[\hat{\psi}, \hat{\psi}](\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2 = \begin{cases} |\hat{\psi}(\omega)|^2 + |\hat{\psi}(\omega - 2\pi)|^2 = |P(\omega/2 + \pi)|^2 + |P(\omega/2)|^2 = 1 \\ \text{für } 2\pi/3 \leq \omega \leq 4\pi/3, \\ |\hat{\psi}(\omega)|^2 + |\hat{\psi}(\omega - 4\pi)|^2 = |P(\omega/4)|^2 + |P(\omega/4 - \pi)|^2 = 1 \\ \text{für } 4\pi/3 < \omega \leq 8\pi/3, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}, \hat{\psi}(2\cdot)](\omega) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(\omega + 2k\pi) \overline{\hat{\psi}(2\omega + 4k\pi)} \\ &= \begin{cases} \hat{\psi}(\omega) \overline{\hat{\psi}(2\omega)} + \hat{\psi}(\omega - 2\pi) \overline{\hat{\psi}(2\omega - 4\pi)} \\ = e^{-i\omega/2} \overline{P(\omega/2 + \pi)} e^{i\omega} \overline{P(\omega/2)} + e^{-i(\omega - 2\pi)/2} \overline{P(\omega/2)} e^{i(\omega - 2\pi)} \overline{P(\omega/2 - \pi)} = 0 \\ \text{für } 2\pi/3 \leq \omega \leq 4\pi/3, \\ 0 \quad \text{für } 4\pi/3 < \omega \leq 8\pi/3, \end{cases} \end{aligned}$$

sowie $[\hat{\psi}, \hat{\psi}(2^j \cdot)] \equiv 0$ für alle $j \geq 2$.

Mit (4.22) zeigen wir nun die Vollständigkeit der Familie $\Psi = \{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$, die vom Meyer-Wavelet erzeugt wird. Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ sei $c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$. Mit Satz 4.18 b) ist

$$C_j(\omega) = \sum_k c_{j,k} e^{-ik\omega} = [2^{j/2} \hat{f}(2^j \cdot), \hat{\psi}](\omega) = \begin{cases} 2^{j/2} e^{i\omega/2} (\hat{f}(2^j \omega) P(\omega/2 + \pi) - \hat{f}(2^j(\omega - 2\pi)) P(\omega/2)) \\ \text{für } 2\pi/3 \leq \omega \leq 4\pi/3, \\ 2^{j/2} e^{i\omega/2} (\hat{f}(2^j \omega) P(\omega/4) + \hat{f}(2^j(\omega - 4\pi)) P(\omega/4 - \pi)) \\ \text{für } 4\pi/3 < \|\omega\| \leq 8\pi/3. \end{cases}$$

Hieraus folgt für $2\pi/3 \leq \omega \leq 4\pi/3$ die Identität

$$C_j(2\omega) = 2^{j/2} e^{i\omega} (\hat{f}(2^{j+1}\omega) P(\omega/2) + \hat{f}(2^{j+1}(\omega - 2\pi)) P(\omega/2 - \pi)).$$

Wir bilden nun die Integrale

$$\begin{aligned}
I_j &= \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} |C_{j+1}(\omega)|^2 d\omega + \int_{4\pi/3}^{8\pi/3} |C_j(\omega)|^2 d\omega \\
&= \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (|C_{j+1}(\omega)|^2 + 2|C_j(2\omega)|^2) d\omega \\
&= 2^{j+1} \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (|\hat{f}(2^{j+1}\omega) P(\omega/2 + \pi) - \hat{f}(2^{j+1}(\omega - 2\pi)) P(\omega/2)|^2 + \\
&\quad |\hat{f}(2^{j+1}\omega) P(\omega/2) + \hat{f}(2^{j+1}(\omega - 2\pi)) P(\omega/2 - \pi)|^2) d\omega.
\end{aligned}$$

Der Integrand im letzten Integral lässt sich als die Euklidische Norm (in \mathbb{C}^2) des Vektors

$$\begin{pmatrix} P(\omega/2 + \pi) & -P(\omega/2) \\ P(\omega/2) & P(\omega/2 - \pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}(2^{j+1}\omega) \\ \hat{f}(2^{j+1}(\omega - 2\pi)) \end{pmatrix}$$

auffassen. Aufgrund der Wahl von P ist die Matrix orthogonal, also gilt

$$\left\| \begin{pmatrix} P(\omega/2 + \pi) & -P(\omega/2) \\ P(\omega/2) & P(\omega/2 - \pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}(2^{j+1}\omega) \\ \hat{f}(2^{j+1}(\omega - 2\pi)) \end{pmatrix} \right\|^2 = |\hat{f}(2^{j+1}\omega)|^2 + |\hat{f}(2^{j+1}(\omega - 2\pi))|^2.$$

Diesen Ausdruck setzen wir in das obige Integral ein und erhalten

$$\begin{aligned}
I_j &= 2^{j+1} \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (|\hat{f}(2^{j+1}\omega)|^2 + |\hat{f}(2^{j+1}(\omega - 2\pi))|^2) d\omega \\
&= 2^{j+1} \int_{2\pi/3 \leq |\omega| \leq 4\pi/3} |\hat{f}(2^{j+1}\omega)|^2 d\omega \\
&= \int_{2^{j+2}\pi/3 \leq |\omega| \leq 2^{j+3}\pi/3} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.
\end{aligned}$$

Schließlich folgt mit Satz 4.18 c)

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2\pi \|Q_j f\|_2^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi/3}^{8\pi/3} |C_j(\omega)|^2 d\omega = \sum_{j \in \mathbb{Z}} I_j = \int_{0 < |\omega| < \infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \|f\|_2^2.$$

Damit ist auch die Vollständigkeit der Familie Ψ zum Meyer-Wavelet gezeigt. Insgesamt erhalten wir, dass das Meyer-Wavelet ψ in (4.25) ein orthogonales Wavelet ist.

BEMERKUNG 4.21. Die Behandlung bandbeschränkter Wavelets wird im Buch von E. Hernández und G. Weiss ausführlich dargestellt. Hier zeigt sich ein "Ineinandergreifen" der Translation und der Skalierung. Setzen wir

$$E := [-8\pi/3, -4\pi/3] \cup [2\pi/3, 4\pi/3]$$

so erhalten wir in

$$(4.26) \quad \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (E + 2k\pi) = \mathbb{R}, \quad \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} 2^j E = \mathbb{R},$$

jeweils Partitionen von \mathbb{R} . Die Menge E heißt "Wavelet-Menge". Wir zeigen in Übung 4.22, dass die Funktion ψ mit $\hat{\psi} = \chi|_E$ ein orthogonales Wavelet ist. Da $\hat{\psi}$ jedoch unstetig ist, ist das Abklingverhalten von ψ im Zeitbereich so schlecht, dass nicht einmal $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ gilt. Die Meyer-Wavelets lassen sich nun durch "Verklebung" von zwei Wavelets zu den Wavelet-Mengen $E_1 = E$ und $E_2 = -E$

definieren. Die Funktion σ in der Definition übernimmt hier diese Rolle. Dadurch wird eine höhere Glattheit im Frequenzbereich, also besseres Abklingverhalten im Zeitbereich bewirkt. Eine schöne operatorentheoretische Untersuchung zu diesem Verklebungsprozess wurde von D. Larson et al. entwickelt.

ÜBUNG 4.22. Eine messbare Menge $E \subset \mathbb{R}$ heißt Wavelet-Menge, wenn beide Gleichungen in (4.26) Partitionen von \mathbb{R} sind. Beweisen Sie, dass dann die Funktion ψ mit $\hat{\psi} = \chi|_E$ ein orthogonales Wavelet ist.

ÜBUNG 4.23. Zeigen Sie, dass $E = [-2\pi, -\pi) \cup [\pi, 2\pi)$ eine Wavelet-Menge ist. Berechnen Sie die Darstellung von ψ mit $\hat{\psi} = \chi|_E$ im Zeitbereich. Dieses Wavelet wird als "Littlewood-Paley"-Wavelet bezeichnet.

3. Vollständige Charakterisierung orthogonaler Wavelets

Die Aussage in Satz 4.15 stützt sich hauptsächlich auf die Shift-Invarianz der einzelnen Räume W_j , $j \in \mathbb{Z}$. Um eine vollständige Charakterisierung orthogonaler Wavelets zu erhalten, werden Shift-Invarianz und Skalierungs-Invarianz miteinander verknüpft. Das folgende Resultat wurde von F. Hernández, Wang, G. Weiss⁴, B. Han⁵, und A. Ron und Z. Shen⁶ ca. 1996 nahezu gleichzeitig entwickelt.

THEOREM 4.24. Eine Funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\|\psi\|_2 = 1$ ist genau dann orthogonales Wavelet, wenn

$$(4.27) \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j \omega)|^2 = 1$$

für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$ und

$$(4.28) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j \omega) \overline{\hat{\psi}(2^j(\omega + 2k\pi))} = 0$$

für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$ und jedes ungerade $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis dieses Satzes.

BEMERKUNG 4.25. Wir haben in Übungsaufgabe 2.18 gesehen, dass aus (4.27) die Bedingung $C_\psi < \infty$ in Definition 2.17 folgt (genauer: es ist $C_\psi = 2 \ln 2$). Also ist jedes orthogonale Wavelet (aufgrund des obigen Satzes) tatsächlich auch ein Wavelet im Sinne der Definition 2.17.

ÜBUNG 4.26. Geben Sie mit Hilfe des obigen Satzes eine erneute Lösung zu Übung 4.19 sowie zum Nachweis, dass die Meyer wavelets orthogonale Wavelets sind.

Die Aussage von Satz 4.24 wird in mehrere Resultate aufgeteilt. Zunächst werden Vereinfachungen der Aussage vorgenommen, die durch drei grundlegende Aussagen der Funktionalanalysis begründet sind (Sätze 4.30, 4.31 und 4.32). Einen Überblick über den Beweisgang (und weitere Aussagen) gibt das folgende Schema, in dem wir die folgenden Abkürzungen verwenden:

⁴Guido Weiss, Washington University in St. Louis, USA

⁵Bin Han, University of Edmonton, Kanada

⁶A. Ron, University of Wisconsin, Z. Shen, National University of Singapore

- (A) bedeutet: $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2$,
- (B) bedeutet: $\langle f, g \rangle = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \langle \psi_{j,k}, g \rangle$,
- (C) bedeutet: $f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$ mit Konvergenz in $L^2(\mathbb{R})$,
- $D \subset L^2(\mathbb{R})$ ist eine beliebige dichte Teilmenge.

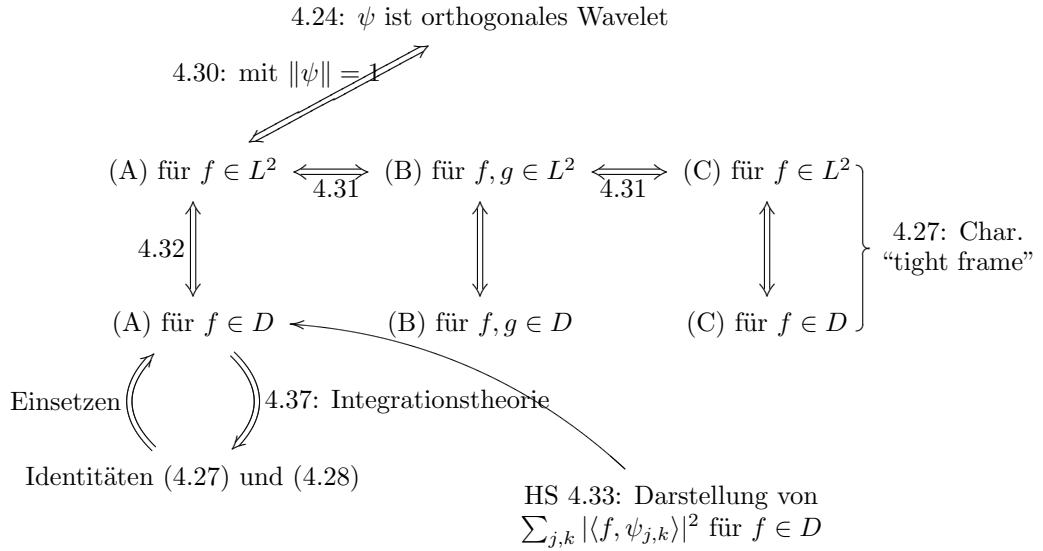


BILD 4.1. Beweisschema zu Satz 4.24

Die Voraussetzung $\|\psi\|_2 = 1$ in Satz 4.24 ist ganz nat\u00fcrlich (und notwendig f\u00fcr eine Orthonormalbasis), da ja $\|\psi_{j,k}\| = \|\psi\| = 1$ f\u00fcr alle $j, k \in \mathbb{Z}$ gelten muss. Unter Weglassen dieser Voraussetzung wird bei G\u00fcltigkeit der Identit\u00e4t

$$(4.29) \quad \|f\|_2^2 = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

die Familie $\Psi = \{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ ein *Wavelet-Tight-Frame* genannt. Dessen Charakterisierung gibt das folgende Resultat.

THEOREM 4.27. *Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ und $D \subset L^2(\mathbb{R})$ eine dichte Teilmenge. Dann sind die folgenden Aussagen \u00e4quivalent.*

- a) F\u00fcr alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt die Identit\u00e4t (4.29).
- b) F\u00fcr alle $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \langle \psi_{j,k}, g \rangle.$$

- c) F\u00fcr alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

mit unbedingter Konvergenz der Reihe in $L^2(\mathbb{R})$.

- d) Für alle $f, g \in D$ gilt eine (und damit alle) der Aussagen a)-c).
 e) Es gelten die Identitäten (4.27) und (4.28).

BEMERKUNG 4.28. Die Identität (4.29) sieht aus wie die Parseval-Identität. Sie unterscheidet sich aber tatsächlich dadurch, dass die Funktionen $\psi_{j,k}$ hier nicht als Orthonormalsystem vorausgesetzt sind.

ÜBUNG 4.29. Ein einfaches Beispiel für eine solche Identität (4.29) im Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ wird durch die drei Elemente $v_1 = (0, \frac{\sqrt{6}}{3})$, $v_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6})$, $v_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6})$ gegeben ("Mercedes-Stern"), die sicherlich keine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^2 bilden. Skizzieren Sie die Elemente v_k , $k = 1, 2, 3$, und zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ (versehen mit der Euklidischen Norm) die Identität

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^3 |\langle x, v_k \rangle|^2$$

gilt.

Wir wollen nun zeigen, dass aus Satz 4.27 auch der Satz 4.24 folgt. Dazu genügt es zu zeigen, dass aus der Identität (4.29) sowie der Bedingung $\|\psi\|_2 = 1$ folgt, dass ψ ein orthogonales Wavelet ist, dass also die Familie Ψ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$ ist. Dies lässt sich wegen $\|\psi_{j,k}\|_2 = \|\psi\|_2 = 1$ sofort aus dem folgenden Satz der Funktionalanalysis schließen.

SATZ 4.30. Gegeben sei eine endliche oder abzählbare Teilmenge $\{e_j; j \in J\} \subset \mathcal{H}$ eines Hilbertraums \mathcal{H} und es gelte

$$(4.30) \quad \sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle_{\mathcal{H}}|^2 = \|f\|_{\mathcal{H}}^2$$

für alle $f \in \mathcal{H}$. Falls zusätzlich $\|e_j\|_{\mathcal{H}} \geq 1$ für alle $j \in J$ gilt, so ist $\{e_j; j \in J\}$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} .

Beweis: Für $f = e_\ell$ mit $\ell \in J$ folgt aus (4.30)

$$\|e_\ell\|^2 = |\langle e_\ell, e_\ell \rangle|^2 + \sum_{j \neq \ell} |\langle e_\ell, e_j \rangle|^2 = \|e_\ell\|^4 + \sum_{j \neq \ell} |\langle e_\ell, e_j \rangle|^2.$$

Dies ergibt

$$\|e_\ell\|^2(1 - \|e_\ell\|^2) = \sum_{j \neq \ell} |\langle e_\ell, e_j \rangle|^2.$$

Wegen $\|e_\ell\| \geq 1$ ist die linke Seite dieser Gleichung nichtpositiv, während die rechte Seite nichtnegativ ist. Also müssen beide Seiten gleich 0 sein, und dies ergibt

$$\|e_\ell\| = 1, \quad \langle e_\ell, e_j \rangle = 0 \quad \text{für alle } j \neq \ell.$$

Da $\ell \in J$ beliebig war, haben wir gezeigt, dass die Familie $\{e_j; j \in J\}$ ein Orthonormalsystem in \mathcal{H} ist. Ihre Vollständigkeit folgt sofort aus (4.30). \square

Die Äquivalenz der Aussagen (a)–(c) in Satz 4.27 gilt ebenfalls für allgemeine Hilberträume.

SATZ 4.31. Für eine endliche oder abzählbare Teilmenge $\{e_j; j \in J\} \subset \mathcal{H}$ eines Hilbertraums \mathcal{H} sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) Die Identität (4.30) gilt für alle $f \in \mathcal{H}$.
 b) Für alle $f, g \in \mathcal{H}$ gilt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle \langle e_j, g \rangle.$$

- c) Für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt

$$f = \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle e_j,$$

wobei für unendliches J die unbedingte Konvergenz der Reihe in der Norm von \mathcal{H} vorliegt.

Beweis: Teil a) folgt aus b) durch Einsetzen von $f = g$. Teil b) folgt aus a) durch "Polarisation": Man rechnet leicht nach, dass für alle $f, g \in \mathcal{H}$

$$\langle f, g \rangle = \frac{\|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2}{4} + \frac{\|f - ig\|_2^2 - \|f + ig\|_2^2}{4i}$$

gilt. Die analoge Beziehung für die Folgen $(\langle f, e_j \rangle)_{j \in J}$ und $(\langle g, e_j \rangle)_{j \in J}$ im Hilbertraum $\ell^2(J)$ ergeben die Identität in b).

Die Äquivalenz von b) und c) für endliches J ist sofort klar. Sei also nun J abzählbar und $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow J$ irgendeine Bijektion. Dann folgt aus

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=1}^N \langle f, e_{\sigma(j)} \rangle e_{\sigma(j)} \right\| = 0$$

und der Stetigkeit des Skalarprodukts auch

$$\langle f, g \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \langle f, e_{\sigma(j)} \rangle \langle e_{\sigma(j)}, g \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_{\sigma(j)} \rangle \langle e_{\sigma(j)}, g \rangle.$$

Also folgt die Aussage b) aus c). Es bleibt zu zeigen, dass aus Teil a) und/oder b) auch Teil c) folgt. Dazu betrachten wir zunächst die Partialsummen

$$S_N = \sum_{j=1}^N \langle f, e_{\sigma(j)} \rangle e_{\sigma(j)}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Für $M \leq N$ gilt

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=M}^N \langle f, e_{\sigma(j)} \rangle e_{\sigma(j)} \right\| &= \sup_{g \in \mathcal{H}, \|g\| \leq 1} \left| \left\langle \sum_{j=M}^N \langle f, e_{\sigma(j)} \rangle e_{\sigma(j)}, g \right\rangle \right| \\ &\leq \sup_{g \in \mathcal{H}, \|g\| \leq 1} \sum_{j=M}^N |\langle f, e_{\sigma(j)} \rangle| |\langle g, e_{\sigma(j)} \rangle| \\ &\leq \left(\sum_{j=M}^N |\langle f, e_{\sigma(j)} \rangle|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

weil mit Teil a) gilt

$$\left(\sum_{j=M}^N |\langle g, e_{\sigma(j)} \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \|g\| \leq 1.$$

Aus a) folgt also, dass $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathcal{H} ist. Weil \mathcal{H} vollständig ist, existiert $h \in \mathcal{H}$ mit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N - h\| = 0.$$

(Dieses h könnte noch von der durch σ gegebenen Anordnung von J abhängen.)

Für alle $g \in \mathcal{H}$ folgt dann

$$\langle h, g \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \langle f, e_{\sigma(j)} \rangle \langle e_{\sigma(j)}, g \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_{\sigma(j)} \rangle \langle e_{\sigma(j)}, g \rangle = \langle f, g \rangle,$$

wobei im letzten Schritt Teil b) verwendet wurde. Also muss $h = f$ gelten. Damit ist gezeigt, dass die Reihe $\sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle e_j$ unbedingd (d.h. für jede Anordnung σ) gegen f in der Norm von \mathcal{H} konvergiert. \square

Die Äquivalenz der Teile a)-c) und d) von Satz 4.27 wird wieder für allgemeine Hilberträume formuliert. Dabei beschränken wir uns auf die Eigenschaft in Teil a).

SATZ 4.32. *Gegeben sei eine endliche oder abzählbare Teilmenge $\{e_j; j \in J\} \subset \mathcal{H}$ eines Hilbertraums \mathcal{H} und es (4.30) für alle Elemente f einer dichten Teilmenge $D \subset \mathcal{H}$. Dann gilt die Identität für alle $f \in \mathcal{H}$.*

Beweis: Sei $f \in \mathcal{H}$ und $g_n \in D$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - f\| = 0.$$

O.B.d.A. sei $J = \mathbb{N}$. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ folgt dann aus der Voraussetzung

$$\sum_{j=1}^N |\langle f, e_j \rangle|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N |\langle g_n, e_j \rangle|^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\langle g_n, e_j \rangle|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|^2 = \|f\|^2.$$

Weil N beliebig war, folgt

$$(4.31) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

(Die Konvergenz der Reihe folgt wegen Monotonie und Beschränktheit der Partialsummen.) Wir nehmen nun an, dass im Gegensatz zur Behauptung

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2 \right)^{1/2} = \|f\| - 2\epsilon$$

mit einem $\epsilon > 0$ gilt. Dann wählen wir $g \in D$ mit $\|f - g\| < \epsilon$. Die bereits bewiesene Abschätzung ergibt

$$\|(\langle f - g, e_j \rangle)_{j \in \mathbb{N}}\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f - g, e_j \rangle|^2 \leq \|f - g\|^2 < \epsilon^2.$$

Wenden wir die Dreiecksungleichung in $\ell^2(\mathbb{N})$ auf die Folgen $(\langle f - g, e_j \rangle)_{j \in \mathbb{N}}$ und $(\langle f, e_j \rangle)_{j \in \mathbb{N}}$ an, so folgt aus der Voraussetzung des Satzes, dass

$$\|g\| = \|(\langle g, e_j \rangle)_{j \in \mathbb{N}}\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \leq \|(\langle f, e_j \rangle)_{j \in \mathbb{N}}\|_{\ell^2(\mathbb{N})} + \|(\langle f - g, e_j \rangle)_{j \in \mathbb{N}}\|_{\ell^2(\mathbb{N})} < \|f\| - 2\epsilon + \epsilon = \|f\| - \epsilon$$

gilt. Dies ist aber ein Widerspruch, da mit der Dreiecksungleichung in \mathcal{H} auch $\|g\| \geq \|f\| - \|f - g\| > \|f\| - \epsilon$ folgt. Also muss in (4.31) die Gleichheit für alle $f \in \mathcal{H}$ gelten. \square

Nach diesen Vereinfachungen der Aussage von Satz 4.24 bleibt noch die Äquivalenz von (d) \iff (e) in Satz 4.27 zu beweisen. Dies ist der schwierigste Teil des ganzen Beweises. Als dichten Teilraum $D \subset L^2(\mathbb{R})$ verwenden wir den Raum

$$(4.32) \quad D = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} \hat{f} \text{ beschränkt und es existieren } 0 < r < R \\ \text{mit } \hat{f}(\omega) = 0 \text{ für } |\omega| < r \text{ und } |\omega| > R \end{array} \right\}.$$

Als Zwischenresultat entwickeln wir zwei Darstellungen für die fragliche Reihe

$$(4.33) \quad I := \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2, \quad f \in D.$$

Dazu verwenden wir, in Anlehnung an das Klammerprodukt (4.8), die Bezeichnung

$$[\hat{f}, \hat{g}]_0(\omega) := \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \hat{f}(\omega + 2k\pi) \overline{\hat{g}(\omega + 2k\pi)}, \quad \hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Darüber hinaus benötigen wir die Abkürzung

$$(4.34) \quad t_q(\omega) := \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j \omega) \overline{\hat{\psi}(2^j(\omega + 2q\pi))}, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

HILFSSATZ 4.33. Für beliebige $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ und $f \in D$ gilt $I = I^{(0)} + I^{(1)}$ mit

$$(4.35) \quad I^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j \omega)|^2 d\omega$$

und

$$(4.36) \quad I^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(2^j \omega)} \hat{\psi}(\omega) [\hat{f}(2^j \cdot), \hat{\psi}]_0(\omega) d\omega$$

$$(4.37) \quad = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in 2\mathbb{Z}+1} \overline{\hat{f}(\omega)} \hat{f}(\omega + 2^j 2q\pi) t_q(2^{-j} \omega) d\omega.$$

Beide Integrale in (4.36) und (4.37) sind endlich, wenn \hat{f} und $\hat{\psi}$ durch $|\hat{f}|$ und $|\hat{\psi}|$ ersetzt werden.

Beweis: 1. Gleichung (4.21) ergibt für festes $j \in \mathbb{Z}$

$$I_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | [2^{j/2} \hat{f}(2^j \cdot), \hat{\psi}](\omega) |^2 d\omega.$$

Dabei ist die Reihe

$$[2^{j/2} \hat{f}(2^j \cdot), \hat{\psi}] = 2^{j/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2^j(\omega + 2k\pi)) \overline{\hat{\psi}(\omega + 2k\pi)}, \quad \omega \in [0, 2\pi],$$

für $f \in D$ endlich; also gilt

$$\begin{aligned}
I_j &= \frac{2^j}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2^j(\omega + 2k\pi)) \overline{\hat{f}(2^j(\omega + 2m\pi))} \hat{\psi}(\omega + 2k\pi) \hat{\psi}(\omega + 2m\pi) d\omega \\
&= \frac{2^j}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(2^j\omega)} \hat{\psi}(\omega) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2^j(\omega + 2k\pi)) \overline{\hat{\psi}(\omega + 2k\pi)} d\omega \\
&= I_j^{(0)} + I_j^{(1)},
\end{aligned}$$

wobei wir

$$\begin{aligned}
I_j^{(0)} &= \frac{2^j}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(2^j\omega)|^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \\
I_j^{(1)} &= \frac{2^j}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(2^j\omega)} \hat{\psi}(\omega) [\hat{f}(2^j\cdot), \hat{\psi}]_0(\omega) d\omega
\end{aligned}$$

setzen. Summation über $j \in \mathbb{Z}$ ergibt $I = I^{(0)} + I^{(1)}$ mit den Darstellungen (4.35) und (4.36). Die Vertauschung der Summation mit der Integration bei $I^{(0)}$ ist gerechtfertigt, da alle Summanden positiv sind. (Evtl. liefert $I^{(0)}$ den Wert ∞ .)

2. Um von (4.36) nach (4.37) zu gelangen, zeigen wir zunächst

$$(4.38) \quad \tilde{I}^{(1)} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(2^j\omega)| |\hat{\psi}(\omega)| |[\hat{f}(2^j\cdot), \hat{\psi}]_0(\omega)| d\omega < \infty.$$

Um dies einzusehen, beachten wir die Ungleichung

$$2|\hat{\psi}(\omega)| |\hat{\psi}(\omega + 2k\pi)| \leq |\hat{\psi}(\omega)|^2 + |\hat{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2,$$

aus der wir auf

$$\begin{aligned}
\tilde{I}^{(1)} &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j-1} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k \neq 0} |\hat{f}(2^j\omega)| |\hat{f}(2^j(\omega + 2k\pi))| \left(|\hat{\psi}(\omega)|^2 + |\hat{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2 \right) d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j-1} \sum_{k \neq 0} |\hat{f}(2^j\omega)| \left(|\hat{f}(2^j(\omega + 2k\pi))| + |\hat{f}(2^j(\omega - 2k\pi))| \right) d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \sum_{k \neq 0} |\hat{f}(2^j\omega)| |\hat{f}(2^j(\omega + 2k\pi))| d\omega
\end{aligned}$$

schließen. Wir zeigen in Hilfssatz 4.34, dass das letzte Integral endlich ist. Dies erlaubt uns nun, die Summation und die Integration zu vertauschen sowie die Summationsreihenfolge beliebig umzuordnen.

3. Wir schreiben $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ in der eindeutigen Form $k = 2^\ell q$ mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ und q ungerade. Dann ergibt sich (4.37) aus der Darstellung

$$\begin{aligned}
2\pi I^{(1)} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(2^j \omega) \hat{\psi}(\omega)} \sum_{k \neq 0} \hat{f}(2^j(\omega + 2k\pi)) \overline{\hat{\psi}(\omega + 2k\pi)} d\omega \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\omega) \hat{\psi}(2^{-j}\omega)} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{q \in 2\mathbb{Z}+1} \hat{f}(\omega + 2^{j+\ell} 2q\pi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}\omega + 2^\ell 2q\pi)} d\omega \\
&\stackrel{p=j+\ell}{=} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\omega)} \sum_{q \in 2\mathbb{Z}+1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^{\ell-p}\omega) \hat{f}(\omega + 2^p 2q\pi) \overline{\hat{\psi}(2^{\ell-p}\omega + 2^\ell 2q\pi)} d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\omega)} \sum_{q \in 2\mathbb{Z}+1} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2^p 2q\pi) \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^{\ell-p}\omega) \overline{\hat{\psi}(2^{\ell-p}\omega + 2^\ell 2q\pi)}}_{=t_q(2^{-p}\omega)} d\omega
\end{aligned}$$

Damit ist Hilfssatz 4.33 bewiesen. \square

HILFSSATZ 4.34. *Es seien $0 < r < R < \infty$ und $f \in D$ mit $\hat{f}(\omega) = 0$ für alle $|\omega| < r$ und $|\omega| > R$. Weiter sei $\delta = \text{diam}(\text{supp } \hat{f})$ der Durchmesser des Trägers von \hat{f} . Dann gilt*

$$(4.39) \quad \alpha(\omega) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \neq 0} 2^j |\hat{f}(2^j \omega)| |\hat{f}(2^j(\omega + 2k\pi))| \leq \frac{\delta}{\pi} (1 + \log_2 \frac{R}{r}) \|\hat{f}\|_{L^\infty}^2$$

für alle $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Weiterhin ist

$$(4.40) \quad \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \alpha(\omega) d\omega \leq \frac{\delta}{\pi} (1 + \log_2 \frac{R}{r}) \|\hat{f}\|_{L^\infty}^2 \int_{|\omega| \geq \frac{2r\pi}{\delta}} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega.$$

Beweis: 1. Für alle $j \in \mathbb{Z}$ mit $2^j 2\pi > \delta$ liegt mindestens einer der Punkte $2^j \omega$ bzw. $2^j(\omega + 2k\pi)$ außerhalb des Trägers von \hat{f} (wegen $k \neq 0$). Also brauchen wir nur $j \in \mathbb{Z}$ mit

$$(4.41) \quad 2^j 2\pi \leq \delta \iff j \leq \log_2 \frac{\delta}{2\pi}$$

berücksichtigen. Für ein solches j ist die Anzahl der von Null verschiedenen Summanden der Form

$$2^j |\hat{f}(2^j \omega)| |\hat{f}(2^j(\omega + 2k\pi))|$$

höchstens $(1 + \frac{\delta}{2^{j+1}\pi})$, und jeder dieser Summanden ist beschränkt durch $2^j \|\hat{f}\|_{L^\infty}^2$. Also trägt ein festes $j \leq \log_2 \frac{\delta}{2\pi}$ höchstens

$$\sum_{k \neq 0} 2^j |\hat{f}(2^j \omega)| |\hat{f}(2^j(\omega + 2k\pi))| \leq \left(2^j + \frac{\delta}{2\pi}\right) \|\hat{f}\|_{L^\infty}^2 \leq \frac{\delta}{\pi} \|\hat{f}\|_{L^\infty}^2$$

zum Wert $\alpha(\omega)$ bei.

2. Halten wir nun $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fest, so liegt $2^j \omega$ für höchstens $(1 + \log_2 \frac{R}{r})$ Werte von j im Träger von \hat{f} . Damit ergibt sich die behauptete Abschätzung von $\alpha(\omega)$.

3. Weiterhin gilt: Damit $2^j\omega$ für mindestens ein j aus Gleichung (4.41) im Träger von \hat{f} liegt, muss

$$|\omega| \geq 2^{-j}r \geq \frac{2r\pi}{\delta}$$

gelten. Damit ist auch (4.40) gezeigt. \square

Wir können uns nun dem abschließenden Beweis der Äquivalenz (d) \iff (e) in Satz 4.27 zuwenden. Die Richtung (e) \implies (d) folgt direkt aus Hilfssatz 4.33: Gleichung (4.28) liefert $t_q \equiv 0$ für alle ungeraden $q \in \mathbb{Z}$, also $I^{(1)} = 0$. Aus Gleichung (4.27) folgt sodann

$$I = I^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

Die andere Richtung (d) \implies (e) ist nochmals schwierig und verlangt Kenntnisse aus der Integrationstheorie.

DEFINITION 4.35. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt lokal-integrierbar, wenn $f|_K$ für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ absolut-integrierbar (über K) ist.

Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ heißt Lebesgue-Punkt von f , wenn

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| dt = 0$$

gilt. Insbesondere gilt dann auch

$$(4.42) \quad f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) dt.$$

Das folgende Resultat wird im Buch von Zygmund, Seite 65, Satz II.11.1 bewiesen.

SATZ 4.36. Fast alle Punkte (d.h. alle bis auf eine Nullmenge) einer lokal-integrierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sind Lebesgue-Punkte dieser Funktion.

Nun haben wir alle Hilfsmittel parat, um den Beweis zu führen. Wir beweisen die Identitäten nacheinander.

HILFSSATZ 4.37. Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Falls für alle $f \in D$ die Identität (4.29) gilt, so gilt auch (4.27).

Beweis: 1. Nach Voraussetzung ist für jedes $f \in D$ die Summe I in (4.33) endlich. Weil $I^{(1)}$ nach Lemma 4.33 ebenfalls endlich ist, muss auch

$$I^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 \underbrace{\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\omega)|^2}_{=: X(\omega)} d\omega$$

endlich sein. Also ist X zumindest lokal-integrierbar. Es genügt nach Satz 4.36, die Identität $X(\omega) = 1$ für alle Lebesgue-Punkte von X zu beweisen.

2. Sei nun $\omega_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Lebesgue-Punkt von X . Wir betrachten $\delta > 0$ mit $[\omega_0 - \delta, \omega_0 + \delta] \cap \{0\} = \emptyset$. Für jedes solche δ definieren wir die Funktion f_δ durch

$$\hat{f}_\delta = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \chi_{[\omega_0 - \delta, \omega_0 + \delta]}.$$

Aus der Voraussetzung (4.29) und Hilfssatz 4.33 folgt

$$1 = \|\hat{f}_\delta\|_2^2 = 2\pi\|f_\delta\|_2^2 = 2\pi I_\delta = \int_{\omega_0-\delta}^{\omega_0+\delta} \frac{1}{2\delta} X(\omega) d\omega + 2\pi I_\delta^{(1)}.$$

(Hier verwenden wir den Index δ , um den Bezug der Bezeichnungen in Hilfssatz 4.33 zur Funktion f_δ auszudrücken.) Bilden wir den Grenzwert für $\delta \rightarrow 0$, so erhalten wir

$$1 = X(\omega_0) + \lim_{\delta \rightarrow 0} 2\pi I_\delta^{(1)}.$$

Um den Beweis abzuschließen genügt es also zu zeigen, dass $\lim_{\delta \rightarrow 0} I_\delta^{(1)} = 0$ gilt.

3. Der Durchmesser des Trägers von f_δ ist 2δ . Wie im 2. Schritt des Beweises von Hilfssatz 4.33 erhalten wir

$$|I_\delta^{(1)}| \leq \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \alpha_\delta(\omega) d\omega,$$

wobei α_δ die Funktion in (4.39) bezogen auf f_δ ist. Nun folgt aus der Ungleichung (4.40) in Hilfssatz 4.34

$$|I_\delta^{(1)}| \leq \frac{2\delta}{\pi} (1 + \log_2 \frac{\omega_0+\delta}{\omega_0-\delta}) \underbrace{\|\hat{f}_\delta\|_{L^\infty}^2}_{=\frac{1}{2\delta}} \int_{|\omega| \geq \frac{\pi(\omega_0-\delta)}{\delta}} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega = C \int_{|\omega| \geq \frac{\pi(\omega_0-\delta)}{\delta}} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega$$

mit der Konstanten $C = (1 + \log_2 \frac{\omega_0+\delta}{\omega_0-\delta})$. Der Grenzwert des Integrals für $\delta \rightarrow 0$ ist Null, also gilt $\lim_{\delta \rightarrow 0} I_\delta^{(1)} = 0$. Damit ist die Identität $X(\omega_0) = 1$ für alle Lebesgue-Punkte von X gezeigt. \square

BEMERKUNG 4.38. a) *Der obige Hilfssatz wurde vor der Charakterisierung orthogonaler Wavelets bewiesen und als "Littlewood-Paley-Identität" von Tight-Wavelet-Frames bezeichnet. Eine allgemeinere Form findet sich bei C. K. Chui und X. Shi, "On a Littlewood-Paley identity and characterization of wavelets", J. Math. Anal. Appl. 177, No. 2, 608-626 (1993), [Zbl 0782.42025].*

b) *Die Identität (4.27) charakterisiert die Isometrie der so genannten dyadischen Wavelet-Transformation von S. Mallat und Zhang, die definiert ist durch*

$$f \mapsto (f * \tilde{\psi}_j)_{j \in \mathbb{Z}}, \quad \tilde{\psi}_j := \overline{2^j \psi(-2^j \cdot)}.$$

Hier wird also nur eine Diskretisierung des Skalierungsparameters a der CWT vorgenommen, während der Shift-Parameter b kontinuierlich bleibt. Eine Beschreibung findet man im Buch von S. Mallat, Abschnitt 5.5.

Schließlich und endlich geben wir noch das fehlende Resultat zur Identität (4.28) an, um den Beweis der Sätze 4.24 und 4.27 vollständig abzuschließen.

HILFSSATZ 4.39. *Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Falls für alle $f \in D$ die Identität (4.29) gilt, so gilt auch (4.28).*

Beweis: Die Beweisschritte sind ähnlich zu denen des Hilfssatzes 4.37.

1. Wegen

$$(4.43) \quad 2|t_q(\omega)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j \omega)|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j(\omega + 2q\pi))|^2 =: X_0(\omega) + X_0(\omega + 2q\pi)$$

und $0 \leq X_0 \leq X$ ist t_q lokal-integrierbar. Wir halten für den 5. Beweisschritt jetzt schon fest, dass mit

$$\int_{\mathbb{R}} X_0(\omega) d\omega = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(2^j \omega)|^2 d\omega = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \|\hat{\psi}\|_2^2 = 2 \|\hat{\psi}\|_2^2$$

sogar die Integrierbarkeit von X_0 und t_q über \mathbb{R} folgt. Insgesamt genügt es also, die Identität $t_q(\omega) = 0$ für alle Lebesgue-Punkte von t_q zu beweisen.

2. Aus der Voraussetzung (4.29), Hilfssatz 4.33 und Hilfssatz 4.37 folgt

$$2\pi I^{(1)} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in 2\mathbb{Z}+1} \overline{\hat{f}(\omega)} \hat{f}(\omega + 2^j 2q\pi) t_q(2^{-j} \omega) d\omega = 0$$

für alle $f \in D$. Durch Polarisation erhalten wir wie üblich

$$(4.44) \quad J := \int_{\mathbb{R}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in 2\mathbb{Z}+1} \overline{\hat{f}(\omega)} \hat{g}(\omega + 2^j 2q\pi) t_q(2^{-j} \omega) d\omega = 0$$

für alle $f, g \in D$.

3. Sei nun q_0 ungerade und $\omega_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2q_0\pi\}$ ein Lebesgue-Punkt von t_{q_0} . Weiterhin sei

$$0 < \delta < \min \left\{ \pi, \frac{|\omega_0|}{3}, \frac{|\omega_0 + 2q_0\pi|}{3} \right\}.$$

Dann enthält keines der Intervalle $K_1 = [\omega_0 - \delta, \omega_0 + \delta]$ und $K_2 = [\omega_0 + 2q_0\pi - \delta, \omega_0 + 2q_0\pi + \delta]$ den Nullpunkt. Wir wählen die Funktionen

$$\hat{f}_\delta = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \chi_{K_1}, \quad \hat{g}_\delta = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \chi_{K_2}$$

und überlegen zunächst, welche Summanden in (4.44) überhaupt übrig bleiben. Einfache Überlegung zeigt

$$\hat{f}_\delta(\omega) \hat{g}_\delta(\omega + 2q_0\pi) = \frac{1}{2\delta} \chi_{K_1}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Wegen $\delta < \pi$ gilt

$$\hat{f}_\delta(\omega) \hat{g}_\delta(\omega + 2q\pi) = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}, \text{ falls } q \neq q_0.$$

Weiterhin kann für $j \neq 0$ die Beziehung $\hat{f}_\delta(\omega) \hat{g}_\delta(\omega + 2^j 2q\pi) \neq 0$ (mit ungeradem $q \in \mathbb{Z}$) nur gelten, wenn

$$|\omega - \omega_0| < \delta \quad \text{und} \quad |\omega + 2^j 2q\pi - \omega_0 - 2q_0\pi| < \delta$$

erfüllt ist. Hieraus folgt

$$(4.45) \quad |2^j q - q_0| \leq \frac{1}{2\pi} (|\omega - \omega_0| + |\omega + 2^j 2q\pi - \omega_0 - 2q_0\pi|) < \frac{\delta}{\pi} < 1.$$

Dadurch wird sofort $j > 0$ ausgeschlossen, da die Differenz $2^j q - q_0$ eine ungerade ganze Zahl (also ≥ 1) ist. Ebenso wird $j < 0$ mit $2^j \geq \delta/\pi$ ausgeschlossen, da dann

$$|2^j q - q_0| = 2^j \underbrace{|q - 2^{-j} q_0|}_{\in 2\mathbb{Z}+1} \geq \delta/\pi$$

gilt. Sei $j_0 < 0$ die größte ganze Zahl, für die $2^{j_0} < \delta/\pi$ gilt. Für die verbleibenden $j \in \mathbb{Z}$ mit $j \leq j_0$ ergibt (4.45) die notwendige Bedingung

$$(4.46) \quad |q - 2^{-j}q_0| < 2^{-j} \frac{\delta}{\pi}$$

dafür, dass $\hat{f}_\delta(\omega)\hat{g}_\delta(\omega + 2^j 2q\pi) \neq 0$ gilt. Die Menge der durch (4.46) definierten ungeraden ganzen Zahlen q bezeichnen wir im Folgenden mit L_j . Ihre Anzahl ist nach oben beschränkt durch

$$(4.47) \quad N_j := \#L_j \leq 2^{-j+1} \frac{\delta}{\pi}.$$

4. Wir setzen nun f_δ und g_δ in (4.44) ein und erhalten aus den vorherigen Überlegungen

$$J_\delta = J_\delta^{(0)} + J_\delta^{(1)}$$

mit den Ausdrücken

$$J_\delta^{(0)} = \frac{1}{2\delta} \int_{K_1} t_{q_0}(\omega) d\omega$$

für den Summanden mit $j = 0$ und $q = q_0$ sowie

$$J_\delta^{(1)} = \sum_{j \leq j_0} \sum_{q \in L_j} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}_\delta(\omega)} \hat{g}_\delta(\omega + 2^j 2q\pi) t_q(2^{-j}\omega) d\omega$$

für alle übrigen Summanden. Der erste Summand $J_\delta^{(0)}$ konvergiert gegen $t_{q_0}(\omega_0)$ für δ gegen 0, weil ω_0 ein Lebesgue-Punkt der Funktion t_{q_0} ist. Um den Beweis abzuschließen genügt es also zu zeigen, dass $\lim_{\delta \rightarrow 0} J_\delta^{(1)} = 0$ gilt.

5. Aus (4.43) ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} 2|J_\delta^{(1)}| &\leq \sum_{j \leq j_0} \sum_{q \in L_j} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}_\delta(\omega)} \hat{g}_\delta(\omega + 2^j 2q\pi) (X_0(2^{-j}\omega) + X_0(2^{-j}\omega + 2q\pi)) d\omega \\ &= J_\delta^{(a)} + J_\delta^{(b)}, \end{aligned}$$

wobei die neu eingeführten Ausdrücke mit (4.47) weiter behandelt werden in

$$\begin{aligned} J_\delta^{(a)} &:= \sum_{j \leq j_0} \sum_{q \in L_j} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}_\delta(\omega)} \hat{g}_\delta(\omega + 2^j 2q\pi) X_0(2^{-j}\omega) d\omega \\ &\leq \sum_{j \leq j_0} \frac{N_j}{2\delta} \int_{K_1} X_0(2^{-j}\omega) d\omega, \\ J_\delta^{(b)} &:= \sum_{j \leq j_0} \sum_{q \in L_j} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}_\delta(\omega)} \hat{g}_\delta(\omega + 2^j 2q\pi) X_0(2^{-j}\omega + 2q\pi) d\omega \\ &= \sum_{j \leq j_0} \sum_{q \in L_j} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}_\delta(\omega - 2^j 2q\pi)} \hat{g}_\delta(\omega) X_0(2^{-j}\omega) d\omega \\ &\leq \sum_{j \leq j_0} \frac{N_j}{2\delta} \int_{K_2} X_0(2^{-j}\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Da beide Ausdrücke dieselbe Form haben, geben wir die weitere Abschätzung nur für $J_\delta^{(a)}$ an. Wegen $\delta < |\omega_0|/3$ sind die Intervalle $2^j K_1$, $j \in \mathbb{Z}$, paarweise disjunkt.

(Hier wird also die Wahl von δ im 2. Schritt erklärt!) Für $\omega_0 > 0$ ist sogar

$$\bigcup_{j \leq j_0} 2^{-j} K_1 \subset [2^{-j_0}(\omega_0 - \delta), \infty) \subset \left[\frac{\pi}{\delta}(\omega_0 - \delta), \infty \right) \subset \left[\frac{2\pi\omega_0}{3\delta}, \infty \right).$$

Die entsprechende Beziehung für $\omega_0 < 0$ sowie die Substitution $\eta = 2^{-j}\omega$ und (4.47) ergeben

$$\begin{aligned} J_\delta^{(a)} &\leq \sum_{j \leq j_0} \frac{2^j N_j}{2\delta} \int_{2^{-j} K_1} X_0(\eta) d\eta \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{|\eta| > \frac{2\pi|\omega_0|}{3\delta}} X_0(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Weil $X_0 \in L^1(\mathbb{R})$ gilt, folgt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J_\delta^{(a)} = 0.$$

Ganz analog erhalten wir wegen $\delta < |\omega_0 + 2q_0\pi|/3$ auch

$$J_\delta^{(b)} \leq \frac{1}{\pi} \int_{|\eta| > \frac{2\pi|\omega_0 + 2q_0\pi|}{3\delta}} X_0(\eta) d\eta$$

und

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J_\delta^{(b)} = 0.$$

Damit gilt auch $\lim_{\delta \rightarrow 0} J_\delta^{(1)} = 0$, und der Beweis von Hilfssatz 4.39 ist vollständig. \square

BEMERKUNG 4.40. *Nachzulesen sind die Ergebnisse dieses Abschnittes im Buch von Hernández und Weiss auf S. 332–347 (Abschnitt 7.1). In Abschnitt 3.2, Seiten 105–115, ist ein etwas einfacherer Beweis für den Fall angegeben, dass ψ band-beschränkt ist (d.h. $\hat{\psi}$ hat selbst kompakten Träger). Dadurch werden einige Abschätzungen, insbesondere die von $I^{(1)}$ überflüssig. Weiterhin wird in dem Buch bewiesen, dass jedes band-beschränkte orthogonale Wavelet ψ schon ein Element von D ist, also $\hat{\psi}$ in einer Umgebung von 0 identisch verschwindet.*

Multiskalen-Analyse und DWT

Die Betrachtungen im vorherigen Kapitel waren auf das Wavelet ψ und die Wavelet-Räume $W_j = \text{clos span} \{\psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ konzentriert. Die Bedeutung der in Definition 4.4 eingeführten Skalenräume

$$V_j = \bigoplus_{\ell=-\infty}^{j-1} W_\ell, \quad j \in \mathbb{Z},$$

wurde bisher nicht untersucht. Sowohl für die Konstruktion orthogonaler Wavelets als auch für die numerischen Algorithmen der DWT sind diese Räume aber von großer Bedeutung. Ihre Definition rührt her von der Bildverarbeitung. Zur Bildanalyse ist es üblich, dasselbe Bild in verschiedenen ‘‘Auflösungen’’ (engl. resolution) zu betrachten, um Muster bzw. Kanten zu erkennen.

1. Definition und Eigenschaften der Multiskalen-Analyse

Als wesentliche Zusatzvoraussetzung verlangen wir nun, dass auch der Raum V_j eine Orthonormalbasis vom Typ $\{\phi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ hat, wobei $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ eine geeignete Funktion ist (mehr dazu etwas später). Alle anderen Eigenschaften einer so genannten ‘‘Multiskalen-Analyse’’ sind die natürlichen Eigenschaften, die wir schon in den Aussagen in Abschnitt 4.1 und 4.2 gesehen haben.

DEFINITION 5.1. (*Multiskalen-Analyse, engl. multiresolution analysis (MRA)*)

Eine Multiskalen-Analyse von $L^2(\mathbb{R})$ ist definiert durch eine Folge abgeschlossener Teilräume $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$, mit folgenden Eigenschaften.

- (i) *Verschachtelung* (‘‘nestedness’’): $V_j \subset V_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$;
- (ii) *Dichtheit* (‘‘density’’) und *Trennungseigenschaft* (‘‘separation’’):

$$(5.1) \quad \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \left(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j \right) = L^2(\mathbb{R}), \quad \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}.$$

- (iii) *Skalierungsinvarianz*: $f \in V_j \iff f(2^{-j}\cdot) \in V_0$.
- (iv) *Shiftinvarianz*: $f \in V_j \iff f(\cdot - 2^{-j}k) \in V_j$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
- (v) *Es existiert $\phi \in V_0$ so, dass $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von V_0 ist.*

ϕ heißt Skalierungsfunktion der Multiskalen-Analyse.

BEMERKUNG 5.2. Die Funktionen $\phi_{j,k}$ werden wie üblich gebildet, also

$$\phi_{j,k} = 2^{j/2} \phi(2^j \cdot -k), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Dann folgt aus der Skalierungsinvarianz (iii) und (v) sofort, dass $\{\phi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von V_j ist. Weiterhin ergibt sich die Darstellung

$$(5.2) \quad V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} \hat{f}(\omega) = 2^{-j/2} \tau(2^{-j}\omega) \hat{\phi}(2^{-j}\omega) \text{ mit } \tau \text{ } 2\pi\text{-periodisch} \\ \text{und quadrat-integrierbar auf } (0, 2\pi) \end{array} \right\}.$$

Einige Bemerkungen sollen noch zur Redundanz der geforderten Eigenschaften (i)–(v) gemacht werden. Aus (v) folgt natürlich die Shiftinvarianz von V_0 , und mit der Skalierungsinvarianz ergibt sich sofort (iv). Wir haben die Shiftinvarianz (iv) nur der Deutlichkeit halber angegeben. Etwas tiefer ist die Aussage, dass auch die Trennungseigenschaft in (ii) aus den Eigenschaften (iii) und (v) folgt.

SATZ 5.3. Gegeben sei $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ so, dass $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R})$ ist und die Räume

$$V_j = \text{clos}_{L_2(\mathbb{R})} \text{span} \{ \phi_{j,k}; k \in \mathbb{Z} \}$$

die Verschachtelung $V_j \subset V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, erfüllen. Dann gilt die Trennungseigenschaft

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}.$$

Beweis: (siehe [?] Jia, Shen: “Multiresolution and Wavelets”, Proc. Edinburgh Math. Soc. **37** (1994), 271–309, Satz 2.2)

Sei $\mathcal{P}_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j$ die orthogonale Projektion auf V_j . Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\mathcal{P}_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}$$

und

$$\|\mathcal{P}_j f\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^j \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\phi(2^j x - k)} dx \right|^2.$$

Es genügt zu zeigen, dass $\lim_{j \rightarrow -\infty} \|\mathcal{P}_j f\|_2 = 0$ gilt, denn für $f \in \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ ist ja $f = \mathcal{P}_j f$ für beliebiges $j \in \mathbb{Z}$.

1. Falls f kompakten Träger $\text{supp} f \subset [-R, R]$ hat, folgt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_j f\|_2^2 &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^j \left(\int_{-R}^R |f(x) \phi(2^j x - k)| dx \right)^2 \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^j \|f\|_2^2 \int_{-R}^R |\phi(2^j x - k)|^2 dx \\ &= \|f\|_2^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{I_{j,-k}} |\phi(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 \int_{E_j} |\phi(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

wobei wir die Mengen

$$I_{j,k} := [k - 2^j R, k + 2^j R], \quad E_j := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_{j,k}$$

verwenden. Wegen $E_j \subset E_{j+1}$ und

$$\bigcap_{j=-\infty}^0 E_j = \mathbb{Z}$$

konvergiert die Folge der Funktionen $h_j := |\phi|^2 \chi_{E_j}$ für j gegen $-\infty$ punktweise fast überall gegen 0. Die Funktion $h := |\phi|^2$ ist integrierbare Majorante. Also folgt nach dem Satz von Lebesgue

$$(5.3) \quad \lim_{j \rightarrow -\infty} \|\mathcal{P}_j f\|_2^2 = 0.$$

2. Die Folge der Orthogonalprojektionen \mathcal{P}_j , $j = 0, -1, \dots$, ist gleichmäßig beschränkt, denn die Operatornorm ist $\|\mathcal{P}_j\| = 1$. Da die Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegen, folgt aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, dass (5.3) für jedes $f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt. \square

Für die Dichtheit der Räume V_j geben Jia und Shen in der angegebenen Arbeit ebenfalls ein einfaches Kriterium an.

SATZ 5.4. *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.3 gilt die Äquivalenz*

$$(5.4) \quad \text{clos}_{L_2(\mathbb{R})} \left(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j \right) = L_2(\mathbb{R}) \iff \lambda \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} (2^j \text{supp } \hat{\phi}) \right) = 0,$$

wobei λ das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R} bezeichnet.

Beweis: Wir skizzieren den Beweis, der im Wesentlichen auf der von Helson angegebenen Charakterisierung der \mathbb{R} -shift-invarianten abgeschlossenen Teilräume von $L_2(\mathbb{R})$ beruht. Sei also

$$X := \text{clos}_{L_2(\mathbb{R})} \left(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j \right).$$

Nach Definition ist X ein abgeschlossener Teilraum von $L_2(\mathbb{R})$.

1. Wir zeigen, dass X sogar \mathbb{R} -shift-invariant ist.

Sei $f \in X$ und $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert $j_0 \in \mathbb{Z}$ und $g \in V_{j_0}$ mit $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$. Weiter folgt

- aufgrund der Verschachtelung der Räume V_j , dass $g \in V_j$ für alle $j \geq j_0$ gilt;
- aufgrund der Shiftinvarianz der Räume V_j , dass $g(\cdot - 2^{-j}k) \in X$ für alle $j \geq j_0$ und $k \in \mathbb{Z}$ (und damit für alle $j, k \in \mathbb{Z}$) gilt.

Die Menge der rationalen Zahlen $\{2^j k; j, k \in \mathbb{Z}\}$ ist dicht in \mathbb{R} . Andererseits ist für jedes $f \in L_2(\mathbb{R})$ die reelle Funktion

$$t \mapsto \|f - f(\cdot - t)\|_2, \quad t \in \mathbb{R},$$

stetig ($-j$ -Integrierbarkeitstheorie). Also existiert ein rationaler Punkt $t = 2^j k$ mit

$$\|f(\cdot - y) - f(\cdot - t)\|_2 \leq \varepsilon.$$

Insgesamt erhalten wir für die Funktion $g(\cdot - t) \in X$ die Abschätzung

$$\|f(\cdot - y) - g(\cdot - t)\| \leq \|f(\cdot - y) - f(\cdot - t)\| + \|f(\cdot - t) - g(\cdot - t)\| = \|f(\cdot - y) - f(\cdot - t)\| + \|f - g\| \leq 2\varepsilon.$$

Also existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g \in X$ mit $\|f(\cdot) - g\| \leq 2\varepsilon$. Weil X abgeschlossen ist, folgt $f(\cdot - y) \in X$.

2. Helson's Charakterisierung besagt, dass eine messbare Menge $B = B(X) \subset \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$X = \{f \in L_2(\mathbb{R}); \hat{f}(\omega) = 0 \text{ für alle } \omega \notin B\}.$$

Um die Äquivalenz in (5.4) zu beweisen, müssen wir nun die Äquivalenz

$$B(X) = \mathbb{R} \iff \lambda \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} (2^j \text{supp } \hat{\phi}) \right) = 0$$

zeigen. Dies folgt aus der expliziten Angabe von V_j in (5.2) und wegen

$$\text{supp}(\hat{\phi}(2^j \cdot)) = 2^{-j} \text{supp } \hat{\phi}.$$

□

BEMERKUNG 5.5. a) *Die Dichtheitsbedingung in Definition 5.1 ist automatisch erfüllt, wenn die Skalierungsfunktion ϕ kompakten Träger hat: Dann ist $\hat{\phi}$ eine ganze Funktion (Satz von Paley-Wiener), also $\hat{\phi}(\omega) \neq 0$ für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$ (sogar \mathbb{C}).*

b) *Die Dichtheitsbedingung ist ebenfalls erfüllt, wenn $\text{supp } \hat{\phi}$ ein Intervall $[-\delta, \delta]$ mit $\delta > 0$ enthält. Denn dann gilt die Bedingung auf der rechten Seite in (5.4). Dies ist insbesondere der Fall, wenn $\hat{\phi}(0) \neq 0$ und $\hat{\phi}$ stetig bei $\omega = 0$ ist.*

Eine weitere Vereinfachung der Definition 5.1 erhalten wir, indem wir die Beziehung $V_0 \subset V_1$ mit Hilfe der Orthonormalbasis von V_1 ausdrücken. Die sich daraus ergebende Gleichung für die Skalierungsfunktion ϕ heißt die *Skalierungsgleichung* oder *Verfeinerungsgleichung*. Sie stellt den Kernpunkt der weiteren Betrachtung von MRA-Wavelets dar.

SATZ 5.6. *Sei ϕ die Skalierungsfunktion einer MRA $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Dann gilt*

$$(5.5) \quad \phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k) \quad \text{mit} \quad p_k = 2 \langle \phi, \phi(2 \cdot - k) \rangle$$

und

$$(5.6) \quad 1 = \|\phi\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |p_k|^2.$$

Äquivalent dazu sind die Beziehungen der Fourier-Transformierten

$$(5.7) \quad \hat{\phi}(\omega) = P\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{mit} \quad P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k e^{-ik\omega}$$

und

$$(5.8) \quad 1 = \|\phi\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |P(\omega)|^2 d\omega.$$

Beide Gleichungen (5.5) und (5.7) werden als Skalierungsgleichung von ϕ bezeichnet. Die Folge $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ heißt die *Skalierungsmaske* und die 2π -periodische Funktion P heißt das *Skalierungs-Symbol* von ϕ .

Beweis: Wegen $V_0 \subset V_1$ gilt $\phi \in V_1$. Aus Bemerkung 5.2 folgt, dass $\{\sqrt{2}\phi(2 \cdot -k); k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von V_1 ist. Hieraus folgen sofort die Identitäten (5.5) und (5.6). Die weiteren Aussagen ergeben sich durch Anwendung der Rechenregeln der Fourier-Transformation. \square

Die Orthogonalität der Funktionen $\phi(\cdot - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, hat weitere Konsequenzen für die Koeffizienten der Skalierungsmaske.

FOLGERUNG 5.7. *Die Skalierungsmaske $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ einer Skalierungsfunktion ϕ erfüllt die Orthogonalitätsrelationen*

$$(5.9) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \overline{p_{k+2\ell}} = 2\delta_{\ell,0}, \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$

Hierzu äquivalent ist die Eigenschaft des Skalierungssymbols

$$(5.10) \quad |P(\omega)|^2 + |P(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad \text{für fast alle } \omega \in (0, 2\pi).$$

Beweis: Für $\ell = 0$ ist die Gleichung bereits in Satz 5.6 enthalten, siehe (5.6). Für $\ell \neq 0$ setzen wir die Skalierungsgleichung für ϕ ein und erhalten aus der Orthonormalität der Familie Φ_1

$$\begin{aligned} 0 = \langle \phi, \phi(\cdot - \ell) \rangle &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2 \cdot -k), \sum_{m \in \mathbb{Z}} p_m \phi(2 \cdot -m - 2\ell) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,m} p_k \overline{p_m} \langle \phi_{1,k}, \phi_{1,m+2\ell} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_k p_k \overline{p_{k-2\ell}}. \end{aligned}$$

Die äquivalente Aussage für das Skalierungssymbol P erhält man durch

$$\begin{aligned} |P(\omega)|^2 + |P(\omega + \pi)|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} p_k \overline{p_{k+\ell}} \left(e^{i\ell\omega} + \underbrace{e^{i\ell(\omega+\pi)}}_{=(-1)^\ell e^{i\ell\omega}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \overline{p_{k+2\ell}} \right) e^{i2\ell\omega}. \quad \square \end{aligned}$$

Die Skalierungsmaske hat noch weitere Eigenschaften, die wir in Abschnitt 5.4 untersuchen werden. Dieser Abschnitt soll durch drei Beispiele abgeschlossen werden.

BEISPIEL 5.8. *Wir geben die Skalierungsfunktion $\phi = \chi_{[0,1)}(x)$ vor. Dann sind*

$$\begin{aligned} V_0 &= \left\{ f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \chi_{[k, k+1)}(x) : \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}, \\ V_j &= \left\{ f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \chi_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))}(x) : \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}, \end{aligned}$$

die quadrat-integrierbaren Treppenfunktionen mit Sprungstellen in \mathbb{Z} (für V_0) bzw. $2^{-j}\mathbb{Z}$ (für V_j , $j \in \mathbb{Z}$). Die Eigenschaften in Definition 5.1 sind erfüllt:

- (i) ist erfüllt, weil $\mathbb{Z} \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, also $V_0 \subset V_1$ und $V_j \subset V_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$.
- (ii) Die Dichtheit ist allgemeines Resultat der Lebesgue-Theorie (Approximation von $f \in L^2(\mathbb{R})$ durch Treppenfunktionen). Die Eigenschaft folgt auch aus dem Satz 5.4 von Jia und Shen, da $\text{supp } \hat{\phi} = \mathbb{R}$ gilt.

Die Trennungseigenschaft sieht man auch sofort ein: Falls $f \in \cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ gilt, dann ist f eine Treppenfunktion, die höchstens Sprungstellen in

$$\mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} \cdots = \cap_{j=0}^{\infty} 2^j \mathbb{Z} = \{0\}$$

haben kann. Somit ist f konstant in \mathbb{R}_+ und \mathbb{R}_- . Wegen $f \in L^2(\mathbb{R})$ muss $f|_{\mathbb{R}_+} \equiv 0$ und $f|_{\mathbb{R}_-} \equiv 0$ gelten. Die Überprüfung der Trennungseigenschaft ist sogar überflüssig, wie der Satz 5.3 besagt.

- (iii) und (iv) sind durch die Definition von V_j gewährleistet.
- (v) ist ebenfalls durch die Definition von V_0 und die offensichtliche Orthonormalität von $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\}$ gegeben.

Die Skalierungsgleichung lautet

$$(5.11) \quad \phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1),$$

also ist $p_0 = p_1 = 1$ und $p_k = 0$ für alle anderen $k \in \mathbb{Z}$ und

$$P(\omega) = \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega}) = e^{-i\omega/2} \cos(\omega/2).$$

Hieran erkennt man die Gültigkeit von (5.10). Darüberhinaus halten wir hier schon fest, dass $P(0) = 1$ und $P(\pi) = 0$ erfüllt sind, wie wir in Abschnitt 4 noch allgemeiner erkennen.

BEISPIEL 5.9. Nun geben wir die Skalierungsfunktion $\phi(x) = \text{sinc } x = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \in L^2(\mathbb{R})$ vor, die im Nullpunkt durch $\phi(0) = 1$ stetig fortgesetzt wird. Diese Funktion heißt der "sinus cardinalis" und wird in der Signalverarbeitung wegen der folgenden Eigenschaft verwendet:

Für jedes bandbeschränkte $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\hat{f}(\omega) = 0$ für alle $|\omega| > \pi$ (und f stetig) gilt

$$(5.12) \quad f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \text{sinc}(x - k),$$

wobei die Reihe in $L^2(\mathbb{R})$ gegen f konvergiert.

Diese Aussage wird als **Abtasttheorem** bezeichnet, die Reihe in (5.12) heißt die kardinale Reihe von f . Sie ist die Grundlage für die Digitalisierung von Signalen (z.B. für Musik-CD's).¹

¹Die Beweisidee des Abtasttheorems ist einfach zu erklären: wegen $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ und $\text{supp } \hat{f}$ kompakt gilt auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$; also kann f als stetig vorausgesetzt werden und die Werte $f(k)$ sind wohldefiniert. Die 2π -periodische Funktion g mit $g(\omega) = \hat{f}(\omega)$ auf $[-\pi, \pi)$ hat die Fourierreihe $g(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{-ik\omega}$ mit Konvergenz der Reihe in $L^2((-\pi, \pi))$. Also konvergiert $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{-ik\omega} \cdot \chi_{[-\pi, \pi]}$ in $L^2(\mathbb{R})$ gegen \hat{f} . Dies ist aber das gleiche wie die $L^2(\mathbb{R})$ -Konvergenz der kardinalen Reihe von f gegen f .

Es gilt $\hat{\phi}(\omega) = \chi_{[-\pi, \pi]}(\omega)$. Wir analysieren wieder die Eigenschaften in Definition 5.1.

(v) Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \phi(\cdot - k), \phi(\cdot - l) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle e^{-ik\omega} \hat{\phi}, e^{-il\omega} \hat{\phi} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-l)\omega} d\omega \\ &= \delta_{k,l}, \end{aligned}$$

also ist $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ONB von V_0 .

(iii) und (iv) ergeben sich aus der Definition von V_j .

(ii) Die Dichtheit und Trennungseigenschaft folgt direkt aus der Darstellung (5.2), denn hier ist

$$V_j = \{f \in L^2; \text{supp } \hat{f} \subset [-2^j\pi, 2^j\pi]\}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Natürlich können die Nachweise auch wieder mit den Sätzen 5.3 und 5.4 erbracht werden.

(i) folgt ebenfalls aus der obigen Darstellung von V_j .

Die Skalierungsgleichung wird zuerst für die Fourier-Transformierten ermittelt. Wegen $\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) = \chi_{[-2\pi, 2\pi]}$ gilt

$$(5.13) \quad \hat{\phi}(\omega) = P(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \quad \text{mit} \quad P(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] + 2\pi\mathbb{Z}, \\ 0, & \text{falls } \omega \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] + 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Man beachte die 2π -Periodizität von P sowie die Gültigkeit von (5.10) sowie $P(0) = 1$ und $P(\pi) = 0$. Die Koeffizienten der Skalierungsmaske $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sind die Fourierkoeffizienten

$$p_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\omega) e^{ik\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{ik\omega} d\omega = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 0, \\ \frac{1}{ik\pi} (i^k - i^{-k}) = 0, & \text{falls } k \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{ik\pi} (i^k - i^{-k}) = \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)\pi}, & \text{falls } k = 2\ell + 1 \in 2\mathbb{Z} + 1. \end{cases}$$

Hier ist also $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, aber die Folge ist nicht absolut summierbar.

BEMERKUNG 5.10. Im obigen Beispiel gilt $p_k = \phi(k/2)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Also hat die Skalierungsgleichung die spezielle Form

$$(5.14) \quad \phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(\frac{k}{2}) \phi(2x - k),$$

die ein Beispiel für das erwähnte Abtast-Theorem der Signalverarbeitung ist: für bandbeschränkte Funktionen f mit $\hat{f}(\omega) = 0$ für alle $|\omega| > 2\pi$ wird die kardinale Reihe nicht mit den \mathbb{Z} -Shifts von $\text{sinc } x$, sondern mit den $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ -Shifts von $\text{sinc } 2x$ gebildet.

ÜBUNG 5.11. Seien X_j und Y_j definiert durch

$$\begin{aligned} X_j &= \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f(t) = 0 \text{ für fast alle } |t| \leq 2^{-j}\}, \\ Y_j &= \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\omega) = 0 \text{ für fast alle } |\omega| \leq 2^{-j}\}. \end{aligned}$$

Welche der Axiome einer MRA sind jeweils verletzt?

ÜBUNG 5.12. Sei $(V_j^H)_{j \in \mathbb{Z}}$ die zur Haar-Skalierungsfunktion ϕ_H gehörige Multiskalen-Analyse. Zeigen Sie:

Eine Funktion $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger ist genau dann eine Skalierungsfunktion zu dieser Multiskalen-Analyse, wenn $\phi = c \cdot \phi_H(\cdot - k)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $|c| = 1$ gilt.

ÜBUNG 5.13. Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ Skalierungsfunktion einer MRA und besitzt ϕ kompakten Träger, so gilt $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ und $\hat{\phi}(0) \neq 0$. (Hinweis: Man betrachte die Orthogonalprojektionen $\mathcal{P}_j f$ für $f = \chi_{[0,1]}$; Rechnung erfolgt im Zeitbereich.)

2. Konstruktion von MRA-Wavelets

Wenn eine MRA mit Skalierungsfunktion ϕ wie in Definition 5.1 gegeben ist, so ist die Konstruktion eines zugehörigen orthogonalen Wavelets ψ besonders einfach. Dabei wird das Verhältnis von ϕ und ψ durch die schon bekannte Identität

$$V_j = \sum_{\ell=-\infty}^{j-1} W_\ell$$

ausgedrückt; d.h. zu den gegebenen Räumen V_j wird durch den Raum

$$W_j = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \text{span} \{ \psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z} \}$$

die orthogonale Zerlegung

$$(5.15) \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

geliefert.

Die folgende Aussage ergibt bereits das Endergebnis der Wavelet-Konstruktion. Interessanterweise wird die in Kapitel 4 entwickelte Charakterisierung orthogonaler Wavelets überhaupt nicht verwendet.

SATZ 5.14. Gegeben sei eine MRA von $L^2(\mathbb{R})$ mit der Skalierungsfunktion ϕ . Mit $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ und P seien die Skalierungsmaske sowie das Skalierungssymbol bezeichnet. Dann ist die Funktion $\psi \in V_1$ mit

$$(5.16) \quad \psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{1-k} \overline{p_{1-k}} \phi(2x - k),$$

oder äquivalent

$$(5.17) \quad \hat{\psi}(\omega) = e^{-i\omega/2} \overline{P\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

ein orthogonales Wavelet. Weiterhin ist der Waveletraum W_j das orthogonale Komplement von V_j in V_{j+1} .

Die Folge $(q_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $q_k = (-1)^{1-k} \overline{p_{1-k}}$ und die zugehörige Funktion $Q(\omega) = e^{-i\omega} \overline{P(\omega + \pi)}$ nennen wir Waveletmaske und Waveletsymbol.

Im Beweis verwenden wir die folgende Darstellung des Klammerprodukts $[\hat{f}, \hat{\phi}]$, das die Verfeinerungsrelation (5.7) ausnutzt.

HILFSSATZ 5.15. Die Funktion $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ erfülle die Skalierungsrelation (5.7). Dann gilt für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$[\hat{f}, \hat{\phi}](\omega) = \overline{P\left(\frac{\omega}{2}\right)} [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2}\right) + \overline{P\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right).$$

Beweis: Wir nutzen die Periodizität von P und erhalten

$$\begin{aligned} [\hat{f}, \hat{\phi}](\omega) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2k\pi) \overline{P\left(\frac{\omega + 2k\pi}{2}\right)} \hat{\phi}\left(\frac{\omega + 2k\pi}{2}\right) \\ &= \overline{P\left(\frac{\omega}{2}\right)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 4k\pi) \overline{\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right)} + \overline{P\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2\pi + 4k\pi) \overline{\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2k\pi\right)} \\ &= \overline{P\left(\frac{\omega}{2}\right)} [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2}\right) + \overline{P\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right). \quad \square \end{aligned}$$

Beweis von Satz 5.14: 1. Es genügt, die folgenden zwei Aussagen zu zeigen:

- a) $\{\psi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\}$ ist Orthonormalsystem, also eine Orthonormalbasis von W_0 .
- b) V_1 besitzt die Zerlegung (5.15), also

$$V_1 = V_0 \oplus W_0 \quad \text{und} \quad W_0 \perp V_0.$$

Denn dann folgt:

- a₁) Für jedes $j \in \mathbb{Z}$ ist $\Psi_j = \{\psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis des Raums W_j (Skalierung).
- b₁) Für jedes $j \in \mathbb{Z}$ gilt $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ sowie $V_j \perp W_j$ (Skalierung). Also ist

$$(5.18) \quad \{\phi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\} = \Phi_j \cup \Psi_j$$
 eine weitere Orthonormalbasis von V_{j+1} (neben Φ_{j+1}).
- b₂) Die Räume W_j sind paarweise orthogonal: denn für $j > \ell$ gilt

$$W_\ell \subset V_{\ell+1} \subset V_j \perp W_j.$$

Aus (a₁) und (b₂) folgt sofort, dass $\Psi = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \Psi_j$ ein Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$ ist. Die Vollständigkeit folgt aus der Trennungs- und Dichtheitseigenschaft der MRA $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ sowie (b₁), denn für $f \in L^2(\mathbb{R})$ ist

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ \ell \rightarrow -\infty}} \|\mathcal{P}_j f - \mathcal{P}_\ell f\|_2^2 \\ &= \lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ \ell \rightarrow -\infty}} \sum_{m=\ell}^{j-1} \|\mathcal{Q}_m f\|_2^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \|\mathcal{Q}_m f\|_2^2. \end{aligned}$$

2. Die Eigenschaft (a) wird mit Satz 4.15(a) und der aus Definition 5.1(v) resultierenden Identität $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \equiv 1$ f.ü. bewiesen. Aus der Eigenschaft (5.10) des Skalierungssymbols P folgt für das Waveletsymbol Q

$$(5.19) \quad |Q(\omega)|^2 + |Q(\omega + \pi)|^2 = |P(\omega + \pi)|^2 + |P(\omega)|^2 = 1 \quad \text{f.ü.}$$

Die Darstellung (5.17) von $\hat{\psi}$ und die Periodizität von Q liefern genau wie in Hilfssatz 5.15

$$[\hat{\psi}, \hat{\psi}](\omega) = \overline{Q\left(\frac{\omega}{2}\right)} [\hat{\psi}(2\cdot), \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2}\right) + \overline{Q\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} [\hat{\psi}(2\cdot), \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right).$$

Wegen $\hat{\psi}(2\cdot) = Q\hat{\phi}$ kann der 2π -periodische Faktor Q aus dem Klammerprodukt herausgezogen werden. Dies ergibt

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}, \hat{\psi}](\omega) &= |Q(\frac{\omega}{2})|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\frac{\omega}{2}) + |Q(\frac{\omega}{2} + \pi)|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\frac{\omega}{2} + \pi) \\ &= |Q(\frac{\omega}{2})|^2 + |Q(\frac{\omega}{2} + \pi)|^2 = 1. \end{aligned}$$

3. Um die Eigenschaft (b) zu zeigen, beweisen wir zunächst die Orthogonalität $W_0 \perp V_0$. Diese folgt aus Satz 4.18(b), denn ähnlich zum vorherigen Teil erhalten wir

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}, \hat{\phi}](\omega) &= Q(\frac{\omega}{2}) \overline{P(\frac{\omega}{2})} + Q(\frac{\omega}{2} + \pi) \overline{P(\frac{\omega}{2} + \pi)} \\ &= e^{-i\omega/2} \overline{P(\frac{\omega}{2} + \pi)} P(\frac{\omega}{2}) + e^{-i(\omega/2 + \pi)} \overline{P(\frac{\omega}{2})} P(\frac{\omega}{2} + \pi) = 0. \end{aligned}$$

4. Es bleibt also, die Beziehung $V_1 = V_0 \oplus W_0$ zu zeigen. Aufgrund der vorherigen Überlegungen zur Orthogonalität ist dies äquivalent mit

$$(5.20) \quad \mathcal{P}_1 f = \mathcal{P}_0 f + \mathcal{Q}_0 f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

wobei \mathcal{P}_j und \mathcal{Q}_j wieder die Orthogonalprojektionen auf V_j bzw. W_j bezeichnen. Mit Satz 4.18(c), Hilfssatz 5.15 und nochmaliger Anwendung der Skalierungsgleichung (5.7) erhalten wir

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_0 f)^\wedge(\omega) &= [\hat{f}, \hat{\phi}](\omega) \hat{\phi}(\omega) \\ &= \left\{ P(\frac{\omega}{2}) [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}](\frac{\omega}{2}) + \overline{P(\frac{\omega}{2} + \pi)} [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}](\frac{\omega}{2} + \pi) \right\} P(\frac{\omega}{2}) \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}). \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}_0 f)^\wedge(\omega) &= [\hat{f}, \hat{\psi}](\omega) \hat{\psi}(\omega) \\ &= \left\{ Q(\frac{\omega}{2}) [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}](\frac{\omega}{2}) + \overline{Q(\frac{\omega}{2} + \pi)} [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}](\frac{\omega}{2} + \pi) \right\} Q(\frac{\omega}{2}) \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}). \end{aligned}$$

Addition beider Ausdrücke ergibt

$$(\mathcal{P}_0 f + \mathcal{Q}_0 f)^\wedge(\omega) = (A(\omega) + B(\omega)) \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}),$$

mit

$$A(\omega) = \left(|P(\frac{\omega}{2})|^2 + |Q(\frac{\omega}{2})|^2 \right) [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}](\frac{\omega}{2})$$

und

$$B(\omega) = \left(P(\frac{\omega}{2}) \overline{P(\frac{\omega}{2} + \pi)} + Q(\frac{\omega}{2}) \overline{Q(\frac{\omega}{2} + \pi)} \right) [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}](\frac{\omega}{2} + \pi).$$

Durch Einsetzen der Definition des Waveletsymbols Q erhalten wir

$$(5.21) \quad |P(\frac{\omega}{2})|^2 + |Q(\frac{\omega}{2})|^2 = |P(\frac{\omega}{2})|^2 + |P(\frac{\omega}{2} + \pi)|^2 = 1$$

$$(5.22) \quad \overline{P(\frac{\omega}{2}) P(\frac{\omega}{2} + \pi)} + Q(\frac{\omega}{2}) \overline{Q(\frac{\omega}{2} + \pi)} = P(\frac{\omega}{2}) \overline{P(\frac{\omega}{2} + \pi)} + e^{i\pi} \overline{P(\frac{\omega}{2} + \pi)} P(\frac{\omega}{2}) = 0.$$

Also ergibt sich insgesamt wieder mit Satz 4.18(c)

$$(\mathcal{P}_0 f + \mathcal{Q}_0 f)^\wedge(\omega) = [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}](\frac{\omega}{2}) \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) = (\mathcal{P}_1 f)^\wedge(\omega).$$

Damit ist der Beweis des Satzes beendet. \square

Für den Beweis war weniger die konkrete Gestalt von Q , als vielmehr die 3 Eigenschaften (5.19), (5.21) und (5.22) entscheidend. Die letzten beiden Gleichungen ergeben die Bedingungen

$$(5.23) \quad \begin{aligned} |P(\omega)|^2 &+ |Q(\omega)|^2 &= 1, \\ |P(\omega + \pi)|^2 &+ |Q(\omega + \pi)|^2 &= 1, \\ P(\omega)\overline{P(\omega + \pi)} &+ Q(\omega)\overline{Q(\omega + \pi)} &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent dazu, dass die Matrix

$$(5.24) \quad \mathcal{R}(\omega) = \begin{pmatrix} P(\omega) & Q(\omega) \\ P(\omega + \pi) & Q(\omega + \pi) \end{pmatrix}$$

unitär ist, denn (5.23) beschreibt die Orthonormalität der Zeilen von \mathcal{R} . Als äquivalente Bedingung kann auch die Orthonormalität der Spalten von \mathcal{R} verwendet werden, also

$$(5.25) \quad \begin{aligned} |P(\omega)|^2 &+ |P(\omega + \pi)|^2 &= 1, \\ |Q(\omega)|^2 &+ |Q(\omega + \pi)|^2 &= 1, \\ P(\omega)\overline{Q(\omega)} &+ P(\omega + \pi)\overline{Q(\omega + \pi)} &= 0. \end{aligned}$$

Also ist die Gleichung (5.19) bereits eine Folgerung der anderen Gleichungen (5.21) und (5.22). Beide Systeme (5.23) und (5.25) sind äquivalent. Insgesamt ergibt sich die folgende Charakterisierung der zu ϕ gehörenden MRA-Wavelets.

KOROLLAR 5.16. *Gegeben sei eine MRA von $L^2(\mathbb{R})$ mit der Skalierungsfunktion ϕ . Die Funktion $\psi \in V_1$ mit $\hat{\psi}(\omega) = Q(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$ ist genau dann orthogonales Wavelet, wenn die Matrix in (5.24) für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$ unitär ist.*

BEMERKUNG 5.17. *Matrizen der Form (5.24), die für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$ unitär sind, werden in der Signalverarbeitung paraunitäre Matrizen genannt. Ihre Bedeutung werden wir bei der Vorstellung der Wavelet-Filterbank genauer kennenlernen.*

BEISPIEL 5.18. *Zur Skalierungsfunktion $\phi = \chi_{[0,1]}$ aus Beispiel 5.8 wird nach Satz 5.14 das Haar-Wavelet*

$$(5.26) \quad \psi(x) = -(\phi(2x) - \phi(2x - 1)) = -\chi_{[0,1/2)} + \chi_{[1/2,1)}$$

definiert. Das Waveletsymbol lautet

$$(5.27) \quad Q(\omega) = \frac{e^{-i\omega}}{2}(1 - e^{i\omega}) = -ie^{-i\omega/2} \sin(\omega/2).$$

Tatsächlich verwendet man meistens $-\psi$ und entsprechend $-Q$ als Haar-Wavelet.

BEISPIEL 5.19. *Zur Skalierungsfunktion $\phi(x) = \text{sinc } x = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ mit $\hat{\phi} = \chi_{[-\pi,\pi]}$ aus Beispiel 5.9 gehört die Funktion ψ mit*

$$(5.28) \quad \hat{\psi}(\omega) = e^{-i\omega/2} \overline{P(\frac{\omega}{2} + \pi)} \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq \omega \leq \pi, \text{ weil } P(\frac{\omega}{2} + \pi) = 0, \\ e^{-i\omega/2} & \text{für } \pi < |\omega| \leq 2\pi, \\ 0 & \text{für } |\omega| > 2\pi, \text{ weil } \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) = 0. \end{cases}$$

Das Waveletsymbol ist die 2π -periodische Fortsetzung der auf $[0, 2\pi]$ definierten Funktion $Q(\omega) = e^{-i\omega} \chi_{[\pi/2, 3\pi/2]}(\omega)$. Man beachte, dass mit der Wavelet-Menge

$E = [-2\pi, -\pi) \cup [\pi, 2\pi)$ aus Übung 4.23 auch $\hat{\psi} = \sigma\chi_E$ gilt, wobei σ die 2π -periodische Fortsetzung von $\sigma(\omega) = e^{-i\omega/2}$ für $\omega \in E$ ist; offensichtlich ist $|\sigma| \equiv 1$ (aber σ unstetig).

Anstelle von ψ wird deshalb die Funktion η aus Übung 4.23 mit $\hat{\eta} = \chi_E$ als das Shannon-Wavelet bezeichnet. Es hängt genau wie ψ über eine Skalierungsgleichung mit ϕ zusammen, denn

$$\hat{\eta}(\omega) = Q_\eta\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

mit der 2π -periodischen Fortsetzung der auf $[0, 2\pi]$ definierten Funktion $Q_\eta(\omega) = \chi_{[\pi/2, 3\pi/2]}(\omega)$. Also ist $\eta \in V_1$ ein orthogonales MRA-Wavelet, das die gleichen Wavelet-Räume W_j wie ψ erzeugt. Abschließend sei noch erwähnt, dass für das Skalierungssymbol P und das modifizierte Wavelet-Symbol Q_η die Matrix (5.24) ebenfalls unitär ist.

BEISPIEL 5.20. Wir wollen nun zeigen, dass die Meyer-Wavelets durch eine MRA erzeugt werden. Wir verwenden die Bezeichnungen aus Beispiel 4.20. Sei P die 2π -periodische Funktion in (4.24), also

$$P(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq |\omega| \leq \pi/3, \\ \sigma(|\omega|) & \text{für } \pi/3 < |\omega| \leq 2\pi/3, \\ 0 & \text{für } 2\pi/3 < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

wobei $0 \leq \sigma(\omega) \leq 1$ so gewählt wird, dass $P \in C^r(\mathbb{R})$ für ein $r \in \mathbb{N}_0$ und $|P(\omega)|^2 + |P(\omega + \pi)|^2 \equiv 1$ erfüllt ist. Wir definieren die bandbeschränkte Funktion $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ mit

$$(5.29) \quad \hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} P\left(\frac{\omega}{2}\right) & \text{für } 0 \leq |\omega| \leq 4\pi/3, \\ 0 & \text{für } |\omega| > 4\pi/3. \end{cases}$$

Die Identitäten $\hat{\phi}(\omega) = P\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ und $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \equiv 1$ rechnet man einfach nach. Durch ϕ wird eine MRA definiert. Das zugehörige Wavelet in Satz 5.14 ist gegeben durch

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{-i\omega/2} \overline{P\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq |\omega| \leq 2\pi/3, \text{ weil } P\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) = 0, \\ e^{-i\omega/2} \overline{P(\omega/2 + \pi)} & \text{für } 2\pi/3 < |\omega| \leq 4\pi/3, \text{ weil } \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1, \\ e^{-i\omega/2} P(\omega/4) & \text{für } 4\pi/3 < |\omega| \leq 8\pi/3, \text{ weil } P\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) = 1, \\ 0 & \text{für } |\omega| > 8\pi/3, \text{ weil } \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Dies ist aber die gleiche Definition von ψ wie im Beispiel 4.20, siehe Gleichung (4.25).

3. Rekursiver Algorithmus zur DWT

Die Gleichung (5.20) beschreibt die Zerlegung einer Funktion $f_1 \in V_1$ in die Komponenten $f_1 = f_0 + g_0$ mit $f_0 \in V_0$ und $g_0 \in W_0$. Wiederholte Anwendung ergibt für $f = f_J \in V_J$, $J \in \mathbb{Z}$, und $L \in \mathbb{N}$ die Zerlegung

$$(5.30) \quad f = g_{J-1} + g_{J-2} + \cdots + g_{J-L} + f_{J-L}$$

mit $g_j \in W_j$ und $f_{J-L} \in V_{J-L}$. Wir verwenden im folgenden die Bezeichnungen

$$(5.31) \quad \begin{aligned} a_{j,k} &:= \langle f, \phi_{j,k} \rangle, & \text{kurz } a_j &= \langle f, \Phi_j \rangle, \\ d_{j,k} &:= \langle f, \psi_{j,k} \rangle, & \text{kurz } d_j &= \langle f, \Psi_j \rangle, \end{aligned}$$

und nennen a_j (bzw. $f_j = \sum_k a_{j,k} \phi_{j,k}$) die *Approximation* der Stufe j sowie d_j (bzw. $g_j = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}$) die *Details* der Stufe j . Durch d_j , $j < J$, ist also die diskrete Wavelet-Transformation (DWT) von $f \in V_J$ gegeben. Äquivalent zu (5.30) liefert (5.52) die Zerlegung

$$(5.32) \quad \|a_J\|_{\ell_2}^2 = \|d_{J-1}\|_{\ell_2}^2 + \|d_{J-2}\|_{\ell_2}^2 + \cdots + \|d_{J-L}\|_{\ell_2}^2 + \|a_{J-L}\|_{\ell_2}^2.$$

Aus den Skalierungsgleichungen (5.5) und (5.16) erhalten wir sofort

$$\begin{aligned} \phi_{j-1,k} &= 2^{-1/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} p_m \phi_{j,2k+m}, \\ \psi_{j-1,k} &= 2^{-1/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} q_m \phi_{j,2k+m}, \quad q_k = (-1)^{1-k} \overline{p_{1-k}}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der folgende rekursive Algorithmus zur Berechnung der DWT von $f \in V_J$.

ALGORITHMUS 5.21. DWT (Zerlegung)

Gegeben sei $a_J = (a_{J,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ zur Funktion $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{J,k} \phi_{J,k}$.

Für $j = J, J-1, \dots$, berechne

$$(5.33) \quad a_{j-1,k} = 2^{-1/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{p_m} a_{j,2k+m}$$

$$(5.34) \quad d_{j-1,k} = 2^{-1/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{q_m} a_{j,2k+m}$$

Bei praktischen Anwendungen gibt man noch die Anzahl $L \in \mathbb{N}$ der gewünschten Zerlegungsschritte vor. Ein typischer Befehl in `matlab` zum Eingabevektor $A = a_J$ lautet

$$[D,K] = \text{wavedec}(A,L,'Haar')$$

Dabei kann 'Haar' durch andere verfügbare Typen von Wavelets ersetzt werden (siehe `wfilters`-Befehl). Der Ausgabevektor D enthält die Vektoren $a_{J-L}, d_{J-L}, \dots, d_{J-1}$ in dieser Reihenfolge und der Vektor K gibt die Längen der einzelnen Vektoren sowie als letzten Eintrag die Länge des Eingabevektors A an.

Die Approximation a_{J-L} und die Details d_j , $J-L \leq j \leq J-1$, können wie in (5.30) wieder zur Approximation a_J zusammengefügt werden. Dazu benutzen wir wieder die Skalierungsgleichungen (5.5) und (5.16) und erhalten

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,\ell} \rangle &= 2^{-1/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{p_m} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j,2\ell+m} \rangle = 2^{-1/2} \overline{p_{k-2\ell}}, \\ \langle \phi_{j,k}, \psi_{j-1,\ell} \rangle &= 2^{-1/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{q_m} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j,2\ell+m} \rangle = 2^{-1/2} \overline{q_{k-2\ell}}. \end{aligned}$$

Weil $\Phi_{j-1} \cup \Psi_{j-1}$ eine ONB von V_j sind, erhalten wir

$$(5.35) \quad \phi_{j,k} = 2^{-1/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (\overline{p_{k-2\ell}} \phi_{j-1,\ell} + \overline{q_{k-2\ell}} \psi_{j-1,\ell}).$$

Hieraus ergibt sich der folgende Algorithmus.

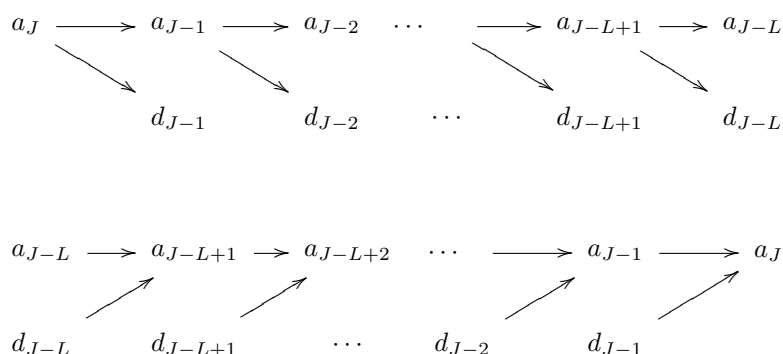


BILD 5.1. DWT-Zerlegung (oben) und Rekonstruktion (unten)

ALGORITHMUS 5.22. DWT (Rekonstruktion)

Gegeben seien $a_{J-L} = \langle f, \Phi_{J-L} \rangle$ und $d_j = \langle f, \Psi_j \rangle$, $J-L \leq j \leq J-1$.

Für $j = J-L+1, \dots, J$ berechne

$$(5.36) \quad a_{j,k} = 2^{-1/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (p_{k-2\ell} a_{j-1,\ell} + q_{k-2\ell} d_{j-1,\ell}).$$

Der entsprechende Befehl in `matlab` zur oben beschriebenen Datenstruktur aus der Wavelet-Zerlegung lautet

$$\mathbf{A} = \text{waverec}(\mathbf{D}, \mathbf{K}, \text{'Haar'})$$

Zerlegungs- und Rekonstruktions-Algorithmus bilden zusammen eine “Perfect Reconstruction Filter Bank”; damit bezeichnet man die Anwendung von digitalen Filteroperationen (z.B. der Faltung mit vorgegebenen “Masken”, hier (p_k) und (q_k)), die nach vollständiger Ausführung wieder zum Ursprungssignal (hier a_j) zurückführen. Eine einfache Darstellung dieser Filterbank ist durch den Graphen in Abbildung 5.1 gegeben.

Die Operationen in (5.33) und (5.34) stehen in engem Zusammenhang mit der diskreten Faltung. Setzen wir $\tilde{p}_m = \overline{p_{-m}}$ und $\tilde{q}_m = \overline{q_{-m}}$, so erhalten wir

$$(5.37) \quad a_{j-1,k} = (\tilde{p} * a_j)_{2k},$$

$$(5.38) \quad d_{j-1,k} = (\tilde{q} * a_j)_{2k}.$$

Nach der Faltung werden also die Folgen $\tilde{p} * a_j$ bzw. $\tilde{q} * a_j$ ausgedünnt, so dass nur die Folgenglieder mit geradem Index übrigbleiben. Diese Operation auf dem Folgenraum $\ell(\mathbb{Z})$ heißt *Downsampling* und wird mit

$$(5.39) \quad \downarrow_2: \ell(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell(\mathbb{Z}), \quad (c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (c_{2k})_{k \in \mathbb{Z}}$$

bezeichnet. In der Signalverarbeitung sind Diagramme üblich, um diese Operationen zu veranschaulichen. Die Faltung wird dabei z.B. durch Angabe des Symbols \tilde{P} bzw. \tilde{Q} zu den Filtern (oder Masken) (\tilde{p}_k) bzw. (\tilde{q}_k) bezeichnet. Die DWT-Zerlegung wird dann durch die *Filterbank* in Abbildung 5.2 dargestellt.

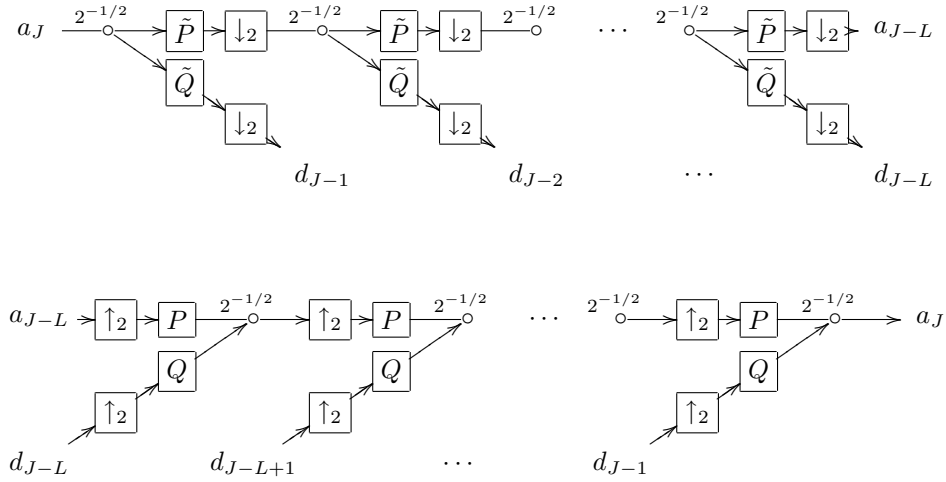


BILD 5.2. Filterbank der DWT-Zerlegung (oben) und Rekonstruktion (unten)

Die Operation (5.36) im Algorithmus zur Rekonstruktion lässt sich auf zweierlei Arten interpretieren. Um den Zusammenhang zur Faltung klarzumachen, definieren wir zu den Folgen a_{j-1} und d_{j-1} die durch Nullen “aufgefüllten” Folgen $\uparrow_2 a_{j-1}$ und $\uparrow_2 d_{j-1}$, wobei

$$(5.40) \quad \uparrow_2: \ell(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell(\mathbb{Z}), \quad (b_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{mit} \quad c_k = \begin{cases} b_{k/2} & \text{für gerades } k, \\ 0 & \text{für ungerades } k, \end{cases}$$

den *Upsampling*-Operator bezeichnet. Dann erhalten wir a_j in (5.36) durch

$$(5.41) \quad a_j = p * (\uparrow_2 a_{j-1}) + q * (\uparrow_2 d_{j-1}).$$

Die zugehörige Filterbank ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Abschließend sei noch bemerkt, dass bei praktischen Anwendungen häufig die Zerlegung ohne den Faktor $2^{-1/2}$ gerechnet wird und deshalb der Faktor $1/2$ zur Rekonstruktion (oder umgekehrt) verwendet wird.

Eine zweite Beschreibung von Algorithmus 5.22 zur Rekonstruktion ist in Anwendungen des Computer Aided Design (CAD) unter der Bezeichnung *Unterteilungs-Algorithmus* (engl. *Subdivision*) bekannt. Dazu schreiben wir die Gleichung (5.36) getrennt für gerade und ungerade $k \in \mathbb{Z}$ auf, also

$$(5.42) \quad a_{j,2k} = 2^{-1/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (p_{2\ell} a_{j-1,k-\ell} + q_{2\ell} d_{j-1,k-\ell}),$$

$$(5.43) \quad a_{j,2k+1} = 2^{-1/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (p_{2\ell+1} a_{j-1,k-\ell} + q_{2\ell+1} d_{j-1,k-\ell}).$$

Mit den Teilmasken (engl. *stencil*)

$$\begin{aligned} p^{(0)} &= (p_{2k})_{k \in \mathbb{Z}}, & p^{(1)} &= (p_{2k+1})_{k \in \mathbb{Z}}, \\ q^{(0)} &= (q_{2k})_{k \in \mathbb{Z}}, & q^{(1)} &= (q_{2k+1})_{k \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

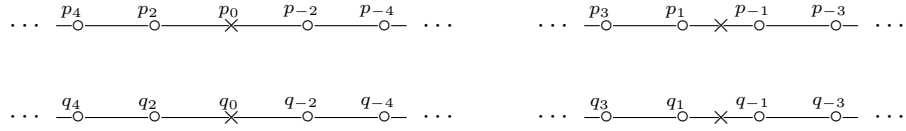


BILD 5.3. Teilmasken (Stencils) der Skalierungsmaske (oben) und Waveletmaske (unten) zur DWT-Rekonstruktion (ohne Faktor $2^{-1/2}$). Der Auswertungspunkt $2k$ (links) bzw. $2k + 1$ (rechts) ist mit dem Kreuz markiert.

erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{j,2k} &= 2^{-1/2} \left((p^{(0)} * a_{j-1})(k) + (q^{(0)} * d_{j-1})(k) \right), \\ a_{j,2k+1} &= 2^{-1/2} \left((p^{(1)} * a_{j-1})(k) + (q^{(1)} * d_{j-1})(k) \right). \end{aligned}$$

Die Gesamtfolge a_j kann also durch Berechnung der Teilfolgen $(a_{j,2k})$ und $(a_{j,2k+1})$ mittels Faltung und anschließendes Zusammenfügen berechnet werden. Die Teilmasken werden wie in Abbildung 5.3 grafisch dargestellt.

4. Weitere Eigenschaften

Die Beziehung

$$V_0 = \bigoplus_{\ell=-\infty}^{-1} W_\ell$$

zwischen den Wavelet-Räumen und dem Skalenraum V_0 einer MRA kann durch eine überraschende Beziehung zwischen $\hat{\phi}$ und $\hat{\psi}$ verdeutlicht werden.

SATZ 5.23. Sei $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ die Skalierungsfunktion einer MRA und ψ das in Satz 5.14 definierte orthogonale Wavelet. Dann gilt

$$(5.44) \quad |\hat{\phi}(\omega)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j \omega)|^2$$

mit punktweiser Konvergenz f.ü.

Beweis: 1. Wir zeigen zunächst, dass

$$\pi_j(\omega) := \prod_{k=0}^{j-1} |P(2^k \omega)|^2, \quad j \geq 0,$$

punktweise f.ü. gegen 0 konvergiert. (Für $j = 0$ ist das leere Produkt $\pi_0 \equiv 1$ definiert.) Für $j \geq 0$ ist π_j eine 2π -periodische nicht-negative Funktion. Fatou's Lemma besagt, dass

$$(5.45) \quad \int_0^{2\pi} \liminf_{j \rightarrow \infty} \pi_j(\omega) d\omega \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \pi_j(\omega) d\omega$$

gilt. Aus der Eigenschaft (5.10) von P folgt, dass die Folge der Funktionen $(\pi_j)_{j \geq 0}$ monoton fällt, also punktweise f.ü. gegen eine 2π -periodische nicht-negative Funktion g konvergiert. Weiterhin gilt $0 \leq g \leq 1$, also ist g integrierbar. Um wie behauptet $g \equiv 0$ f.ü. zu zeigen, genügt der Nachweis von

$$\int_0^{2\pi} g(\omega) d\omega = 0.$$

Dazu wenden wir die Skalierungsgleichung (5.7) auf das Produkt $\pi_j(\omega)|\hat{\phi}(\omega+2k\pi)|^2$ an und erhalten

$$\pi_j(\omega)[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) = [\hat{\phi}(2^j \cdot), \hat{\phi}(2^j \cdot)](\omega).$$

Wegen $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \equiv 1$ folgt aus (5.45)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} g(\omega) d\omega &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \pi_j(\omega)[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) d\omega \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} [\hat{\phi}(2^j \cdot), \hat{\phi}(2^j \cdot)](\omega) d\omega \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} \|\hat{\phi}(2^j \cdot)\|_2^2 = \liminf_{j \rightarrow \infty} (2^{-j} \cdot 2\pi) = 0. \end{aligned}$$

2. Die Skalierungsgleichungen für $\hat{\phi}$ und $\hat{\psi}$ sowie die Relation $|Q|^2 = 1 - |P|^2$ ergeben für $j > 0$

$$|\hat{\psi}(2^j \omega)|^2 = |Q(2^{j-1} \omega)|^2 \pi_{j-1}(\omega) |\hat{\phi}(\omega)|^2 = (\pi_{j-1}(\omega) - \pi_j(\omega)) |\hat{\phi}(\omega)|^2.$$

Also folgt für alle $R \geq 1$

$$\sum_{j=1}^R |\hat{\psi}(2^j \omega)|^2 = \left(\sum_{j=1}^R (\pi_{j-1}(\omega) - \pi_j(\omega)) \right) |\hat{\phi}(\omega)|^2 = (\pi_0(\omega) - \pi_R(\omega)) |\hat{\phi}(\omega)|^2.$$

Aus $\pi_0 \equiv 1$ und $\lim_{R \rightarrow \infty} \pi_R = 0$ (punktweise f.ü.) folgt die Behauptung. \square

Eine wichtige Klasse von Skalierungsfunktionen sind diejenigen ϕ , deren Skalierungsmaske $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ in der Wiener-Algebra

$$(5.46) \quad \mathcal{A} = \ell^1(\mathbb{Z})$$

liegt. Dazu gehören alle Skalierungsfunktionen mit kompaktem Träger, wie wir in Hilfssatz 6.1 zeigen werden. Für Skalierungsmasken in \mathcal{A} gelten die folgenden "Summenregeln" (engl. sum rules).

HILFSSATZ 5.24. *Falls die Fouriertransformierte der Skalierungsfunktion ϕ stetig an der Stelle $\omega = 0$ ist, $\hat{\phi}(0) \neq 0$ erfüllt ist und die Skalierungsmaske $p = (p_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ein Element der Wiener-Algebra ist, gelten die äquivalenten Identitäten*

$$(5.47) \quad \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k = 1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1}$$

und

$$(5.48) \quad P(0) = 1, \quad P(\pi) = 0.$$

Beweis: Die Bedingung an die Skalierungsmaske sichert zu, dass die Fourierreihe

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k e^{-ik\omega}$$

gleichmäßig und absolut konvergiert. Also ist P stetig. Aus der Skalierungsgleichung (5.7) und der Stetigkeit von $\hat{\phi}$ bei $\omega = 0$ sowie $\hat{\phi}(0) \neq 0$ folgt

$$P(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\hat{\phi}(\omega/2)} = 1.$$

Dies ist äquivalent zur ersten Beziehung in (5.47). Wir setzen nun $A := \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k}$ und $B := \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1}$. Weil (p_k) zur Wiener-Algebra gehört, sind $A, B \in \mathbb{C}$ wohldefiniert. Wir haben gerade gezeigt, dass $A + B = 2$ gilt. Weiterhin erhalten wir aus (5.9)

$$\begin{aligned} |A|^2 + |B|^2 &= \sum_{k, m \in \mathbb{Z}} p_{2k} \overline{p_{2k+2m}} + \sum_{k, m \in \mathbb{Z}} p_{2k+1} \overline{p_{2k+1+2m}} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \overline{p_{k+2m}} = 2. \end{aligned}$$

Wegen $(p_k) \in \mathcal{A}$ ist die Vertauschung der Summationsreihenfolge erlaubt. Beide Gleichungen $A + B = 2$ und $A^2 + B^2 = 2$ liefern nun $A = B = 1$.

Die Äquivalenz zu (5.48) sieht man ein durch

$$P(0) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k = \frac{1}{2}(A + B), \quad P(\pi) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p_k = \frac{1}{2}(A - B). \quad \square$$

Wir betrachten nun den Fall $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ genauer. Die Stetigkeit von $\hat{\phi}$ ist durch Satz 3.10(a) gesichert. Weiterhin gilt für jedes $c \in \mathcal{A}$ die Beziehung

$$c \tilde{*} \phi := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(\cdot - k) \in L^1(\mathbb{R}),$$

wie einfaches Nachrechnen zeigt. Die Operation ‘ $\tilde{*}$ ’ wird manchmal *semi-diskrete Faltung* genannt.

Ist nun die Skalierungsmaske p von ϕ ein Element der Wiener Algebra \mathcal{A} , so gilt für das in Satz 5.14 definierte MRA-Wavelet

$$\psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{1-k} \overline{p_{1-k}} \phi(2 \cdot -k) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Damit ist $\hat{\psi}$ stetig. Weil ψ ein orthogonales Wavelet ist, muss insbesondere

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j \omega)|^2 \equiv 1 \quad \text{f.ü.}$$

gelten, und dies zieht notwendig

$$\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$$

nach sich. Zusammen mit Hilfssatz 5.24 erhalten wir die folgende Aussage.

SATZ 5.25. Gegeben sei die Skalierungsfunktion $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ einer MRA. Falls die Skalierungsmaske p ein Element der Wiener-Algebra ist, hat das MRA-Wavelet ψ in Satz 5.14 mindestens ein verschwindendes Moment, d.h. $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ und

$$(5.49) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0.$$

Falls zusätzlich $\hat{\phi}(0) \neq 0$ gilt, so gilt für die Waveletmaske q und das Waveletsymbol Q

$$(5.50) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k = 0, \quad Q(0) = 0.$$

BEMERKUNG 5.26. In Übung 5.13 wurde gezeigt, dass die Zusatzbedingung $\hat{\phi}(0) \neq 0$ für Skalierungsfunktionen mit kompaktem Träger automatisch erfüllt ist. Wegen Übung 2.4 sieht man, dass dann die Bedingungen an die verschwindenden Momente von ψ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^r \psi(x) dx = 0, \quad 0 \leq r \leq L - 1,$$

äquivalent sind zu den Bedingungen an q bzw. p ,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^r q_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k k^r p_k = 0, \quad 0 \leq r \leq L - 1.$$

Die zuletzt genannte Bedingung an p bezeichnet man als die Summenregeln der Ordnung L . Bei absoluter Summierbarkeit der entsprechenden Reihen sind diese wiederum äquivalent zu

$$(5.51) \quad \frac{d^r}{d\omega^r} Q(0) = \frac{d^r}{d\omega^r} P(\pi) = 0, \quad 0 \leq r \leq L - 1.$$

5. Erweiterung der Aussagen auf MRA Tight-Wavelet-Frames

Ein wesentlicher Teil des Beweises von Satz 5.14 bestand in dem Nachweis der Zerlegung $V_1 = V_0 \oplus W_0$. Anstatt dazu die Identität

$$\mathcal{P}_1 f = \mathcal{P}_0 f + \mathcal{Q}_0 f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

in (5.20) zu beweisen, kann man auch die Vollständigkeit des Orthonormalsystems $\Phi_0 \cup \Psi_0$ im Raum V_1 durch die Parseval-Identität nachweisen. Diese wird durch die Beziehung

$$(5.52) \quad \|\mathcal{P}_1 f\|_2^2 = \|\mathcal{P}_0 f\|_2^2 + \|\mathcal{Q}_0 f\|_2^2$$

ausgedrückt. Mit Satz 4.18(c) und Hilfssatz 5.15 erhalten wir

$$\begin{aligned}
2\pi(\|\mathcal{P}_0 f\|_2^2 + \|\mathcal{Q}_0 f\|_2^2) &= \int_0^{2\pi} \left\{ |[\hat{f}, \hat{\phi}](\omega)|^2 + |[\hat{f}, \hat{\psi}](\omega)|^2 \right\} d\omega \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{ \left| \overline{P\left(\frac{\omega}{2}\right)} [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2}\right) + \overline{P\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left| \overline{Q\left(\frac{\omega}{2}\right)} [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2}\right) + \overline{Q\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \right\} d\omega \\
&= \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} \overline{P\left(\frac{\omega}{2}\right)} & \overline{P\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \\ \overline{Q\left(\frac{\omega}{2}\right)} & \overline{Q\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \end{pmatrix} \right\|^2 d\omega.
\end{aligned}$$

Hierbei ist mit $\|\cdot\|$ die euklidische Norm im \mathbb{C}^2 bezeichnet. Die Matrix im letzten Integral ist gerade die komplex konjugierte und transponierte der unitären Matrix $\mathcal{R}(\omega/2)$ aus (5.24), also ist sie selbst unitär. Dadurch können wir weiter schließen auf

$$\begin{aligned}
2\pi(\|\mathcal{P}_0 f\|_2^2 + \|\mathcal{Q}_0 f\|_2^2) &= \int_0^{2\pi} \left\{ \left| [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 + \left| [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \right\} d\omega \\
&= \int_0^{4\pi} \left| [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 d\omega \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \left| [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}](\omega) \right|^2 d\omega.
\end{aligned}$$

Das letzte Integral ist nach Satz 4.18 gerade $\|\mathcal{P}_1 f\|_2^2$, und damit ist die Parseval-Identität (5.52) bewiesen.

Der hier gegebene Beweis hat einen wesentlichen Vorteil: Er kann auch für allgemeinere Systeme als Orthonormalbasen verwendet werden. Dazu führen wir zunächst den Begriff der verallgemeinerten Skalierungsfunktion ein.

DEFINITION 5.27. *Eine Funktion $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ heißt verallgemeinerte Skalierungsfunktion, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) *Die Familie $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Bessel-Familie, d.h. es existiert eine Konstante $B > 0$ so, dass*

$$(5.53) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi(\cdot - k) \rangle|^2 \leq B \|f\|_2^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

- (ii) *Die Räume $V_j = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \text{span} \{\phi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ erfüllen $V_j \subset V_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ (Verschachtelung) und $\text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \right) = L^2(\mathbb{R})$ (Dichtheit).*

Eine verallgemeinerte Skalierungsfunktion erfüllt wieder eine Verfeinerungsgleichung der Form

$$\phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2 \cdot - k)$$

mit einer Koeffizientenfolge $p = (p_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Allerdings ist die Beziehung $p_k = \langle \phi, \phi(2 \cdot - k) \rangle$ sowie die Eigenschaft (5.10) des Skalierungssymbols P in der

Regel nicht mehr erfüllt. Es kann sogar mehrere Skalierungsmasken p zur Funktion ϕ geben, wie das folgende Beispiel zeigt.

BEISPIEL 5.28. Sei $\phi(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc} \frac{x}{2}$. Man erkennt leicht, dass die Eigenschaft (i) in Definition 5.27 äquivalent ist zu

$$(5.54) \quad [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) \leq B \quad f.\ddot{u}.$$

Wegen $\hat{\phi} = \chi_{[-\pi/2, \pi/2)}$ gilt

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in [-\pi/2, \pi/2) + 2\pi\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Gleichungen

$$\hat{\phi}(\omega) = P_1\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = P_2\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad f.\ddot{u}.$$

gelten für $P_1 = \chi_{E_1}$ und $P_2 = \chi_{E_2}$ mit

$$E_1 = [-\pi/4, \pi/4) + 2\pi\mathbb{Z}, \quad E_2 = E_1 \cup ([\pi/2, \pi) + 2\pi\mathbb{Z}).$$

Weiterhin erfüllt weder P_1 noch P_2 die Beziehung (5.10).

Die oben gemachten Beobachtungen zur Parseval-Identität führen uns zur folgenden Definition einer Klasse von Wavelet-Tight-Frames.

DEFINITION 5.29. Gegeben sei eine verallgemeinerte Skalierungsfunktion ϕ . Weiter seien Funktionen $\psi_1, \dots, \psi_N \in V_1$ mit $\hat{\psi}_n(\omega) = Q_n(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$ und 2π -periodischen Funktionen $Q_n \in L^2(0, 2\pi)$, $1 \leq n \leq N$, gegeben. Falls die Identität

$$(5.55) \quad \|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^N \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{n;j,k} \rangle|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

gilt, so heißt $\Psi = \{\psi_{n;j,k}; 1 \leq n \leq N, j, k \in \mathbb{Z}\}$ ein MRA Tight-Wavelet Frame und die Funktionen ψ_n heißen Framelets.

Ein hinreichendes Kriterium für einen MRA Tight-Wavelet-Frame wurde zuerst von A. Ron und Z. Shen in dem Artikel [?] gegeben. Dieser Artikel stellt die Grundlage für viele weitere Untersuchungen der letzten 10 Jahre dar. In Anlehnung an den Begriff der paraunitären Matrizen haben Ron und Shen ihr Kriterium als “Unitary Extension Principle” (UEP) bezeichnet. Es zielt darauf ab, zu einem gegebenen Skalierungssymbol P weitere “Frameletsymbole” Q_1, \dots, Q_N zu finden (also P zu “ergänzen”), so dass die Zeilen der Matrix

$$(5.56) \quad \mathcal{R}(\omega) := \begin{pmatrix} P(\omega) & Q_1(\omega) & \cdots & Q_N(\omega) \\ P(\omega + \pi) & Q_1(\omega + \pi) & \cdots & Q_N(\omega + \pi) \end{pmatrix}$$

orthonormal sind.

SATZ 5.30. Gegeben sei eine verallgemeinerte Skalierungsfunktion ϕ , und es gelte

$$(5.57) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 = \|f\|_2^2.$$

Weiter seien 2π -periodische Funktionen $Q_1, \dots, Q_N \in L^2(0, 2\pi)$ so gegeben, dass die Zeilen der Matrix \mathcal{R} in (5.56) für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$ orthonormal sind, also die Gleichungen

$$(5.58) \quad \begin{aligned} |P(\omega)|^2 + \sum_{n=1}^N |Q_n(\omega)|^2 &= 1, \\ P(\omega)\overline{P(\omega + \pi)} + \sum_{n=1}^N Q_n(\omega)\overline{Q_n(\omega + \pi)} &= 0 \end{aligned}$$

gelten. Dann sind die Funktionen $\psi_1, \dots, \psi_N \in V_1$ Framelets, d.h. die Familie Ψ ist ein MRA Tight-Wavelet-Frame.

Beweis: Für $j \in \mathbb{Z}$ ist die quadratische Form

$$T_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

definiert, weil $\{\phi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ eine Bessel-Familie ist. Der Beweis von Satz 5.3 lässt sich auf verallgemeinerte Skalierungsfunktionen ϕ so erweitern, dass

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} T_j f = 0$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ folgt. Die Voraussetzung des Satzes gibt also

$$\|f\|_2^2 = \lim_{\ell \rightarrow -\infty} (\|T_j f\|_2^2 - \|T_\ell f\|_2^2).$$

Mit dem Übergang zur Teleskopsumme wie im Beweis von Satz 5.14 genügt es also, die Zerlegung

$$(5.59) \quad \begin{aligned} \|T_{j+1} f\|_2^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_{j+1,k} \rangle|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 + \sum_{n=1}^N \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \\ &= \|T_j f\|_2^2 + \sum_{n=1}^N \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \end{aligned}$$

zu zeigen. Der Beweis der Gleichung (5.59) erfolgt analog zum Beweis von (5.52). Dabei wird an Stelle von Satz 4.18(c) die Aussage von Hilfssatz 4.17(b) verwendet. \square

Die Algorithmen und Filterbänke aus Abschnitt 5.3 lassen sich direkt auf MRA Tight-Wavelet-Frames übertragen.

ÜBUNG 5.31. Skizzieren Sie die Zerlegungs- und Rekonstruktions-Filterbank eines MRA Tight-Wavelet-Frame mit 2 Framelets ψ_1, ψ_2 . Zur Zerlegung sollen wie üblich die Eingabedaten $a_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle$ verwendet werden, um die Details $d_{n;j,k} := \langle f, \psi_{n;j,k} \rangle$, $n = 1, 2$, $J-L \leq j \leq J-1$, und die Approximation a_{j-L} zu berechnen. Beweisen Sie, dass auch hier die Perfect-Reconstruction Eigenschaft gilt. (Hinweis: Die Skalierungsgleichungen (5.5) und (5.16) bleiben erhalten. Die Rekonstruktionsgleichung (5.35) gilt jedoch nicht, weil Φ_j keine ONB ist. Man zeigt aber, dass die

Bedingung (5.58) äquivalent ist zu

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(p_{m+2k} \overline{p_{\ell+2k}} + \sum_{n=1}^N q_{n;m+2k} \overline{q_{n;\ell+2k}} \right) = 2\delta_{m,\ell},$$

und hieraus folgt die Perfect-Reconstruction Eigenschaft.

ÜBUNG 5.32. Zeigen Sie, dass der lineare B-Spline

$$N_2(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x & \text{für } 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine verallgemeinerte Skalierungsfunktion ist. (Hinweis: Berechnung von \hat{N}_2 mit $N_2 = \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$ (Faltung) und Nachweis der Dichtheit mit Hilfssatz 4.17 sowie (5.57).)

ÜBUNG 5.33. Bestimmen sie Konstanten α, β so, dass durch $\psi_1(x) = \alpha(N_2(2x) - N_2(2x-2))$ und $\psi_2(x) = \beta(N_2(2x) - 2N_2(2x-1) + N_2(2x-2))$ ein MRA Tight-Wavelet-Frame zum linearen B-Spline N_2 definiert wird.

Skalierungsfunktionen und Wavelets mit kompaktem Träger

Skalierungs- und Waveletmasken mit wenigen von Null verschiedenen Koeffizienten führen zu besonders effizienten Algorithmen zur Berechnung der DWT. So ist der numerische Aufwand zur Zerlegung (Algorithmus 5.21) und Rekonstruktion (Algorithmus 5.22) jeweils $N \cdot M$, wobei N die Länge des Eingangsvektors a_J und M die Länge der Masken p und q ist.

1. Skalierungsfunktionen mit kompaktem Träger haben endliche Masken

Die Länge der Masken p und q steht in direktem Zusammenhang zum Durchmesser des Trägers der Skalierungsfunktion.

HILFSSATZ 6.1. *Die Skalierungsfunktion ϕ einer MRA habe kompakten Träger. Mit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ bezeichnen wir das kleinste Intervall, das $\text{supp } \phi$ enthält, also*

$$\begin{aligned} a &:= \inf\{x \in \mathbb{R}; \phi(t) = 0 \text{ für fast alle } t < x\}, \\ b &:= \sup\{x \in \mathbb{R}; \phi(t) = 0 \text{ für fast alle } t > x\}. \end{aligned}$$

Dann gilt $a, b \in \mathbb{Z}$ und $p_k = 0$ für $k < a$ und $k > b$.

Beweis: Die Beziehungen $p_k = 2\langle \phi, \phi(2 \cdot -k) \rangle$ und

$$\text{supp } \phi \cap \text{supp } \phi(2 \cdot -k) \subset [a, b] \cap [(a+k)/2, (b+k)/2]$$

ergeben sofort $p_k = 0$ für alle $k \leq 2a - b$ und $k \geq 2b - a$.

Sei $k_0 > 2a - b$ der kleinste Index mit $p_{k_0} \neq 0$. Wir zeigen nun $k_0 = a$, also damit auch $a \in \mathbb{Z}$. Dazu beachten wir, dass für jedes $0 < \delta < 1$ die Funktion $\phi|_{[a, a+\delta]}$ nicht identisch verschwindet. Die Skalierungsgleichung ergibt

$$\phi(x) = p_{k_0} \phi(2x - k_0) + \sum_{k=k_0+1}^{[2b-a]} p_k \phi(2x - k).$$

Auf dem Intervall $[(a+k_0)/2, (a+k_0+\delta)/2]$ gilt

$$\phi(2 \cdot -k_0) \neq 0, \quad \phi(2 \cdot -k) \equiv 0 \text{ für } k > k_0.$$

Also folgt

$$\phi(x) = p_{k_0} \phi(2x - k_0), \quad x \in [(a+k_0)/2, (a+k_0+\delta)/2],$$

und hieraus wiederum durch Vergleich der Träger $a = (a + k_0)/2$. Dies ergibt sofort $a = k_0 \in \mathbb{Z}$. Analog zeigt man, dass der größte Index k_1 mit $p_{k_1} \neq 0$ auch $b = k_1$ erfüllen muss. \square

Das Lemma besagt, dass das Skalierungssymbol einer Skalierungsfunktionen mit kompaktem Träger ein trigonometrisches Polynom

$$(6.1) \quad P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k e^{-ik\omega}$$

ist. O.B.d.A. seien N_1, N_2 so gewählt, dass $p_{N_1} p_{N_2} \neq 0$ gilt. Dann nennen wir $N_2 - N_1$ den Laurent-Grad von P . (Mit $z = e^{-i\omega}$ kann P mit dem Laurent-Polynom $\hat{P}(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k z^k$ identifiziert werden. Die Bezeichnung Laurent-Grad rührt daher, dass $z^{-N_1} \hat{P}$ ein Polynom vom Grad $N_2 - N_1$ ist.) Weil $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ gilt, ist $\hat{\phi}$ stetig. Weiterhin gilt $\hat{\phi}(0) \neq 0$ nach Übung 5.13. Also gilt nach Hilfssatz 5.24

$$P(0) = 1, \quad P(\pi) = 0.$$

Weil P analytisch ist, können wir die Nullstelle π herausfaktorisieren und erhalten

$$(6.2) \quad P(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N P_0(\omega), \quad P_0(\pi) \neq 0,$$

mit einem weiteren trigonometrischen Polynom P_0 vom Laurent-Grad $N_2 - N_1 - N$.

Wir wollen noch klarer machen, wie die Skalierungsfunktion ϕ und das Skalierungssymbol P voneinander abhängen. Die Skalierungsgleichung (5.7) erklärt, dass P aus ϕ hervorgeht, nämlich

$$P(\omega) = \frac{\hat{\phi}(2\omega)}{\hat{\phi}(\omega)} \quad \text{f.ü.}$$

erfüllt ist. Da die linke Seite eine analytische Funktion ist, ist auch der Quotient der rechten Seite analytisch fortsetzbar (in den Nullstellen des Nenners). Andererseits liefert die Skalierungsgleichung (5.7) auch die Beziehung

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^J P(2^{-j}\omega) \hat{\phi}(2^{-J}\omega), \quad J \in \mathbb{N}.$$

Aus der Stetigkeit von $\hat{\phi}$ (bei $\omega = 0$) folgt sofort

$$(6.3) \quad \hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} P(2^{-j}\omega) \hat{\phi}(0).$$

Also ist durch das trigonometrische Polynom P mit $P(0) = 1$ und (5.10) die Skalierungsfunktion ϕ (bis auf einen konstanten Faktor) eindeutig bestimmt. Dies macht man sich zu eigen, um neue Skalierungsfunktionen zu konstruieren. Hierbei stellt sich die Frage, ob zu jedem P mit den obigen Eigenschaften tatsächlich eine Skalierungsfunktion ϕ einer MRA definiert ist. Die folgenden beiden Aussagen klären diesen Sachverhalt.

SATZ 6.2. *Es sei P ein trigonometrisches Polynom mit $P(0) = 1$. Dann konvergiert das unendliche Produkt*

$$(6.4) \quad \hat{\phi} = \prod_{j=1}^{\infty} P(2^{-j}\cdot)$$

absolut und gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen eine stetige Funktion $\hat{\phi}$ und es gilt $\hat{\phi}(0) = 1$.

Beweis: Sei $R > 0$ und $|\omega| \leq R$. Weil P differenzierbar und 2π -periodisch ist, ist $c := \max_{\omega} |P'(\omega)| < \infty$. Also gilt für alle $j \in \mathbb{N}$

$$|1 - P(2^{-j}\omega)| = |P(0) - P(2^{-j}\omega)| \leq cR2^{-j}.$$

Wegen $\sum_{j \in \mathbb{N}} |cR2^{-j}| < \infty$ konvergiert das Produkt $\prod_{j \in \mathbb{N}} P(2^{-j}\omega)$ absolut und gleichmäßig für $|\omega| \leq R$. Die Eigenschaft $\hat{\phi}(0) = 1$ ist sofort abzulesen. \square

2. Schwache und starke Konvergenz des Kaskadenalgorithmus

Die Konvergenz des Produktes in $L^2(\mathbb{R})$ kann gar nicht vorliegen, da die endlichen Teilprodukte periodisch und deshalb nicht quadrat-integrierbar sind. Deshalb untersucht man die Konvergenz durch Multiplikation (im Frequenzbereich) bzw. semidiskrete Faltung (im Zeitbereich) mit einer geeignet skalierten Funktion $\hat{\varphi}(2^{-n}\cdot)$ bzw. $2^n\varphi(2^n\cdot)$. Der hieraus resultierende Algorithmus heißt *Kaskadenalgorithmus*.

ALGORITHMUS 6.3. *Gegeben sei ein trigonometrisches Polynom*

$$P = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k e^{-ik\omega} \quad \text{mit} \quad P(0) = \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k = 1.$$

Zu $\varphi_0 := \varphi \in L^2(\mathbb{R})$ definieren wir die Folge

$$(6.5) \quad \varphi_{n+1} = \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k \varphi_n(2\cdot - k), \quad n \geq 0,$$

oder äquivalent

$$(6.6) \quad \hat{\varphi}_{n+1}(\omega) = P\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}_n\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad n \geq 0.$$

BEMERKUNG 6.4. *Der Kaskadenalgorithmus ist eine typische "Fixpunkt-Iteration". Da in jedem Schritt nur endliche Linearkombinationen gebildet werden, folgt aus $\varphi_0 \in Y$ für einen skalierungsinvarianten Teilraum $Y \subset L^2(\mathbb{R})$ auch $\varphi_n \in Y$. Damit lässt sich z.B. die Konvergenz nicht nur in $L^2(\mathbb{R})$, sondern auch in Sobolev-Räumen untersuchen.*

Wir betrachten im Folgenden nur Funktionen

$$(6.7) \quad \varphi \in \mathcal{M} := \{f \in L^2(\mathbb{R}); \text{supp } f \text{ kompakt, } \hat{f}(0) = 1\}$$

als "Startwert" des Kaskadenalgorithmus. Aus (6.5) und (6.6) folgt sofort, dass dann alle Funktionen φ_n der Iteration in \mathcal{M} liegen. Weitere Eigenschaften der Iterationsfolge $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ beschreibt der folgende Hilfssatz.

HILFSSATZ 6.5. *Es sei $P(\omega) = \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k e^{-ik\omega}$ ein trigonometrisches Polynom mit $P(0) = 1$ und $\varphi_0 \in \mathcal{M}$. Dann gilt für die Folge $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ des Kaskadenalgorithmus:*

a) *Die Folge $(\hat{\varphi}_n)_{n \geq 0}$ konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathbb{R} gegen*

$$(6.8) \quad \hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} P(2^{-j}\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\varphi}_n(\omega).$$

b) *Für jedes $\delta > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit*

$$(6.9) \quad \text{supp } \varphi_n \subset [N_1 - \delta, N_2 + \delta] \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Beweis: a) Die Stetigkeit von $\hat{\varphi}_0$ bei $\omega = 0$ ergibt $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\varphi}(2^{-n}\omega) = 1$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathbb{R} . Die rekursive Anwendung von (6.6) ergibt

$$(6.10) \quad \hat{\varphi}_n(\omega) = \prod_{j=1}^n P(2^{-j}\omega) \hat{\varphi}(2^{-n}\omega),$$

und hieraus folgt die Behauptung.

b) Falls $\text{supp } \varphi_0 \subset [a_0, b_0]$ mit $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ gilt, so ergibt (6.5)

$$\text{supp } \varphi_n \subset [a_n, b_n] \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{a_{n-1} + N_1}{2}, \quad b_n = \frac{b_{n-1} + N_2}{2}.$$

Die rekursiv definierten Folgen $(a_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 0}$ sind monoton und beschränkt. Z.B. ist (a_n) monoton steigend, falls $a_0 < N_1$, und monoton fallend, falls $a_0 > N_1$. Die Grenzwerte sind $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = N_1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = N_2$. Dies liefert die Behauptung. \square

Wir betrachten nun die L^2 -Konvergenz der Folge $(\varphi_n)_{n \geq 0}$. Die in Lemma 6.5(a) erhaltene Aussage reicht zur L^2 -Konvergenz nicht aus. In der Funktionalanalysis werden die folgenden beiden Konvergenztypen für eine Folge $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ in $L^2(\mathbb{R})$ unterschieden:

Starke Konvergenz: $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \phi \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \phi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$

Schwache Konvergenz: $\text{w-lim}_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \phi \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi_n - \phi, g \rangle = 0$ für alle $g \in L^2(\mathbb{R}).$

Die starke Konvergenz impliziert die schwache Konvergenz. Umgekehrt gilt die folgende Aussage.

HILFSSATZ 6.6. *Eine Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ mit $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ für alle $n \geq 0$ konvergiert genau dann in der L^2 -norm (also stark) gegen $f \in L^2(\mathbb{R})$, wenn gilt*

$$(6.11) \quad \text{w-lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = \|f\|.$$

Beweis: Aus der starken Konvergenz folgt die schwache Konvergenz und die Konvergenz der Norm in (6.11). Umgekehrt folgt aus den Bedingungen in (6.11)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|f_n\|^2 + \|f\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle f_n, f \rangle) \\ &= 2\|f\|^2 - 2\operatorname{Re} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, f \rangle = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Die schwache Konvergenz ist schon ausreichend, um die folgende Umkehrung des Resultats von Lemma 6.1 zu zeigen.

FOLGERUNG 6.7. *Falls der Kaskadenalgorithmus für ein $\varphi_0 \in \mathcal{M}$ schwach gegen ϕ konvergiert, so gilt $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ und $\operatorname{supp} \phi \subset [N_1, N_2]$.*

Beweis: Aus der schwachen Konvergenz folgt, dass $\langle \phi, g \rangle$ für alle $g \in L^2(\mathbb{R})$ definiert ist, also $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ gilt. Wäre $h := \phi - \phi|_{[N_1, N_2]}$ nicht die Nullfunktion (f.ü.), so würden wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi_n - \phi, h \rangle = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi_n, h \rangle}_{=0} - \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \phi, h \rangle}_{=\|h\|_2^2} \neq 0$$

erhalten. Dies ist ein Widerspruch zur schwachen Konvergenz gegen ϕ . \square

Dass manchmal tatsächlich nur die schwache Konvergenz vorliegen kann, zeigt das folgende Beispiel.

BEISPIEL 6.8. *Wir betrachten die zwei Skalierungsmasken*

$$p_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad r_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zugehörigen Skalierungssymbole sind

$$P(\omega) = \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega}), \quad R(\omega) = P(2\omega).$$

Die Grenzwerte der unendlichen Produkte in (6.6) bezeichnen wir mit $\hat{\phi}$ und $\hat{\eta} = \hat{\phi}(2\cdot)$. Durch Ausmultiplizieren und Anwendung der geometrischen Summenformel erhalten wir

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n P(2^{-j}\omega) &= 2^{-n}(1 + e^{-i\omega/2})(1 + e^{-i\omega/4}) \cdots (1 + e^{-i2^{-n}\omega}) \\ &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{-ik2^{-n}\omega} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } \omega = 0, \\ \frac{1 - e^{-i\omega}}{2^n(1 - e^{-i2^{-n}\omega})} & \text{für } \omega \in (0, 2\pi). \end{cases} \end{aligned}$$

Der Nenner des letzten Ausdrucks konvergiert gegen $\frac{d}{dt}(e^{it\omega})(0) = i\omega$. Also erhalten wir den Grenzwert (über punktweise Konvergenz)

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega = 0, \\ \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} & \text{für } \omega \neq 0. \end{cases}$$



BILD 6.1. Grafen der 3. Iterierten des Kaskadenalgorithmus mit den Skalierungsmasken p (links) und r (rechts)

Beide Funktionen $\hat{\phi}$ und $\hat{\eta} = \hat{\phi}(2 \cdot)$ sind in $L^2(\mathbb{R})$. Die inverse Fourier-Transformation ergibt dann

$$\phi = \chi_{[0,1)}, \quad \eta = \frac{1}{2} \chi_{[0,2)}.$$

Man beachte schon den Unterschied $\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 1$ und $\|\eta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2}$.

Wir wenden uns nun der Betrachtung des Kaskadenalgorithmus im Zeitbereich zu. Dazu wählen wir jeweils die Startfunktion

$$\varphi_0(x) = \eta_0(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{für } 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Einfache Überlegungen ergeben für die Iterierten $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ zur Skalierungsmaske (p_k)

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 2^n x & \text{für } 0 \leq x \leq 2^{-n}, \\ 1 & \text{für } 2^{-n} < x \leq 1, \\ 1 - 2^n(x - 1) & \text{für } 1 < x \leq 1 + 2^{-n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hieraus folgt sofort die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi - \varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0,$$

also die starke Konvergenz des Kaskadenalgorithmus in $L^2(\mathbb{R})$ gegen $\phi = \chi_{[0,1)}$. Für die Iterierten $(\eta_n)_{n \geq 0}$ zur Skalierungsmaske (r_k) erhalten wir die "Zackenfunktion"

$$\eta_n(x) = \begin{cases} 2^n(x - 2^{-n+1}k) & \text{für } 2^{-n+1}k \leq x \leq 2^{-n+1}(k + 1/2), \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1, \\ 2^n(2 - (x - 2^{-n+1}k)) & \text{für } 2^{-n+1}(k + 1/2) < x \leq 2^{-n+1}(k + 1), \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Grafen von φ_n und η_n für $n = 3$ sind in Abbildung 6.1 angegeben. Man rechnet leicht nach, dass $\|\eta_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\eta_0\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2/3}$ gilt. Wegen $\|\eta\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{1/2}$ kann also die Folge $(\eta_n)_{n \geq 0}$ **nicht** in der $L^2(\mathbb{R})$ -Norm (also stark) gegen η konvergieren. Es liegt jedoch die schwache Konvergenz vor, denn:

1. Für den dichten Teilraum der Funktionen $g \in L^2(\mathbb{R})$ mit stetigem \hat{g} und $\text{supp } \hat{g}$ kompakt (also aller band-beschränkten Funktionen in $L^2(\mathbb{R})$) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle g, \eta_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \hat{g}, \hat{\eta}_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{g}, \hat{\eta} \rangle$$

aus der gleichmäßigen Konvergenz von $\hat{\eta}_n$ gegen $\hat{\eta}$ auf Kompakta.

2. Die gleichmäßige Beschränktheit von $\|\eta_n\|_{L^2(\mathbb{R})}$ erlaubt es, diese Grenzwertbeziehung auf ganz $L^2(\mathbb{R})$ auszudehnen (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit).

Also erhalten wir die interessante Feststellung, dass die Zackenfunktionen die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) \eta_n(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 g(x) dx.$$

gilt.

Für alle Funktionen $f \in \mathcal{M}$ hat die Autokorrelationsfunktion

$$(f * \overline{f(-\cdot)})(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{f(t+x)} dt$$

kompakten Trägers. Also ist das Klammerprodukt

$$[\hat{f}, \hat{f}](\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\omega + 2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f * \overline{f(-\cdot)})(k) e^{-ik\omega}$$

ein trigonometrisches Polynom. Insbesondere folgt aus (6.9), dass

$$\text{supp}(\varphi_n * \overline{\varphi_n(-\cdot)}) \subset [-(N_2 - N_1) - 2\delta, N_2 - N_1 + 2\delta] \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

gilt. Für $\delta < 1/2$ gilt also

$$(6.12) \quad [\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n] \in \mathcal{T}_N \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

wobei \mathcal{T}_N den Raum der reellen trigonometrischen Polynome vom Grad $N := N_2 - N_1$ bezeichnet, also alle Funktionen der Form

$$f(\omega) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\omega}, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad c_k = \overline{c_{-k}}, \quad -N \leq k \leq N.$$

Die Iterationsgleichung (6.6) und die übliche Periodisierungstechnik liefern

$$(6.13) \quad [\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n](\omega) = |P(\frac{\omega}{2})|^2 [\hat{\varphi}_{n-1}, \hat{\varphi}_{n-1}](\frac{\omega}{2}) + |P(\frac{\omega}{2} + \pi)|^2 [\hat{\varphi}_{n-1}, \hat{\varphi}_{n-1}](\frac{\omega}{2} + \pi).$$

Diese Beziehung ist für die Untersuchung der L^2 -Konvergenz besonders wichtig. Deshalb halten wir den folgenden Begriff fest.

DEFINITION 6.9. Zu einem trigonometrischen Polynom $R \in \mathcal{T}_N$ definieren wir den Transfer-Operator

$$(6.14) \quad T_R : L^1(0, 2\pi) \rightarrow L^1(0, 2\pi), \quad T_R f(\omega) = R(\frac{\omega}{2}) f(\frac{\omega}{2}) + R(\frac{\omega}{2} + \pi) f(\frac{\omega}{2} + \pi)$$

sowie den eingeschränkten Transfer-Operator $\tilde{T}_R = T_R|_{\mathcal{T}_N} : \mathcal{T}_N \rightarrow \mathcal{T}_N$.

Dass der eingeschränkte Transfer-Operator \tilde{T}_R wohldefiniert ist, folgt aus der Beziehung

$$R \in \mathcal{T}_N, f \in \mathcal{T}_N \implies R \cdot f \in \mathcal{T}_{2N} \implies T_R f \in \mathcal{T}_N.$$

Für $f = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\cdot}$ liefert \tilde{T}_R gerade die Hintereinanderausführung der diskreten Faltung mit den Koeffizienten von $R = \sum_{k=-N}^N r_k e^{ik\cdot}$ und anschließendem Downsampling (multipliziert mit dem Faktor 2), also

$$T_R f \sim 2 \cdot \downarrow_2 (r * c).$$

Weil \mathcal{T}_N ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist (mit $\dim \mathcal{T}_N = 2N + 1$), lässt sich der eingeschränkte Transfer-Operator \tilde{T}_R mit den üblichen Methoden der Linearen

SATZ 6.12. Für ein trigonometrisches Polynom $P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=-N_1}^{N_2} p_k e^{-ik\omega}$ mit $P(0) = 1$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- a) Die Funktion $\hat{\phi}$ in (6.4) liegt in $L^2(\mathbb{R})$ und für alle $\varphi_0 \in \mathcal{M}$ konvergiert die Folge $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ des Kaskadenalgorithmus schwach gegen ϕ .
- b) Für alle $\varphi_0 \in \mathcal{M}$ ist die Folge $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ des Kaskadenalgorithmus beschränkt in $L^2(\mathbb{R})$, d.h. es existiert $B > 0$ mit $\|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq B$ für alle $n \geq 0$.
- c) Der eingeschränkte Transfer-Operator $\tilde{T}_{|P|^2}$ hat den Spektralradius $\rho = 1$ und alle Eigenwerte vom Betrag 1 sind nicht entartet.

Beweis: a) \implies b): Die schwache Konvergenz besagt, dass die linearen Funktionale

$$\ell_n : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \ell_n(g) = \langle \varphi_n, g \rangle$$

gegen das Funktional $\langle \phi, g \rangle$ konvergieren. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt aus der Konvergenz auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R})$ die Beschränktheit der Operatornormen

$$\|\ell_n\| = \sup_{\|g\|_2 \leq 1} |\ell_n(g)| = \|\varphi_n\|_2.$$

b) \implies a): Jede beschränkte Folge in $L^2(\mathbb{R})$ besitzt eine Teilfolge, die schwach konvergiert. Als Grenzwert einer Teilfolge von $(\hat{\varphi}_n)$ kann nur die Funktion $\hat{\phi}$ auftreten, gegen die die Funktionen $\hat{\varphi}_n$ punktweise f.ü. konvergieren. Also gilt folgende Aussage: Jede Teilfolge von $(\hat{\varphi}_n)_{n \geq 0}$ besitzt selbst wieder eine schwach gegen $\hat{\phi}$ konvergierende Teilfolge. Damit muss $\hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$ gelten, und die gesamte Folge $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ konvergiert gegen ϕ .

b) \implies c): Für $k \in \mathbb{Z}$ wählen wir $\varphi^{(k)} = \chi_{[k, k+1)} \in \mathcal{M}$ als Startfunktion des Kaskadenalgorithmus. Die Voraussetzung liefert, dass die Iterationsfolge $(\varphi_n^{(k)})_{n \geq 0}$ jeweils beschränkt in $L^2(\mathbb{R})$ ist. Für $-N \leq k \leq N$ erhalten wir

$$[\hat{\varphi}^{(0)}, \hat{\varphi}^{(k)}](\omega) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(0)}(t) \varphi^{(k)}(m+t) dt e^{-im\omega} = e^{-ik\omega}$$

sowie

$$(6.16) \quad [\hat{\varphi}_n^{(0)}, \hat{\varphi}_n^{(k)}] = T_{|P|^2}^n([\hat{\varphi}^{(0)}, \hat{\varphi}^{(k)}]) = T_{|P|^2}^n(e^{-ik\cdot}), \quad n \geq 0.$$

Die Funktionen auf der linken Seite sind trigonometrische Polynome. Sie sind in der $L^1(0, 2\pi)$ -Norm gleichmäßig (bzgl. n) beschränkt, denn

$$\int_0^{2\pi} |[\hat{\varphi}_n^{(0)}, \hat{\varphi}_n^{(k)}](\omega)| d\omega \leq \|\hat{\varphi}_n^{(0)}\|_2 \|\hat{\varphi}_n^{(k)}\|_2.$$

Also ist auch die L^1 -Norm der rechten Seite für alle $|k| \leq N$ und $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig beschränkt. Durch Linearkombination erhält man, dass die Folge $\|\tilde{T}_{|P|^2}^n f\|_{L^1}$ beschränkt ist für jedes $f \in \mathcal{T}_N$. Also ist die Folge der Operatornormen $\|\tilde{T}_{|P|^2}^n\|$ beschränkt. Dies liefert, dass der Spektralradius des eingeschränkten Transfer-Operators die Ungleichung $\rho \leq 1$ erfüllt und dass alle Eigenwerte vom Betrag 1 nicht entartet sind. (Ansonsten würden gewisse Einträge der Potenzen J^n der Jordan-Normalform $J = J_{|P|^2}$ unbeschränkte Folgen definieren, siehe auch von Mises-Verfahren in der Numerik I oder Stabilität von Differenzenverfahren in der Numerik II.) Dass

der Spektralradius tatsächlich 1 ist, erhalten wir unten aus Folgerung 6.13. (Wir haben ja $b) \implies a)$ schon gezeigt, dürfen an dieser Stelle also auf die Folgerung 6.7 zurückgreifen.)

c) \implies b): Wegen

$$\|\varphi_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n](\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_{|P|^2}^n([\hat{\varphi}, \hat{\varphi}])(\omega) d\omega$$

folgt die Beschränktheit von $(\|\varphi_n\|)_{n \geq 0}$ aus den oben zitierten Aussagen zur Linearen Algebra. \square

Mit Folgerung 6.7 folgt aus der schwachen Konvergenz, dass die Grenzfunktion ϕ kompakten Träger $\text{supp } \phi \subset [N_1, N_2]$ besitzt. Demnach gilt $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \in \mathcal{T}_N$, und wir erhalten aus (6.13) die Identität

$$(6.17) \quad \tilde{T}_{|P|^2}([\hat{\phi}, \hat{\phi}]) = [\hat{\phi}, \hat{\phi}].$$

Dies ergibt die folgende Aussage.

FOLGERUNG 6.13. *Falls eine der äquivalenten Bedingungen in Satz 6.12 erfüllt ist, so ist $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \in \mathcal{T}_N$ eine Eigenfunktion des eingeschränkten Transfer-Operators $\tilde{T}_{|P|^2}$ zum Eigenwert 1. Insbesondere ist der Spektralradius $\rho = 1$ auch ein Eigenwert von $\tilde{T}_{|P|^2}$.*

Um die starke Konvergenz zu charakterisieren, schränken wir die Menge der Startfunktionen des Kaskade-Algorithmus weiter ein und setzen

$$(6.18) \quad \mathcal{M}_0 := \{f \in L^2(\mathbb{R}); \text{supp } f \text{ kompakt, } \hat{f}(0) = 1, \hat{f}(2\pi k) = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Die letzte Bedingung ist aufgrund der Poissonschen Summenformel äquivalent zu

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\cdot - k) \equiv 1 \quad \text{f.ü.,}$$

also sind die \mathbb{Z} -Shifts von f eine *Teilung der Eins*. Die Zusatzbedingung $P(\pi) = 0$ bewirkt, dass die Iterationsfolge $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ in \mathcal{M}_0 liegt, falls dies für die Startfunktion φ_0 gilt. Dies ist mit (6.6) sofort einzusehen. Es gilt nun die folgende Charakterisierung der starken Konvergenz des Kaskadenalgorithmus.

SATZ 6.14. *Für ein trigonometrisches Polynom $P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k e^{-ik\omega}$ mit $P(0) = 1$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- a) *Für alle $\varphi_0 \in \mathcal{M}_0$ konvergiert die Folge $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ des Kaskadenalgorithmus stark gegen ϕ .*
- b) *P erfüllt die Summenregeln (5.47), also $P(\pi) = 0$, und der eingeschränkte Transfer-Operator $\tilde{T}_{|P|^2}$ hat den einfachen Eigenwert 1 und alle anderen Eigenwerte sind vom Betrag kleiner als 1 (also ist der Spektralradius 1).*

Beweis: a) \implies b): Wie im Beweisteil b) \implies c) von Satz 6.12 verwenden wir die Funktionen $\varphi^{(k)} = \chi_{[k, k+1)} \in \mathcal{M}_0$ als Startfunktionen des Kaskadenalgorithmus.

Die Voraussetzung der starken Konvergenz $\hat{\varphi}_n^{(0)} \rightarrow \hat{\phi}$ und $\hat{\varphi}_n^{(k)} \rightarrow \hat{\phi}$ liefert in Analogie zu (6.16)

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\hat{\varphi}_n^{(0)}, \hat{\varphi}_n^{(k)}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}_{|P|^2}^n(e^{-ik\cdot}), \quad n \geq 0, |k| \leq N.$$

Daraus folgt die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}_{|P|^2}^n(f) = f(0)[\hat{\phi}, \hat{\phi}]$$

für alle $f \in \mathcal{T}_N$. Die Beschränktheit erfordert wieder, dass der Spektralradius des eingeschränkten Transfer-Operators $\rho \leq 1$ erfüllt und dass alle Eigenwerte vom Betrag 1 nicht entartet sind. Die Konvergenz gegen die Eigenfunktion $f_1 = [\hat{\phi}, \hat{\phi}]$ zum Eigenwert 1 besagt, dass 1 ein einfacher Eigenwert sein muss und dass alle anderen Eigenwerte vom Betrag kleiner als 1 sind. Damit sind alle Eigenschaften des Operators $\tilde{T}_{|P|^2}$ gezeigt.

Um die Summenregel $P(\pi) = 0$ zu zeigen, betrachten wir den adjungierten Operator $\tilde{T}_{|P|^2}^* : \mathcal{T}_N \rightarrow \mathcal{T}_N$. (Eine explizite Angabe ist hier nicht erforderlich. Er ergibt sich durch Hintereinanderausführung von Upsampling, Faltung mit den Koeffizienten von $|P|^2$ und anschließender Projektion in \mathcal{T}_N .) Die Matrixdarstellung ist die transponierte und komplex-konjugierte Matrix $\mathcal{A}_{|P|^2}^*$. Der adjungierte Operator $\tilde{T}_{|P|^2}^*$ besitzt dieselben Eigenwerte wie $\tilde{T}_{|P|^2}$ (mit gleicher Vielfachheit). Zum einfachen Eigenwert 1 gehört eine Eigenfunktion $g_1 \in \mathcal{T}_N$ mit

$$\langle g_1, e^{ik\cdot} \rangle_{L^2(0,2\pi)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (\tilde{T}_{|P|^2}^*)^n g_1, e^{ik\cdot} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g_1, \tilde{T}_{|P|^2}^n(e^{ik\cdot}) \rangle = \langle g_1, f_1 \rangle.$$

Weil die Fourierkoeffizienten von g_1 alle denselben Wert haben, ist g_1 ein trigonometrisches Polynom der Form $g_1 = \beta \sum_{k=-N}^N e^{ik\cdot}$ mit $\beta \neq 0$. Der zugehörige Eigenvektor von $\mathcal{A}_{|P|^2}^*$ ist $\beta[1, \dots, 1]^T$. Aufgrund der Form von $\mathcal{A}_{|P|^2}$ in (6.15) erhalten wir daraus die Summenregeln

$$r_{-N} + r_{-N+2} + \dots + r_N = \frac{1}{2}, \quad r_{-N+1} + r_{-N+3} + \dots + r_{N-1} = \frac{1}{2},$$

wobei r_k die Koeffizienten des trigonometrischen Polynoms $|P|^2$ sind. Dies ist äquivalent zu $|P(0)|^2 = 1$ und $|P(\pi)|^2 = 0$, also folgt insbesondere $P(\pi) = 0$.

b) \implies a): Nach Satz 6.12 wissen wir schon, dass $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ schwach gegen ϕ konvergiert und $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ gilt. Wegen Lemma 6.6 genügt es also $\|\varphi_n\|_2 \rightarrow \|\phi\|_2$ zu zeigen. Hierzu beachten wir wieder die Gleichung

$$\|\hat{\varphi}_n\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \tilde{T}_{|P|^2}^n[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}](\omega) d\omega = \|\tilde{T}_{|P|^2}^n[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}]\|_{L^1(0,2\pi)}.$$

Nach (6.12) können wir o.B.d.A. annehmen, dass bereits $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] \in \mathcal{T}_N$ gilt. Die Voraussetzung sichert, dass $\lambda = 1$ dominanter und einfacher Eigenwert des Operators $\tilde{T}_{|P|^2}$ ist. Als Eigenfunktion zum Eigenwert 1 haben wir in Folgerung 6.13 die Funktion $f_1 = [\hat{\phi}, \hat{\phi}]$ gefunden. Wenn wir nun die Konvergenz

$$(6.19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}_{|P|^2}^n([\hat{\varphi}, \hat{\varphi}]) = f_1$$

zeigen können, so folgt die Behauptung aus $\|f_1\|_{L^1(0,2\pi)} = \|\hat{\phi}\|_2^2$.

Die Beziehung (6.19) folgt als Anwendung der Iteration nach von Mises. Dazu müssen wir die Darstellung

$$(6.20) \quad [\hat{\phi}, \hat{\phi}] = f_1 + \sum_{k=2}^{2N+1} c_k f_k$$

mit $c_k \in \mathbb{C}$ und den Eigen- und verallgemeinerten Eigenfunktionen $f_k \in \mathcal{T}_N$, $2 \leq k \leq 2N+1$, zu den Eigenwerten $\lambda \neq 1$ von $\tilde{T}_{|P|^2}$ zeigen. Die Funktionen $\{f_1, \dots, f_{2N+1}\}$ bilden dabei eine Basis von \mathcal{T}_N .

Wichtig an der Darstellung (6.20) ist, dass der Koeffizient von f_1 gleich 1 ist. Um dies nachzuweisen, betrachten wir nur die Stelle $\omega = 0$. Wegen $\varphi \in \mathcal{M}_0$ gilt $[\hat{\phi}, \hat{\phi}](0) = 1$. Die Definition (6.4) von $\hat{\phi}$ und Folgerung 6.7 ergeben zusammen mit den Voraussetzungen an P auch $\phi \in \mathcal{M}_0$, also $f_1(0) = [\hat{\phi}, \hat{\phi}](0) = 1$. Für alle weiteren Funktionen f_k , $2 \leq k \leq 2N+1$, gilt mit einem $\lambda \neq 1$ und $\nu \in \mathbb{N}$

$$(\lambda I - \tilde{T}_{|P|^2})^\nu(f_k) \equiv 0.$$

Die Voraussetzung $P(0) = 1$ und $P(\pi) = 0$ liefert $\tilde{T}_{|P|^2}^\mu f(0) = f(0)$ für alle $f \in \mathcal{T}_N$ und alle $\mu \geq 0$. Also erhalten wir

$$(\lambda - 1)^\nu f_k(0) = 0$$

und wegen $\lambda \neq 1$ und $\nu \in \mathbb{N}$ ergibt sich $f_k(0) = 0$. Damit ist die Darstellung (6.20) nachgewiesen. \square

BEISPIEL 6.15. *Wir greifen das Beispiel 6.8 wieder auf. Die Skalierungsmasken (p_k) und (r_k) ergeben*

$$|P(\omega)|^2 = \frac{1}{4}(2 + e^{i\omega} + e^{-i\omega}), \quad |R(\omega)|^2 = |P(2\omega)|^2.$$

Der eingeschränkte Transfer-Operator $\mathcal{T}_{|P|^2} : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_1$ besitzt zur Basis $\mathcal{B} = \{e^{-i}, 1, e^i\}$ die Matrixdarstellung

$$\mathcal{A}_{|P|^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Daraus erhält man die Eigenwerte 1 und 1/2 (doppelt, nicht entartet). Also ist $\rho(\tilde{T}_{|P|^2}) = \rho(\mathcal{A}_{|P|^2}) = 1$. Der Eigenwert 1 ist einfach und einziger Eigenwert vom Betrag 1. Weiterhin gilt $P(\pi) = 0$, also sind die Bedingungen zur starken Konvergenz in Satz 6.14(b) erfüllt. Der Eigenfunktion $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] = 1$ von $\tilde{T}_{|P|^2}$ entspricht der Eigenvektor $(0, 1, 0)^T$ von $\mathcal{A}_{|P|^2}$.

Für $\mathcal{T}_{|R|^2} : \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_2$ erhalten wir zur Basis $\mathcal{B} = \{e^{-i2}, e^{-i}, 1, e^i, e^{i2}\}$ die Matrixdarstellung

$$\mathcal{A}_{|R|^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Diese hat die Eigenwerte 1, 1/2 (doppelt) und 0 (doppelt), jeweils nicht entartet. Wieder ist $\rho(\tilde{T}_{|R|^2}) = \rho(\mathcal{A}_{|R|^2}) = 1$. Der Eigenwert 1 ist einfach und einziger Eigenwert vom Betrag 1. Weil aber $R(\pi) = 1 \neq 0$ gilt, sind nur die Bedingungen

zur schwachen Konvergenz in Satz 6.14(b) erfüllt. Die Eigenfunktion $[\hat{\eta}, \hat{\eta}] = \frac{1}{4}(2 + e^{i\omega} + e^{-i\omega})$ zum Eigenwert 1 von $\tilde{T}_{|R|^2}$ entspricht dem Eigenvektor $\frac{1}{4}(0, 1, 2, 1, 0)^T$ von $\mathcal{A}_{|R|^2}$.

ÜBUNG 6.16. Die Skalierungsmaske $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $s_0 = s_3 = 1$ und $s_k = 0$ sonst hat das Skalierungssymbol $S(\omega) = \frac{1}{2}(1 + e^{-i3\omega})$. Als Grenzfunktion in (6.4) ergibt sich also

$$\theta(x) = \frac{1}{3}\chi_{[0,3)}(x).$$

Stellen Sie die Matrixdarstellung des eingeschränkten Transfer-Operators auf dem Raum \mathcal{T}_3 zur Standardbasis \mathcal{B} von \mathcal{T}_3 auf und berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Operators. Welche der Bedingungen der starken bzw. schwachen Konvergenz des Kaskadenalgorithmus sind erfüllt?

Lösung: Die Matrix lautet

$$\mathcal{A}_S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sie hat die Eigenwerte 1 (doppelt), -1 , $\frac{1}{2}$ (dreifach), $-\frac{1}{2}$. Keiner der Eigenwerte 1 und -1 ist entartet: Zu $\lambda = 1$ sind $v_1 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$ und $v_2 = (0, 1, 2, 0, 2, 1, 0)^T$ linear unabhängige Eigenvektoren. Also sind die Voraussetzungen für die schwache Konvergenz erfüllt. Zum Eigenvektor v_1 gehört die Eigenfunktion $f \equiv 1$ des Transfer-Operators, die die Beziehung $|S(\omega)|^2 + |S(\omega + \pi)|^2 = 1$ wie in (5.10) beschreibt. Eine weitere Eigenfunktion zum Eigenwert 1 ist nach Folgerung 6.13 auch die Funktion $[\hat{\theta}, \hat{\theta}] = \frac{1}{5}(3 + 2(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + e^{i2\omega} + e^{-i2\omega})$. Die Voraussetzungen für die starke Konvergenz sind verletzt: Es gilt zwar $S(\pi) = 0$ (was insbesondere aus der obigen Relation folgt), aber die strikte Dominanz und Einfachheit des Eigenwerts $\lambda = 1$ sind verletzt.

ÜBUNG 6.17. Das Vorliegen von schwacher oder starker Konvergenz hängt wesentlich von der Startfunktion des Kaskadenalgorithmus ab. Falls $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ gilt, können wir ein $\delta > 0$ mit $|1 - \hat{\phi}(\omega)| < \frac{1}{2}$ für alle $\omega \in [-\delta, \delta] =: E_\delta$ wählen. Zeigen Sie, dass dann für die Startfunktion φ mit $\hat{\varphi} = \chi_{E_\delta}$ die starke Konvergenz $\varphi_n \rightarrow \phi$ eintritt. (Hinweis: Man bestimmt eine Majorante für $\hat{\varphi}_n$ mit Hilfe von $\hat{\phi}$.)

: Lösung: Es gilt

$$\hat{\varphi}_n(\omega) = \prod_{j=1}^n P(2^{-j}\omega)\hat{\varphi}(2^{-n}\omega) = \prod_{j=1}^n P(2^{-j}\omega)\chi_{2^n E_\delta}(\omega).$$

Für alle $\omega \in 2^n E_\delta$ ist andererseits

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^n P(2^{-j}\omega)\hat{\phi}(2^{-n}\omega) = \hat{\varphi}_n(\omega)\hat{\phi}(2^{-n}\omega).$$

Daraus folgt $|\hat{\varphi}_n(\omega) - \hat{\phi}(\omega)| \leq \frac{1}{2}|\hat{\phi}(\omega)|$ für alle $\omega \in 2^n E_\delta$. Für alle anderen ω folgt aus $\hat{\varphi}_n(\omega) = 0$ sofort $|\hat{\varphi}_n(\omega) - \hat{\phi}(\omega)| = |\hat{\phi}(\omega)|$. Damit ist $|\hat{\phi}|^2$ integrierbare Majorante zu $|\hat{\varphi}_n - \hat{\phi}|^2$, und die punktweise Konvergenz (6.8) liefert mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}_n - \hat{\phi}|^2 = 0.$$

3. Einschub: Das Spektrum des Transfer-Operators

Wir wollen mit einfachen Hilfsmitteln der Linearen Algebra weitere Aussagen zum Spektrum des Transfer-Operators herleiten. Dazu sei

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k e^{-ik\omega}$$

mit $P(0) = 1$ und $P(\pi) = 0$ gegeben (d.h. die Summenregeln sind erfüllt). Also gilt

$$P(\omega) = \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} R(\omega), \quad R(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2-1} r_k e^{-ik\omega}$$

mit einem trigonometrischen Polynom R . Wir verwenden noch die Bezeichnung

$$\mathcal{T}_{N_1, N_2} = \left\{ f = \sum_{k=N_1}^{N_2} a_k e^{-ik\omega}; a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

für trigonometrische Polynome der entsprechenden Form. Nun ist es einfach nachzurechnen, dass der Transfer-Operator T_P definiert durch

$$T_P f(\omega) = P\left(\frac{\omega}{2}\right) f\left(\frac{\omega}{2}\right) + P\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) f\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)$$

den Raum \mathcal{T}_{N_1, N_2} wieder in sich abbildet. Ebenso bildet natürlich T_R den Raum \mathcal{T}_{N_1, N_2-1} in sich ab. Unser Ziel ist es nun, den engen Zusammenhang der Spektren von T_R und T_P zu erläutern. (Der Faktor $\frac{1+e^{-i\omega}}{2}$ spielt nämlich eine ganz wichtige Rolle!)

HILFSSATZ 6.18. Falls $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von T_R und $f \in \mathcal{T}_{N_1, N_2-1}$ zugehörige (verallgemeinerte) Eigenfunktion ist, so ist $\mu = \frac{\lambda}{2}$ Eigenwert von T_P mit zugehöriger (verallgemeinerter) Eigenfunktion $g(\omega) = \frac{1+e^{-i\omega}}{2} f(\omega) \in \mathcal{T}_{N_1, N_2}$. Genauer: für $f \in \mathcal{T}_{N_1, N_2-1}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$(6.21) \quad (\lambda I - T_R)^k f = 0 \implies \left(\frac{\lambda}{2} I - T_P \right)^k g = 0 \text{ mit } g(\omega) = \frac{1+e^{-i\omega}}{2} f(\omega).$$

Beweis: Wir beginnen mit (richtigen) Eigenfunktionen, also dem Fall $k = 1$ in (6.21). Als wichtige Identität benutzen wir

$$\frac{1 + e^{-i\frac{\omega}{2}}}{2} \frac{1 - e^{-i\frac{\omega}{2}}}{2} = \frac{1 - e^{-i\omega}}{4}.$$

Einsetzen der Definition von g ergibt nach Ausklammern des gemeinsamen Faktors $\frac{1+e^{-i\omega}}{4}$

$$T_P g(\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega}}{4} T_R f(\omega) = \frac{\lambda}{2} g(\omega).$$

Also ist die Behauptung für alle Eigenwerte und Eigenfunktionen von T_R gezeigt.

Aus der obigen Rechnung schließen wir sogar für jedes $f \in \mathcal{T}_{N_1, N_2-1}$ auf

$$\left(\frac{\lambda}{2} I - T_P \right) \left[\frac{1 - e^{-i\omega}}{2} f \right] = \frac{1 - e^{-i\omega}}{4} \cdot (\lambda I - T_R)[f].$$

Deshalb muss ein weiterer (möglicherweise verallgemeinerter) Rechts-Eigenvektor $v = (v_{N_1}, \dots, v_{N_2})^T$ von \mathcal{A}_P existieren mit

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} v_k \neq 0$$

(sonst gäbe es keine Basis von Eigenvektoren und verallgemeinerten Eigenvektoren von \mathcal{A}_P). Würde dieser zusätzliche Vektor zu einem Eigenwert $\mu \neq 1$ von \mathcal{A}_P gehören, so müsste er aber orthogonal zum Links-Eigenvektor w sein, Widerspruch. Also gehört der zusätzliche Rechts-Eigenvektor zum Eigenwert 1; die zugehörige Eigenfunktion $g = \sum_{k=N_1}^{N_2} v_k e^{-ik}$ erfüllt $g(0) \neq 0$. Dadurch ist auch klar, dass die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 1 von \mathcal{A}_P um eins größer ist als die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 2 von \mathcal{A}_R . \square

BEMERKUNG 6.20. *Wir haben insgesamt gezeigt, dass das Spektrum $\sigma(T_P)$ gegeben ist durch*

$$\sigma(T_P) = \{\lambda/2; \lambda \in \sigma(T_R)\} \dot{\cup} \{1\},$$

wobei wir in dieser Schreibweise "geordnete" Mengen (unter Beibehaltung der Vielfachheit von Elementen) verwenden. Eine entsprechende Aussage liefert, dass die Multiplikation von R mit $\frac{1+e^{i\omega}}{2}$ zu dem gleichen Spektrum $\sigma(P)$ mit (verallgemeinerten) Eigenfunktionen $g(\omega) = \frac{1-e^{i\omega}}{2} f(\omega)$ führt.

Ist nun $R = |P_0|^2$ gegeben und multiplizieren wir nacheinander mit $\frac{1+e^{-i\omega}}{2}$ und $\frac{1+e^{i\omega}}{2}$, so erhalten wir die folgende Aussage für $P(\omega) = \frac{1+e^{i\omega}}{2} P_0(\omega)$:

Das Spektrum $\sigma(\tilde{T}_{|P|^2})$ des eingeschränkten Transfer-Operators ist gegeben durch

$$\sigma(\tilde{T}_{|P|^2}) = \{\lambda/4; \lambda \in \sigma(\tilde{T}_{|P_0|^2})\} \dot{\cup} \{1, 1/2\}.$$

Die zum vorderen Teil gehörenden (verallgemeinerten) Eigenfunktionen von $\tilde{T}_{|P|^2}$ ergeben sich als

$$g(\omega) = \frac{(1 - e^{-i\omega})(1 - e^{i\omega})}{4} f(\omega) = \frac{2 - e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{4} f(\omega).$$

Alle diese Funktionen erfüllen die Bedingungen $g(0) = g'(0) = 0$. Zwei weitere (verallgemeinerte) Eigenfunktionen kommen hinzu, und zwar

- eine Funktion g_1 mit $g_1(0) \neq 0$ zum Eigenwert 1,
- eine Funktion g_2 mit $g_2(0) = 0$, $g_2'(0) \neq 0$ zum Eigenwert $1/2$.

Falls diese Eigenwerte einfach sind (also in dem ersten Teil nicht vorkommen), sind die Funktionen g_1 und g_2 sogar Eigenfunktionen. Die Funktion g_1 ist uns schon bekannt: es handelt sich um $[\hat{\phi}, \hat{\phi}]$, falls $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ gilt.

An den Beispielen und Übungen lassen sich diese Überlegungen sehr schön veranschaulichen. Dass tatsächlich verallgemeinerte Eigenfunktionen hinzutreten können, wird durch Beispiel 6.31 veranschaulicht (Schritt von P_2 nach P_1).

4. Stabilität der Skalierungsfunktion, Cohen's Bedingung

Für Skalierungsfunktionen ϕ , deren Shifts $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis (von V_0) bilden, haben wir in Folgerung 5.7 die Eigenschaft

$$(6.23) \quad |P(\frac{\omega}{2})|^2 + |P(\frac{\omega}{2} + \pi)|^2 = 1$$

für das Skalierungssymbol als notwendige Bedingung erhalten. Das Beispiel der Übungsaufgabe 6.16 zeigt jedoch, dass diese Bedingung nicht hinreichend ist für die Orthogonalität der \mathbb{Z} -Shifts von ϕ . Auch hierfür liefert der Unterschied zwischen schwacher und starker Konvergenz eine Begründung.

SATZ 6.21. *Das trigonometrische Polynom P erfülle $P(0) = 1$ und die Bedingung (6.23).*

a) *Dann liegt die Funktion ϕ mit*

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} P(2^{-j}\omega)$$

in $L^2(\mathbb{R})$, der Kaskadenalgorithmus konvergiert schwach für alle Startfunktionen $\varphi \in \mathcal{M}$ gegen ϕ und es gilt $0 \leq [\hat{\phi}, \hat{\phi}] \leq 1$.

b) *Starke Konvergenz des Kaskadenalgorithmus für alle Startfunktionen $\varphi \in \mathcal{M}_0$ mit $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] \equiv 1$ liegt genau dann vor, wenn die \mathbb{Z} -Shifts von ϕ ein ONS bilden, also wenn $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \equiv 1$ gilt.*

Beweis: a) Für $\varphi \in \mathcal{M}$ ist $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}]$ ein trigonometrisches Polynom. Setzen wir $B := \max_{\omega} [\hat{\varphi}, \hat{\varphi}](\omega)$, so ergibt (6.13) und die Bedingung (6.23)

$$0 \leq [\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n](\omega) \leq B.$$

Hieraus folgt

$$\|\varphi_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n](\omega) d\omega \leq B,$$

und mit Satz 6.12(b) folgt $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ sowie die schwache Konvergenz des Kaskadenalgorithmus für alle $\varphi \in \mathcal{M}$. Wählen wir die Startfunktion $\varphi = \chi_{[0,1]}$ mit orthogonalen \mathbb{Z} -Shifts, so ist $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] \equiv 1$, und die Gleichungen (6.13) und (6.23) ergeben

$$(6.24) \quad [\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n] = T_{|P|^2}^n [\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] \equiv 1.$$

Hieraus folgt die Beziehung $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \leq 1$. Dies wird als Übungsaufgabe gestellt.

b) Die Startfunktion $\varphi = \chi_{[0,1]} \in \mathcal{M}_0$ erfüllt $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] \equiv 1$, wie in Teil a) erwähnt. Aus der starken Konvergenz von φ_n gegen ϕ erhalten wir

$$(6.25) \quad \begin{aligned} [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) &= \sum_k \langle \phi, \phi(\cdot - k) \rangle e^{-ik\omega} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \langle \varphi_n, \varphi_n(\cdot - k) \rangle e^{-ik\omega} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n](\omega) = 1. \end{aligned}$$

Hierbei durfte die Summation und Grenzwertbildung vertauscht werden, weil ϕ und φ_n kompakten Träger haben. Im letzten Schritt wurde noch die Identität (6.24) verwendet.

Gilt umgekehrt $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \equiv 1$, so ist $\|\phi\|_2 = 1$. Weil die schwache Konvergenz schon aus den allgemeinen Voraussetzungen des Satzes folgt (siehe Teil a)), bleibt mit Hilfssatz 6.6 nur zu zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|_2 = 1$$

für alle Startfunktionen $\varphi \in \mathcal{M}_0$ mit $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] \equiv 1$ gilt. Dies ist aber durch die Identität (6.24) gesichert. \square

ÜBUNG 6.22. *Beweisen Sie, dass aus den Voraussetzungen von Satz 6.21 die Beziehung $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \leq 1$ folgt. (Hinweis: Modifizieren Sie den ersten Teil des Beweises zu b), indem Sie nur die schwache Konvergenz verwenden.)*

Die in Teil b) des Satzes gemachte Aussage kann sogar noch verschärft werden, indem die Bedingung an die Orthogonalität der \mathbb{Z} -Shifts der Startfunktion φ fallengelassen wird. Hierzu benötigen wir ein weiteres Hilfsmittel aus der Linearen Algebra.

Der eingeschränkte Transfer-Operator $\tilde{T}_{|P|^2}$ hat die folgende offensichtliche Eigenschaft:

Für alle nichtnegativen trigonometrischen Polynome $f \in \mathcal{T}_N$ ist auch das Polynom $T_{|P|^2}f$ nichtnegativ.

Deshalb nennt man $\tilde{T}_{|P|^2}$ einen *positiven Operator*. In einer Arbeit von Rheinboldt und Vandergraft¹ wird in allgemeinerem Zusammenhang die folgende Eigenschaft eingeführt.

DEFINITION 6.23. *Ein positiver Operator $T : \mathcal{T}_N \rightarrow \mathcal{T}_N$ heißt*

- a) *unzerlegbar (engl. irreducible), wenn aus der Ungleichung $Tf \leq \alpha f$ für ein $f \geq 0$, $f \neq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ die strikte Positivität $f > 0$ folgt. Andernfalls heißt T zerlegbar.*
- b) *primitiv, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $T^k f > 0$ für alle $f \geq 0$, $f \neq 0$ gilt.*

ÜBUNG 6.24. *Eine einfache Überlegung zeigt, dass die Primitivität des Operators auch die Unzerlegbarkeit impliziert. (Hinweis: Ein positiver linearer Operator ist "monoton", d.h. aus $f \leq g$ folgt auch $Tf \leq Tg$.)*

BEMERKUNG 6.25. *Die Zerlegbarkeit wird in der Regel für quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$, eingeführt. A heißt zerlegbar, wenn es zwei nichtleere disjunkte*

¹W. C. Rheinboldt, J. S. Vandergraft, "A simple approach to the Perron-Frobenius theory for positive operators on general partially-ordered finite-dimensional linear spaces", Math. Comp. 27 (1973), 139–145; der Artikel verallgemeinert einige wesentliche Aussagen der Perron-Frobenius Theorie für nichtnegative Matrizen auf positive (besser: "nichtnegative") Operatoren auf endlich-dimensionalen Vektorräumen.

Mengen $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ mit $I \cup J = \{1, \dots, n\}$ so gibt, dass $a_{i,j} = 0$ für alle $i \in I$ und $j \in J$ gilt. Gleichbedeutend ist, dass es eine Permutationsmatrix P gibt mit

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

und Blöcken $A_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $A_2 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, $1 \leq m \leq n-1$. Andernfalls heißt A unzerlegbar. Die Unzerlegbarkeit von Matrizen spielt an verschiedenen Stellen eine wichtige Rolle.

- Ein hinreichendes Kriterium für die positive Definitheit einer symmetrischen Matrix A ist die strikte Diagonaldominanz

$$a_{i,i} > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|, \quad 1 \leq j \leq n.$$

(Beweis mit dem Kreisesatz von Gerschgorin) Ersetzt man in höchstens $n-1$ -Zeilen die strikte Ungleichung durch die schwache Form \geq und fordert zusätzlich die Unzerlegbarkeit von A , so ist dies wiederum hinreichend für die positive Definitheit. Hierauf beruhen z.B. Konvergenzaussagen zum Einzelschrittverfahren (Gauß-Seidel) in der Numerik I.

- In der Graphentheorie geben Inzidenzmatrizen mit Werten $a_{i,j} \in \{0, 1\}$ an, ob zwei Knoten eines (gerichteten) Graphen verbunden sind. Die Erreichbarkeit jedes Knoten von jedem anderen ist äquivalent dazu, dass die Inzidenzmatrix unzerlegbar ist.
- Stochastische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ haben Einträge $a_{i,j} \geq 0$ und Spaltensummen 1. (Man beachte hier den Zusammenhang zu den Summenregeln (5.47) und den Matrizen A_R in (6.15).) Solche Matrizen treten z.B. bei der Behandlung von stationären diskreten Markoff-Prozessen

$$\vec{p}^{(k+1)} = A\vec{p}^{(k)}$$

auf. Der Vektor $\vec{p}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ beschreibt eine Häufigkeitsverteilung, also ist $\vec{p}^{(k)} \geq 0$ und $\sum_i p_i^{(k)} = 1$. Die Matrix A hat den Spektralradius 1, weil die Spaltensummennorm $\|A\|_1 = 1$ ist und der Vektor $\mathbf{1}$ aus lauter Einsen ein Links-Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist. Also ist $\rho = 1$ auch ein Eigenwert. Falls $A > 0$ gilt, sichert die von Perron und Frobenius entwickelte Theorie, dass 1 einfacher Eigenwert mit positivem Eigenvektor $\vec{p} > 0$ (und Spaltensumme 1) ist. Dieser Vektor liefert die eindeutige Grenzverteilung des Markov-Prozesses, d.h. es gilt

$$\vec{p} = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k p^{(0)}$$

bei beliebiger Anfangsverteilung $p^{(0)}$.

Falls A hingegen unzerlegbar ist, so können mehrere Eigenwerte vom Betrag 1 auftreten. Alle Eigenwerte vom Betrag 1 sind einfach und als Grenzverteilung bezeichnet man den Eigenvektor \vec{p} zum Eigenwert 1. Dieser ist wieder strikt positiv. Falls A sogar primitiv ist, also eine strikt positive Potenz $A^k > 0$ existiert, so ist $\lambda = 1$ wieder der einzige Eigenwert vom Betrag 1 (R. A. Horn und C. R. Johnson, "Matrix Analysis", Cambridge Univ. Press 1985, Theorem 8.5.2). Dies führt dann zum "starken" Konvergenzsatz von Markoff. Die Primitivität folgt schon, wenn mindestens ein Diagonalelement von A positiv ist (a.a.O., Corollary 8.4.8).

Das Beispiel der unzerlegbaren Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten 1 und -1 belegt, dass unzerlegbare Matrizen existieren, die nicht primitiv sind. A hat die einfachen Eigenwerte 1 und -1 . Die Lage aller Eigenwerte einer unzerlegbaren Matrix hat die folgende erstaunliche Struktur (a.a.O., Corollary 8.4.6): Die Eigenwerte vom Betrag 1 sind die k -ten Einheitswurzeln

$$\{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = e^{2\pi i/k}, \dots, \lambda_k = e^{2\pi i(k-1)/k}\}$$

zu einem $1 \leq k \leq n$, das n teilt. Sie sind alle einfach. Für jeden weiteren Eigenwert λ vom Betrag $|\lambda| < 1$ sind $e^{2\pi im/k}\lambda$ mit $1 \leq m \leq k - 1$ ebenfalls Eigenwerte der gleichen algebraischen Vielfachheit wie λ .

Wir kehren zur Betrachtung des eingeschränkten Transfer-Operators $\tilde{T}|_{P|2}$ zurück. Als positiver Operator hat er die folgende Eigenschaft (unabhängig davon, ob der Kaskadenalgorithmus konvergiert oder nicht).

SATZ 6.26. Der Spektralradius ρ des eingeschränkten Transfer-Operators $\tilde{T}|_{P|2}$ ist ein Eigenwert. Falls $\rho > 0$ gilt, existiert eine nichtnegative Eigenfunktion $f_\rho \in \mathcal{T}_N$ mit $f_\rho \geq 0$, $f_\rho \not\equiv 0$ zu diesem Eigenwert.

Der Beweis ist im Artikel von Rheinboldt und Vandergraft enthalten (Theorem 7) und überträgt das bekannte Resultat über nichtnegative Matrizen auf positive Operatoren. Wir haben diese Eigenschaft schon anhand der Eigenfunktion $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \geq 0$ zum Eigenwert 1 beobachtet, falls schwache (oder starke) Konvergenz des Kaskadenalgorithmus vorliegt. Für die Orthogonalität der \mathbb{Z} -Shifts würde man gerne auf $f_\rho \equiv 1$, also insbesondere die strikte Positivität schließen. Dazu sind die in Definition 6.23 gegebenen Bezeichnungen hilfreich.

SATZ 6.27. Gegeben sei das trigonometrische Polynom

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k e^{-ik\omega} = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^m P_0(\omega),$$

wobei $m \in \mathbb{N}_0$ und P_0 ein trigonometrisches Polynom mit $P_0(0) = 1$, $P_0(\pi) \neq 0$ ist. Dann sind äquivalent:

- a) $\tilde{T}|_{P_0|2}$ ist unzerlegbar.
- b) $\tilde{T}|_{P_0|2}$ ist primitiv.
- c) P_0 (und äquivalent dazu P) erfüllt "Cohen's Bedingung"²:
 - (i) P besitzt keine "symmetrischen" Nullstellenpaare $(\omega, \omega + \pi)$. (Diese Bezeichnung wird wegen der Lage von $e^{i\omega}$ und $e^{i(\omega+\pi)}$ auf dem Einheitskreis gewählt.)
 - (ii) Es existiert kein Zyklus

$$(6.26) \quad \omega_0 \in [0, 2\pi), 2\omega_0 \pmod{2\pi}, \dots, 2^\ell \omega_0 \pmod{2\pi}$$

der Länge $\ell + 1 \geq 2$ aus paarweise verschiedenen Zahlen in $[0, 2\pi)$ mit $2^{\ell+1}\omega_0 \equiv \omega_0 \pmod{2\pi}$, so dass

$$(6.27) \quad P_0(2^k \omega_0 + \pi) = 0 \quad \text{für alle } 0 \leq k \leq \ell$$

²Albert Cohen, adakemischer Schüler von Yves Meyer und Professor an der Université Marie et Pierre Curie (Paris VI), formulierte diese Bedingung in seiner Thèse d'Etat 1989

gilt.

Beweis: Wir zeigen die Implikationen a) \implies c) \implies b) \implies a). Die letzte folgt aus der Definition und Übung 6.24.

a) \implies c): Falls ein Nullstellenpaar $\omega^*, \omega^* + \pi$ von P_0 vorliegt (also auch $N = N_2 - N_1 \geq 2$ gelten muss), wählen wir $f(\omega) = 1 - \cos(\omega - 2\omega^*) \in \mathcal{T}_1$. Dann gilt $\tilde{T}_{|P_0|^2} f(2\omega^*) = 0$, und wegen $\tilde{T}_{|P_0|^2} f \geq 0$ hat die Funktion dort mindestens eine doppelte Nullstelle. Weil $2\omega^*$ doppelte und einzige Nullstelle von f im Periodenintervall ist, existiert eine Konstante $\alpha > 0$ mit $\tilde{T}_{|P_0|^2} f \leq \alpha f$. Da f nicht strikt positiv ist, widerspricht dies der Unzerlegbarkeit des Operators.

Falls ein Zyklus (6.26) mit der Eigenschaft (6.27) vorliegt (also auch $N = N_2 - N_1 \geq \ell + 1$ gelten muss), wählen wir $f(\omega) = \prod_{k=0}^{\ell} (1 - \cos(\omega - 2^k \omega_0)) \in \mathcal{T}_{\ell+1}$. Dann gilt

$$\tilde{T}_{|P_0|^2} f(2^k \omega_0) = |P_0(2^{k-1} \omega_0)|^2 \underbrace{f(2^{k-1} \omega_0)}_{=0} + \underbrace{|P_0(2^{k-1} \omega_0 + \pi)|^2}_{=0} f(2^{k-1} \omega_0 + \pi)$$

für alle $1 \leq k \leq \ell + 1$. Wie oben folgt $\tilde{T}_{|P_0|^2} f \leq \alpha f$ für ein $\alpha > 0$, im Widerspruch zur Unzerlegbarkeit des Operators.

c) \implies b): Gegeben sei ein beliebiges $f \in \mathcal{T}_N$ mit $f \geq 0$, $f \neq 0$. Weiter seien

$$0 < \omega_1 < \dots < \omega_r < 2\pi$$

die paarweise verschiedenen Nullstellen von f im offenen Intervall $(0, 2\pi)$. Wir bezeichnen die Anzahl der paarweise verschiedenen Nullstellen von $\tilde{T}_{|P_0|^2}^k f$, $k \geq 1$, im offenen Intervall $(0, 2\pi)$ mit μ_k . Es gilt:

1. $(\mu_k)_{k \geq 0}$ ist monoton fallend: Seien η_i , $1 \leq i \leq \mu_k$, die paarweise verschiedenen Nullstellen von $\tilde{T}_{|P_0|^2}^k f$. Weil P_0 keine symmetrischen Nullstellenpaare besitzt, folgt aus $\tilde{T}_{|P_0|^2}^{k+1} f(\omega) = 0$ mit $\omega \in (0, 2\pi)$ die Bedingung

$$\tilde{T}_{|P_0|^2}^k f(\omega 2) = 0 \quad \text{oder} \quad \tilde{T}_{|P_0|^2}^k f(\omega 2 + \pi) = 0.$$

Also muss $\omega \in \{2\eta_i \bmod 2\pi; 1 \leq i \leq \mu_k\} \cap (0, 2\pi)$ gelten. Damit ist $\mu_{k+1} \leq \mu_k$ gezeigt. Weiterhin folgt sogar $\mu_{k+1} < \mu_k$, falls

- $\tilde{T}_{|P_0|^2}^k f$ ein symmetrisches Nullstellenpaar $\eta, \eta + \pi \in (0, 2\pi)$ besitzt (also $\eta_j = \eta_i + \pi$ für ein Paar i, j gilt),
- $\eta_i = \pi$ für ein $1 \leq i \leq \mu_k$ gilt.

Denn dann enthält die obige Menge höchstens $\mu_k - 1$ Elemente.

2. Aus $\mu_{k+1} = \mu_k > 0$ folgt mit den obigen Bezeichnungen, dass $P_0(\eta_i + \pi) = 0$ und $\tilde{T}_{|P_0|^2}^{k+1} f(2\eta_i) = 0$ für alle $1 \leq i \leq \mu_k$ gilt.

Aus der Existenz einer Sequenz $\mu_k = \mu_{k+1} = \dots = \mu_{k+N+1} > 0$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ folgt aus den obigen Überlegungen, dass P_0 eine Menge von Nullstellen der Form $\eta_i + \pi, (2\eta_i \bmod 2\pi) + \pi, \dots, (2^N \eta_i \bmod 2\pi) + \pi$ besitzt. Hierbei sind alle $\eta_i, \dots, (2^N \eta_i \bmod 2\pi) \in (0, 2\pi)$. Weil der Laurent-Grad von P_0 aber kleiner oder gleich N ist, muss diese Menge einen Zyklus enthalten. In $(0, 2\pi)$ gibt es nur Zyklen der Länge größer oder gleich 2. Dies widerspricht Cohen's Bedingung.

Damit haben wir gezeigt, dass $\mu_{k+N+1} < \mu_k$ für alle $k \geq 0$ mit $\mu_k > 0$ gilt. Wegen $\mu_0 = r \leq N$ (beachte: $f \in \mathcal{T}_N$ mit $f \geq 0$ hat höchstens N paarweise verschiedene Nullstellen) folgt nun $\mu_{N(N+1)} = 0$. Also gilt $\tilde{T}_{|P_0|^2}^k f(\omega) > 0$ für alle $\omega \in (0, 2\pi)$ und $k \geq N(N+1)$.

Falls $\tilde{T}_{|P_0|^2}^k f(0) = 0$ gilt, muss wegen $P_0(0)P_0(\pi) \neq 0$ auch $\tilde{T}_{|P_0|^2}^{k-1} f(\pi) = 0$ gelten. Dies ist soeben für $k > N(N+1)$ widerlegt worden. Also ist $\tilde{T}_{|P_0|^2}^k f(\omega) > 0$ für alle $\omega \in [0, 2\pi)$ und $k > N(N+1)$. \square

BEMERKUNG 6.28. *Im letzten Beweisteil haben wir sogar bewiesen, dass Cohen's Bedingung die folgende Eigenschaft des Operators $\tilde{T}_{|P|^2}$ impliziert: Für alle $f \in \mathcal{T}_N$ mit $f \geq 0$ und $f \not\equiv 0$, alle $\omega \in (0, 2\pi)$ sowie alle $k \geq N(N+1)$ gilt $\tilde{T}_{|P|^2}^k f(\omega) > 0$. Die Primitivität (und Unzerlegbarkeit) von $\tilde{T}_{|P|^2}$ scheitert also nur durch Einsetzen der Stelle $\omega = 0$, denn aus $P(0) = 1$ und $P(\pi) = 0$ folgt sofort $\tilde{T}_{|P|^2}^k f(0) = 0$ für alle Funktionen*

$$f \in F_N = \{g \in \mathcal{T}_N; g(0) = 0\}.$$

Wir kommen nun zur Erweiterung der Äquivalenzen von Satz 6.14 sowie einer Verschärfung von Teil b) von Satz 6.21 zur starken Konvergenz des Kaskadenalgorithmus.

SATZ 6.29. *Das trigonometrische Polynom*

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k e^{-ik\omega}$$

erfülle $P(0) = 1$ und $|P(\omega)|^2 + |P(\omega + \pi)|^2 \equiv 1$ für alle $\omega \in [0, 2\pi)$. Dann sind äquivalent:

- P erfüllt Cohen's Bedingung.*
- Der Kaskadenalgorithmus konvergiert für alle $\varphi \in \mathcal{M}_0$ stark gegen ϕ .*
- Die Familie $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine ONB des Raumes V_0 , also $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \equiv 1$.*
- Es gilt $\|\phi\|_2 = 1$.*

Beweis: a) \implies b): Da P automatisch die Summenregeln erfüllt, genügt es zu zeigen, dass der eingeschränkte Transfer-Operator $\tilde{T}_{|P|^2}$ die Spektraleigenschaften in Satz 6.14(b) hat. Aus der schwachen Konvergenz (Satz 6.21(a)) folgt bereits, dass der Spektralradius $\rho = 1$ ist. Wegen $P(\pi) = 0$ gibt es ein trigonometrisches Polynom P_0 mit

$$P(\omega) = \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} P_0(\omega).$$

Mit $\sigma(\tilde{T}_{|P_0|^2})$ bezeichnen wir die (geordnete) Menge der (mit Vielfachheiten gezählten) Eigenwerte des eingeschränkten Transfer-Operators $\tilde{T}_{|P_0|^2}$ und mit τ seinen Spektralradius. Dann sind die Eigenwerte von $\tilde{T}_{|P|^2}$ nach Bemerkung 6.20 gegeben durch

$$\sigma(\tilde{T}_{|P|^2}) = \{\lambda/4; \lambda \in \sigma(\tilde{T}_{|P_0|^2})\} \dot{\cup} \{1, 1/2\}.$$

Es genügt also zu zeigen, dass $\tau/4 < 1$ gilt. Wäre $\tau/4 = 1$, so würde nach Satz 6.26 eine nichtnegative Eigenfunktion $f \in \mathcal{T}_{N-1}$ von $\tilde{T}_{|P_0|^2}$ zum Eigenwert $\tau = 4$

existieren. Diese liefert dann die Eigenfunktion

$$g(\omega) = \frac{2 - e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{4} f(\omega) \geq 0$$

zum Eigenwert 1 des Operators $\tilde{T}_{|P|^2}$. Die konstante Funktion $e_0 \equiv 1$ ist wegen (6.23) ebenfalls eine Eigenfunktion zum Eigenwert 1. Setzen wir $B = \|g\|_\infty > 0$, so ist

$$h := e_0 - g/B \geq 0$$

eine weitere nichtnegative Eigenfunktion zum Eigenwert 1. Weiterhin ist $h(0) = 1$ und $h(\omega_0) = 0$ für ein $\omega_0 \in (0, 2\pi)$. Dies liefert schließlich $\tilde{T}_{|P|^2}^k(\omega_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zur Primitivität, siehe Bemerkung 6.28. Also muss $\tau/4 < 1$ gelten. Damit ist nachgewiesen, dass 1 einfacher Eigenwert von $\tilde{T}_{|P|^2}$ ist und alle anderen Eigenwerte vom Betrag kleiner als 1 sind.

b) \implies c) wurde bereits in Satz 6.21 gezeigt und c) \implies d) ist trivial.

d) \implies a): Nun gelte $\|\phi\|_2 = 1$. Nach Satz 6.21(a) konvergiert der Kaskadenalgorithmus für jede Startfunktion $\varphi \in \mathcal{M}$ schwach gegen ϕ . Aus der punktweisen Konvergenz $\hat{\varphi}_n \rightarrow \hat{\phi}$ folgt mit Fatou's Lemma

$$(6.28) \quad 2\pi = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}_n(\omega)|^2 d\omega = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} [\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n](\omega) d\omega.$$

Wir nehmen nun an, Cohen's Bedingung sei verletzt. Weil P keine symmetrischen Nullstellenpaare haben kann, muss ein Zyklus $\omega_0, \dots, \omega_\ell \in (0, 2\pi)$ aus paarweise verschiedenen Zahlen existieren mit

$$\omega_{k+1} = 2\omega_k \pmod{2\pi}, \quad 0 \leq k \leq \ell - 1, \quad \omega_0 = 2\omega_\ell \pmod{2\pi}$$

und $P(\omega_k + \pi) = 0$ für $0 \leq k \leq \ell$, $\ell \geq 1$. Wir können eine Funktion $\varphi \in \mathcal{M}$ so wählen, dass für $f = [\hat{\varphi}, \hat{\varphi}]$ gilt:

- $0 \leq f \leq 1$,
 - $f(\omega_k) = 0$ für alle $0 \leq k \leq \ell$.
- (Dies geht z.B. so: Jeder Zyklus besteht aus rationalen Vielfachen von 2π . Ist K der Hauptnenner, so erfüllt die Funktion $\varphi = \frac{1}{K} \chi_{[0, K)}$ die Bedingungen $\hat{\varphi}(0) = 1$ und $\hat{\varphi}(2\pi m/K) = 0$ für alle $m \neq 0$. Also ist $\varphi \in \mathcal{M}_0$ und $f(\omega_k) = 0$. Durch Vergleich mit der Funktion $\eta = \chi_{[0, 1)}$ ergibt sich $f \leq [\hat{\eta}, \hat{\eta}] = 1$.)

Dann ist

$$f_n := [\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n] = T_{|P|^2}^n f \leq 1$$

und für hinreichend großes n gilt $f_n \in \mathcal{T}_N$. Die Nullstellen von P ergänzen sich mit den Nullstellen von f und ergeben die Relation

$$f_n(\omega_k) = 0, \quad 0 \leq k \leq \ell, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit erhalten wir einen Widerspruch zu (6.28), denn für das trigonometrische Polynom f vom Grad N mit Nullstellen in $(0, 2\pi)$ und Werten $0 \leq f \leq 1$ ist

$$\int_0^{2\pi} f_n(\omega) d\omega < 2\pi - c_N.$$

Die Konstante $c_N > 0$ hängt nur von N ab (siehe z.B. die Bernstein-Ungleichung für trigonometrische Polynome). \square

Wir haben bewiesen, dass aus $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \equiv 1$ bereits die starke Konvergenz des Kaskadenalgorithmus (für alle $\varphi \in \mathcal{M}_0$) folgt. Auch ohne die Bedingung (6.23) kann eine solche Aussage gezeigt werden. Zur Erinnerung: die \mathbb{Z} -Shifts von ϕ bilden eine Riesz-Basis von V_0 , falls Konstanten $A, B > 0$ existieren mit $A \leq [\hat{\phi}, \hat{\phi}] \leq B$. Für ein trigonometrisches Polynom $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \in \mathcal{T}_N$ ist dies äquivalent zur strikten Positivität $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] > 0$.

SATZ 6.30. *Gegeben sei das trigonometrische Polynom*

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k e^{-ik\omega}$$

mit $P(0) = 1$, $P(\pi) = 0$ und P besitze keine symmetrischen Nullstellen. Weiterhin konvergiere der Kaskadenalgorithmus für alle $\varphi \in \mathcal{M}$ schwach gegen ϕ . Dann sind äquivalent:

- a) P erfüllt Cohen's Bedingung.
- b) Es gilt $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] > 0$.

Unter einer (und damit beiden) dieser Zusatzvoraussetzungen konvergiert der Kaskadenalgorithmus für alle $\varphi \in \mathcal{M}_0$ stark gegen ϕ .

Beweis: a) \implies b): Wegen $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ ist die Funktion $e_\phi := [\hat{\phi}, \hat{\phi}] \in \mathcal{T}_N$ eine Eigenfunktion von $\tilde{T}|_{P|_2}$ zum Eigenwert 1. Aus Cohen's Bedingung und Bemerkung 6.28 folgt $e_\phi(\omega) > 0$ für alle $\omega \in (0, 2\pi)$. Weiter ist $e_\phi(0) \geq |\hat{\phi}(0)|^2 = 1$, also $e_\phi > 0$.

b) \implies a): Der Beweis wird ähnlich wie der zu Satz 6.29 geführt. Es gelte $e_\phi := [\hat{\phi}, \hat{\phi}] > 0$. Nach Voraussetzung konvergiert der Kaskadenalgorithmus für jede Startfunktion $\varphi \in \mathcal{M}$ schwach gegen ϕ . Wie in (6.28) folgt mit Fatou's Lemma

$$(6.29) \quad \int_0^{2\pi} e_\phi(\omega) d\omega \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} [\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n](\omega) d\omega.$$

Wir nehmen nun an, Cohen's Bedingung sei verletzt. Da P nach Voraussetzung keine symmetrischen Nullstellenpaare hat, können wir wieder einen Zyklus $\omega_0, \dots, \omega_\ell \in (0, 2\pi)$ und eine Funktion $\eta \in \mathcal{M}$ so wählen, dass für $g = [\hat{\eta}, \hat{\eta}]$ gilt:

- $0 \leq g \leq 1$,
- $g(\omega_k) = 0$ für alle $0 \leq k \leq \ell$.

Das Riesz-Fejer Lemma (Beweis im nächsten Abschnitt) erlaubt uns, ein trigonometrisches Polynom

$$t(\omega) = \sum_{k=0}^N a_k e^{-ik\omega}, \quad a_k \in \mathbb{R},$$

zu wählen mit $|t(\omega)|^2 = e_\phi(\omega)/e_\phi(0)$ und $t(0) = 1$. Die Funktion

$$\varphi = \sum_{k=0}^N a_k \eta(\cdot - k)$$

hat kompakten Träger und erfüllt $\hat{\varphi}(0) = t(0)\hat{\eta}(0) = 1$, also $\varphi \in \mathcal{M}$. Weiterhin gilt

$$f := [\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] = |t|^2 g = e_\phi g \leq e_\phi$$

und $f(\omega_k) = 0$ für alle $0 \leq k \leq \ell$. Die Monotonie des Operators $T_{|P|^2}$ ergibt

$$f_n := [\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n] = T_{|P|^2}^n f \leq e_\phi$$

und es gilt $f_n(\omega_k) = 0$ für alle $0 \leq k \leq \ell$. Weil f_n für hinreichend großes n in \mathcal{T}_N liegt und $e_\phi > 0$ vorausgesetzt ist, erhalten wir einen Widerspruch zu (6.28). Damit ist die Äquivalenz a) \iff b) bewiesen.

Wir zeigen nun noch, dass a) und b) die starke Konvergenz liefern. P erfüllt nach der Voraussetzung die Summenregeln, und die Voraussetzung der schwachen Konvergenz ergibt, dass der Spektralradius von $\tilde{T}_{|P|^2}$ wieder $\rho = 1$ ist. Würde $\tilde{T}_{|P|^2}$ nicht die Spektraleigenschaft in Satz 6.14(b) besitzen, so hätten wir wie im Beweis von Satz 6.29 eine nichtnegative Eigenfunktion $g \in \mathcal{T}_N$ zum Eigenwert 1 mit $g(0) = 0$. Wegen $e_\phi > 0$ können wir $B > 0$ so wählen, dass

$$h := e_\phi - g/B \geq 0$$

eine Eigenfunktion zum Eigenwert 1 mit einer Nullstelle in $(0, 2\pi)$ ist. Dies ergibt wie im Beweis von Satz 6.29 den Widerspruch zu Cohen's Bedingung (Primitivität).

□

BEISPIEL 6.31. *Wir betrachten das Skalierungssymbol der Daubechies-Skalierungsfunktion ψ_2 (für ein Wavelet ψ_2 mit $m = 2$ verschwindenden Momenten)*

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{1}{8}((1 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})e^{-i\omega} + (3 - \sqrt{3})e^{-i2\omega} + (1 - \sqrt{3})e^{-i3\omega}) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} ((1 + \sqrt{3}) + 2e^{-i\omega} + (1 - \sqrt{3})e^{-i2\omega}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^2 ((1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})e^{-i\omega}). \end{aligned}$$

P erfüllt Cohen's Bedingung, also ist der eingeschränkte Transfer-Operator $\tilde{T}_{|P_2|^2}$ auf \mathcal{T}_1 zum Teilsymbol $P_2(\omega) = \frac{1}{2}((1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})e^{-i\omega})$ unzerlegbar.

- Der eingeschränkte Transfer-Operator $\tilde{T}_{|P_2|^2}$ hat die Eigenwerte 4 (einfach) mit der Eigenfunktion $f_1 \equiv 1$ und -1 (doppelt, nicht entartet). Der Kaskadenalgorithmus zu P_2 konvergiert weder schwach noch stark.
- Der eingeschränkte Transfer-Operator $\tilde{T}_{|P_1|^2}$ auf \mathcal{T}_2 zum Teilsymbol $P_1(\omega) = \frac{1}{4}((1 + \sqrt{3}) + 2e^{-i\omega} + (1 - \sqrt{3})e^{-i2\omega})$ hat die Eigenwerte 1 (doppelt und entartet) mit nur einer Eigenfunktion $f_1(\omega) = 2 - e^{i\omega} - e^{-i\omega}$, $1/2$ (einfach) und $-1/4$ (doppelt, nicht entartet). Da der Kaskadenalgorithmus nicht stark konvergiert (1 ist doppelter Eigenwert), aber P_1 Cohen's Bedingung und $P_1(0) = 0$ erfüllt, kann nach Satz 6.30 auch keine schwache Konvergenz vorliegen. Dies belegt, dass der doppelte Eigenwert 1 entartet sein muss!
- Der eingeschränkte Transfer-Operator $\tilde{T}_{|P|^2}$ auf \mathcal{T}_3 hat die Eigenwerte 1 (einfach) mit Eigenfunktion $f_1 \equiv 1$, $1/2$ (einfach), $1/4$ (doppelt und entartet), $1/8$ und $-1/16$ (doppelt, nicht entartet). Hier liegt also starke Konvergenz des Kaskadenalgorithmus vor. Dies ist auch ohne die Berechnung der Eigenwerte festzustellen: P erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 6.29 und Cohen's

Bedingung. Insbesondere stellt man also fest, dass die \mathbb{Z} -Shifts von ϕ_2 ein ONS bilden.

Das Spektrum des Operators $\tilde{T}_{|P|^2}$ verrät sogar noch mehr über die Funktion ϕ . Wir wissen bereits, dass die Differenzierbarkeit von ϕ (mit $\phi' \in L^2(\mathbb{R})$) ein gewisses Abklingverhalten der Fourier-Transformierten $\hat{\phi}$ bewirkt. Als "Glattheitsräume" werden häufig die Sobolev-Räume

$$H_2^\alpha(\mathbb{R}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}); \int_{\mathbb{R}} (1 + |\omega|^2)^\alpha |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega < \infty\}, \quad \alpha > 0,$$

verwendet. Typische sogenannte "Einbettungssätze" der Form

$$H_2^{r+1/2+\epsilon}(\mathbb{R}) \subset C^r(\mathbb{R})$$

liefern einen Zusammenhang zur üblichen Differenzierbarkeit von Funktionen. Wir bezeichnen den Wert

$$\beta = \beta(\phi) = \sup\{\alpha \geq 0; \phi \in H_2^\alpha(\mathbb{R})\}$$

als den *Sobolev-Exponenten* der Funktion ϕ . Dieser läßt sich genau bestimmen! Ohne Beweis zitieren wir die folgende Aussage von T. Eirola³.

SATZ 6.32. *Gegeben sei das trigonometrische Polynom*

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=N_1}^{N_2} p_k e^{-ik\omega} = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2}\right)^m P_0(\omega),$$

wobei $m \in \mathbb{N}$ und P_0 ein trigonometrisches Polynom mit $P_0(0) = 1$, $P_0(\pi) \neq 0$ ist. Ist τ der Spektralradius von $\tilde{T}_{|P_0|^2}$ und $\tau < 4^m$, so gilt

$$\beta(\phi) \geq m - \log_4 \tau.$$

Falls P Cohen's Bedingung erfüllt, gilt sogar Gleichheit und $\phi \notin H_2^{\beta(\phi)}$.

5. Die Daubechies Skalierungsfunktionen

Ingrid Daubechies gelang Ende der 1980'er Jahre die Konstruktion orthogonaler Wavelets mit kompaktem Träger und beliebig hoher Glattheit. Das Kernstück ist dabei die Konstruktion von Skalierungssymbolen

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N p_k e^{-ik\omega} = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2}\right)^L P_0(\omega),$$

die die Orthogonalitätsrelation

$$|P(\omega)|^2 + |P(\omega + \pi)|^2 \equiv 1$$

erfüllen. Hierbei ist, wie zuvor, $L \in \mathbb{N}$ und P_0 ist ein trigonometrisches Polynom mit $P_0(0) = 1$, $P_0(\pi) \neq 0$. Es wird sich herausstellen, dass $N = 2L - 1$ der kleinstmögliche Grad eines solchen Symbols P ist.

³Timo Eirola, Sobolev characterization of solutions of dilation equations, Siam J. Math. Anal. **23** (1992), 1015–1030

Zur Vereinfachung setzen wir $x = \sin^2(\omega/2)$. Also ist

$$|P(\omega)|^2 = (1-x)^L |P_0(\omega)|^2, \quad |P(\omega + \pi)|^2 = x^L |P_0(\omega + \pi)|^2.$$

Der folgende Hilfssatz liefert eine Lösung $R = |P|^2$ der Orthogonalitätsrelation.

HILFSSATZ 6.33. *Das trigonometrische Polynom $R \in \mathcal{T}_{2L-1}$ mit*

$$(6.30) \quad R(\omega) = \left(\frac{2 + e^{-i\omega} + e^{i\omega}}{4} \right)^L \sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} \left(\frac{2 - e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{4} \right)^k$$

erfüllt $R \geq 0$, $R(0) = 1$ und $R(\omega) + R(\omega + \pi) = 1$ für alle $\omega \in [0, 2\pi)$.

Beweis: Die Relation $R \geq 0$ folgt direkt aus der Definition. Mit $x = \sin^2(\omega/2) = \frac{2 - e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{4}$ hat das gegebene R die Form

$$R(\omega) = (1-x)^L \sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} x^k =: q(x).$$

Sofort erhält man $R(0) = q(0) = 1$ und $R(\pi) = q(1) = 0$. Weiterhin ist

$$R(\omega + \pi) = x^L \sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} (1-x)^k = q(1-x).$$

Das Polynom q vom Grad $2L-1$ ist ein Grundpolynom zur Hermite-Interpolation der Funktionswerte und ersten $L-1$ Ableitungen an den Stellen 0 und 1: Leicht zu berechnen ist $q(0) = 1$ und $q^{(\nu)}(1) = 0$ für alle $0 \leq \nu \leq L-1$. Weiterhin ergibt sich mit der Leibniz-Regel

$$\begin{aligned} q^{(\nu)}(0) &= \sum_{j=0}^{\nu} \binom{\nu}{j} (-1)^{\nu-j} \frac{L!}{(L-\nu+j)!} \frac{(L-1+j)!}{(L-1)!} \\ &= (-1)^{\nu} \nu! \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^j \binom{L}{\nu-j} \binom{L-1+j}{j} \\ &= (-1)^{\nu} \nu! \sum_{j=0}^{\nu} \binom{L}{\nu-j} \binom{-L}{j} = 0 \end{aligned}$$

für $1 \leq \nu \leq L-1$. Also gilt $q(x) + q(1-x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Der nächste Schritt besteht in der Ermittlung des trigonometrischen Polynoms P aus der angegebenen Funktion $R = |P|^2$. Weil R ein nichtnegatives Cosinus-Polynom ist (R reell, $R \geq 0$ und alle Koeffizienten von R sind reell), dient hierzu das Riesz-Fejér Lemma⁴.

HILFSSATZ 6.34. *(Lemma von Riesz und Fejér)*

Gegeben sei das trigonometrische Polynom

$$A(\omega) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega \geq 0$$

⁴siehe z.B. Polya, Szegő, Lehrbuch der Analysis 2, S. 82, Aufgabe 41

mit reellen Koeffizienten a_0, \dots, a_N und $a_N \neq 0$. Dann existiert ein trigonometrisches Polynom $B(\omega) = \sum_{k=0}^N b_k e^{-ik\omega}$ mit reellen Koeffizienten b_0, \dots, b_N , das

$$|B(\omega)|^2 = A(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

erfüllt.

Beweis. Wir bestimmen B nach der Methode der “spektralen Faktorisierung”. Zum trigonometrischen Polynom $A(\omega)$ definieren wir das algebraische Polynom

$$a(z) := \frac{z^N}{2} \left(a_0 + \sum_{k=1}^N a_k (z^k + z^{-k}) \right).$$

Für $z = e^{-i\omega}$ ist dann $A(\omega) = z^{-N} a(z)$. Wegen $a_N \neq 0$ ist $z = 0$ keine Nullstelle von a . Weil a reelle Koeffizienten besitzt und $a(z) = a(1/\bar{z})$ erfüllt, gilt: Mit z sind auch \bar{z} , $1/z$ und $1/\bar{z}$ Nullstellen von a (wobei manche dieser Werte zusammenfallen können). Wegen $z^{-N} a(z) \geq 0$ für alle $|z| = 1$ ist die Ordnung aller Nullstellen z auf dem Einheitskreis jeweils gerade. Also hat a die Gestalt

$$a(z) = \alpha (z-1)^{2n_1} (z+1)^{2n_2} \prod_{k=1}^{n_3} (z-r_k)(1-zr_k) \prod_{k=1}^{n_4} (z-e^{i\theta_k})^{2\alpha_k} (z-e^{-i\theta_k})^{2\alpha_k} \prod_{k=1}^{n_5} (z-z_k)(z-\bar{z}_k)(1-zz_k)(1-z\bar{z}_k),$$

wobei $r_k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $\theta_k \in (0, 2\pi) \setminus \{p\pi\}$, $z_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $|z_k| \neq 1$ Nullstellen von a sind und der Koeffizient α reell ist. Wir können nun ein Polynom b vom Grad N durch Auswahl der Hälfte der Nullstellen von a so bestimmen, dass b reelle Koeffizienten hat und $z^N b(z)b(1/z) = a(z)$ erfüllt. Dazu setzen wir

$$b(z) = \gamma (z-1)^{n_1} (z+1)^{n_2} \prod_{k=1}^{n_3} (z-r_k) \prod_{k=1}^{n_4} (z-e^{i\theta_k})^{\alpha_k} (z-e^{-i\theta_k})^{\alpha_k} \prod_{k=1}^{n_5} (z-z_k)(z-\bar{z}_k)$$

mit geeignetem $\gamma \in \mathbb{R}$. Die Monom-Darstellung $b(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^k$ mit reellen Koeffizienten liefert schließlich das gesuchte trigonometrische Polynom $B(\omega) = \sum_{k=0}^N b_k e^{-ik\omega}$, denn mit $z = e^{-i\omega}$ gilt

$$|B(\omega)|^2 = b(z)b(1/z) = z^{-N} a(z) = A(\omega).$$

□

BEMERKUNG 6.35. Die Auswahl der Nullstellen zur Definition von b im obigen Beweis ist nicht eindeutig. Manchmal wählt man den “minimal-phasigen” Filter, indem alle reellen und komplexen Nullstellen außerhalb des Einheitskreises verwendet werden. Dies war der ursprüngliche Vorschlag von Daubechies und führt von dem trigonometrischen Polynom $R = R_L$ aus Hilfssatz 6.33 zu den Daubechies-Filtern (in Matlab durch `dbL` bezeichnet). Nachträglich wurden andere Kombinationen der Nullstellen ausgewählt, die zu “symmetrischeren” Koeffizientenfolgen b_k führen. Ausgehend von derselben Funktion R_L erhält man so die “Symmlet-Filter” (in Matlab durch `symL` bezeichnet).

BEISPIEL 6.36. Wir führen die Schritte für $L = 2$ aus. Die Funktion $R = R_2$ in Hilfssatz 6.33 ist

$$R(\omega) = \left(\frac{2 + e^{-i\omega} + e^{i\omega}}{4} \right)^2 \left(1 + \frac{2 - e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{2} \right) = \left| \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right|^4 \frac{4 - e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{2}.$$

Wir verwenden das Riesz-Fejér Lemma nur für den Bruch. Das quadratische Polynom $a(z) = (4z - 1 - z^2)/2$ hat die Nullstellen $r_1 = 2 - \sqrt{3}$ und $r_1^{-1} = 2 + \sqrt{3}$. Der minimal-phasige Faktor ist $b(z) = \gamma(z - (2 + \sqrt{3}))$ mit $\gamma = -\sqrt{1 - \sqrt{3}}/2 = (1 - \sqrt{3})/2$. Als Skalierungssymbol ergibt sich

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^2 \left(\frac{(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})e^{-i\omega}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left((1 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})z + (3 - \sqrt{3})z^2 + (1 - \sqrt{3})z^3 \right). \end{aligned}$$

Die Konvergenzeigenschaften des Kaskadenalgorithmus wurden schon in Beispiel 6.31 ausgeführt. Die resultierende Funktion ϕ hat orthogonale \mathbb{Z} -Shifts.

Die Untersuchung der Konvergenz der Daubechies- (und Symmet-) Filter stützt sich auf die Spektraleigenschaften des eingeschränkten Transfer-Operators zum trigonometrischen Polynom

$$R_L(\omega) = |P_L(\omega)|^2 = \left(\frac{2 + e^{-i\omega} + e^{i\omega}}{4} \right)^L \sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} \left(\frac{2 - e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{4} \right)^k$$

das für jedes $L \in \mathbb{N}$ in Hilfssatz angegeben wurde. Offensichtlich ist $\omega = \pi$ die einzige Nullstelle von R_L . Also gilt Cohen's Bedingung, und Satz 6.29 liefert sofort die starke Konvergenz des Kaskadenalgorithmus für alle Startfunktionen $\varphi \in \mathcal{M}_0$ gegen die Skalierungsfunktion $\phi = \phi_L$. Weiterhin können wir schließen, dass die \mathbb{Z} -Shifts der Funktion ϕ_L ein ONS bilden.

Um die Glattheit (bzw. den Sobolev-Exponenten) von ϕ_L zu bestimmen, muss noch der Spektralradius des eingeschränkten Transfer-Operators zum Teilpolynom

$$S_L(\omega) = \sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} \left(\frac{2 - e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{4} \right)^k$$

ermittelt werden. Für kleine Werte von L gibt Tabelle 6.1 die exakten Werte des Sobolev-Exponenten in Satz 6.32. In der letzten Zeile der Tabelle wird außerdem der entsprechende Koeffizient der Hölder-Stetigkeit von ϕ_L angegeben, also

$$\tilde{\beta}_L = \tilde{\beta}(\phi_L) = \sup\{\alpha \geq 0; \phi \in \text{Lip}^\alpha(\mathbb{R})\}.$$

Für beliebiges L kann zumindest eine scharfe asymptotische Aussage gezeigt werden. Dazu wird direkt die Fourier-Transformierte $\hat{\phi}_L$ abgeschätzt. Das folgende Resultat wird im Buch von Louis, Maass und Rieder bewiesen (Satz 2.4.37).

SATZ 6.37. Der kritische Sobolev-Exponent β_L und Hölder-Exponent $\tilde{\beta}_L$ erfüllen

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\beta_L}{L} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\beta}_L}{L} = 1 - \log_4 3 \approx 0.20752.$$

ϕ_L	$L = 1$	$L = 2$	$L = 3$	$L = 4$	$L = 5$
β_L	0.5	1	1.415...	1.775...	2.096...
$\tilde{\beta}_L$		0.550...	1.088...	1.618...	1.596...

TABELLE 6.1. Glattheit der Daubechies-Skalierungsfunktionen

Wavelet-Transformation in der Signal- und Bildverarbeitung

Wir wollen nun darstellen, wie die Wavelet-Transformation in der Signal- und Bildverarbeitung eingesetzt wird. Hierzu sind zunächst einige Modifikationen notwendig, da die gegebenen "Funktionen" f nun diskrete Definitions- (und Werte-)bereiche haben und auf einem endlichen Intervall vorliegen. Als Modelle verwenden wir Funktionen

$$f : I_N \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{für Signale}$$

oder

$$f : I_M \times I_N \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{für Bilder,}$$

wobei $M, N \in \mathbb{N}$ und $I_N = \{k/N; k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq k < N\}$ gilt. Man kann f als diskrete Funktion auf dem Intervall $[0, 1)$ bzw. dem Quadrat $[0, 1)^2$ ansehen. Als Notation verwenden wir $f[k/N]$ für die diskreten Funktionsauswertungen. Für praktische Zwecke sind M, N oft Zweierpotenzen.

1. Wavelets für unendliche Signale

Analog zu den Methoden aus Kapitel 6 wollen wir diskrete Wavelet-Basen für den Hilbertraum

$$\ell^2(N^{-1}\mathbb{Z}) = \left\{ f : N^{-1}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}; N^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f[k/N]|^2 < \infty \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := N^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k/N] \overline{g[k/N]}$$

definieren. Der Faktor N^{-1} soll dabei den Zeitabstand der Diskretisierungspunkte angeben (also ist N die Abtastrate pro Zeiteinheit). Das Skalarprodukt ist in Anlehnung an den kontinuierlichen Fall so definiert, dass es die Form einer Riemann-Summe hat. Die Skalierungsfunktionen und Wavelets sind als Funktionen auf $N^{-1}\mathbb{Z}$ zu betrachten. Von nun an sei $N = 2^J$ und $J \in \mathbb{N}$.

Gegeben seien die Skalierungssymbole

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N p_k e^{-ik\omega}, \quad Q(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=-N+1}^1 q_k e^{-ik\omega},$$

wobei $q_k = (-1)^k \overline{p_{1-k}}$ und

$$|P(\omega)|^2 + |P(\omega + \pi)|^2 = 1, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

vorausgesetzt werden. Mit $p = (p_k)$, $q = (q_k)$ bezeichnen wir die Koeffizientenfolgen und mit $\uparrow_{2^\ell} p$, $\uparrow_{2^\ell} q$ die entsprechenden Folgen nach dem Upsampling mit dem Faktor 2^ℓ (Einfügen von jeweils $2^\ell - 1$ Nullen). Wir definieren die Funktionen $\phi_j, \psi_j : N^{-1}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $j < J$, und ϕ_J rekursiv über diskrete Faltung

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \phi_J[k/N] &= \begin{cases} 2^{J/2} & \text{für } k = 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\ \phi_j[k/N] &= 2^{-1/2} (\uparrow_{2^{J-1-j}} p) * \phi_{j+1}[k/N] \\ &= 2^{-1/2} \sum_{\ell=0}^N p_\ell \phi_{j+1}[(k - 2^{J-1-j}\ell)/N], \\ \psi_j[k/N] &= 2^{-1/2} (\uparrow_{2^{J-1-j}} q) * \phi_{j+1}[k/N] \\ &= 2^{-1/2} \sum_{\ell=-N+1}^1 q_\ell \phi_{j+1}[(k - 2^{J-1-j}\ell)/N]. \end{aligned}$$

Man beachte, dass auf der rechten Seite die Funktionen $\phi_{j+1}[(k - 2^{J-1-j}\ell)/N]$ gerade die $2^{-j-1}\mathbb{Z}$ -Shifts von ϕ_{j+1} sind. Die Definitionen entsprechen genau den Skalierungsgleichungen (5.5) und (5.16) im kontinuierlichen Fall. Bezeichnet man mit

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k/N] e^{-ik\omega}$$

die (diskrete) Fourier-Transformierte, so gilt

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_j(\omega) &= 2^{-j/2} \prod_{r=0}^{J-1-j} P(2^r \omega), \\ \hat{\psi}_j(\omega) &= 2^{-j/2} Q(2^{J-1-j} \omega) \prod_{r=0}^{J-2-j} P(2^r \omega). \end{aligned}$$

BEMERKUNG 7.1. *Stellt man die diskrete Funktion ϕ_j durch einen Polygonzug dar, so erhält man (bis auf die Normierung) die Iterierten des Kaskaden-Algorithmus zur Startfunktion $\varphi = N_2$ (linearer zentrierter B-Spline). Unter geeigneten Bedingungen an P (u.a. Cohen's Bedingung) konvergieren $\phi_j[k/N]$ und $\psi_j[k/N]$ rasch gegen die Werte der kontinuierlichen Funktionen $2^{j/2}\phi(2^j k/N)$ bzw. $2^{j/2}\psi(2^j k/N)$ aus Kapitel 6.*

Eine direkte Beziehung zwischen diskreten und kontinuierlichen Skalierungsfunktionen bzw. Wavelets ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \phi_j(x) &= N^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi_j[k/N] \phi_J(x - k/N), \quad j \leq J, \\ \psi_j(x) &= N^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_j[k/N] \phi_J(x - k/N), \quad j < J, \end{aligned}$$

wobei wir für die kontinuierlichen Funktionen die runden Klammern verwenden. Die diskreten Funktionen sind also die Koeffizientenfolgen der kontinuierlichen

Funktionen (bis auf Normierung) in der Darstellung zur festen Basis $\{\phi_J(\cdot - k/N; k \in \mathbb{Z})\}$ von V_J .

ÜBUNG 7.2. Verwenden Sie die Matlab-Funktion `upcoef` zur Darstellung der diskreten Funktionen ϕ_j und ψ_j , $0 \leq j < 7$, für $N = 128$ und Skalierungssymbole

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{1}{8}((1 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})e^{-i\omega} + (3 - \sqrt{3})e^{-i2\omega} + (1 - \sqrt{3})e^{-i3\omega}) \\ P(\omega) &= \frac{1 + e^{-i3\omega}}{2}. \end{aligned}$$

Entsprechend den Bezeichnungen im kontinuierlichen Fall ziehen wir die $2^{-j}\mathbb{Z}$ -Shifts von ϕ_j und ψ_j zur Konstruktion einer Orthonormalbasis heran. Ein solcher Shift ist in unserer Notation gegeben durch $\phi_j[(n - 2^{J-j}k)/N] = \phi_j[n/N - 2^{-j}k]$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $j \leq J$.

SATZ 7.3. Für jedes $L < J$ bilden die diskreten Funktionen

$$(7.2) \quad \{\phi_L[\cdot - 2^{-L}k]; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_j[\cdot - 2^{-j}k]; k \in \mathbb{Z}, L \leq j < J\}$$

eine Orthonormalbasis von $\ell^2(N^{-1}\mathbb{Z})$.

Zu einer gegebenen Funktion $f \in \ell^2(N^{-1}\mathbb{Z})$ seien nun

$$\begin{aligned} a_j[k2^{-j}] &= \langle f, \phi_j[\cdot - 2^{-j}k] \rangle, \\ d_j[k2^{-j}] &= \langle f, \psi_j[\cdot - 2^{-j}k] \rangle \end{aligned}$$

definiert. Man beachte, dass hierdurch diskrete Funktionen auf der Menge $2^{-j}\mathbb{Z}$, $j \leq J$, definiert sind, also eine ‘‘Ausdünnung’’ stattfindet. Dann lassen sich a_{j-1} und d_{j-1} genau wie im kontinuierlichen Fall aus a_j berechnen. Wie in (5.33) und (5.34) gilt

$$(7.3) \quad a_{j-1}[k2^{-j+1}] = 2^{-1/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{p_{\ell-2k}} a_j[\ell 2^{-j}]$$

$$(7.4) \quad d_{j-1}[k2^{-j+1}] = 2^{-1/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{q_{\ell-2k}} a_j[\ell 2^{-j}]$$

Umgekehrt ergibt sich a_j aus a_{j-1} und d_{j-1} wie in (5.36) als

$$a_j[k 2^{-j}] = 2^{-1/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (p_{k-2\ell} a_{j-1}[\ell 2^{-j+1}] + q_{k-2\ell} d_{j-1}[\ell 2^{-j+1}]).$$

Man erkennt also, dass die Entwicklung diskreter Wavelets eigentlich nur eine weitere Beschreibung der Perfect Reconstruction Filter Bank in Bild 5.1 ist.

Zu erwähnen ist noch, dass die diskreten Wavelets verschwindende Momente

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^\nu \psi_j[k/N] = 0, \quad 0 \leq \nu \leq m-1,$$

besitzen, falls P eine m -fache Nullstelle bei π besitzt. Dies führt wie im kontinuierlichen Fall zu kleinen Wavelet-Koeffizienten, falls die diskrete Funktion f Abtastung einer m -mal stetig differenzierbaren Funktion ist. Denn dann entspricht das innere

Produkt $\langle f, \psi_j \rangle$ einer Linearkombination m -ter vorwärtsgenommener Differenzen zur Schrittweite $h = 1/N$,

$$\langle f, \psi_j \rangle = \sum_k c_k \Delta_h^m f[k/N] = \mathcal{O}(h^m).$$

2. Wavelets für endliche Signale

In Anwendungen ist meist ein endliches diskretes Signal $f : I_N \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben. Wie oben ist $I_N = \{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\} \subset [0, 1)$. Falls die diskrete Funktion $\phi_j[\cdot - 2^{-j}k]$ bzw. $\psi_j[\cdot - 2^{-j}k]$ ihren Träger ganz in I_N hat, stimmt das innere Produkt

$$\begin{aligned} a_j[k2^{-j}] &= \langle f, \phi_j[\cdot - 2^{-j}k] \rangle_{I_N}, \\ d_j[k2^{-j}] &= \langle f, \psi_j[\cdot - 2^{-j}k] \rangle_{I_N} \end{aligned}$$

mit dem über $N^{-1}\mathbb{Z}$ überein. Man bezeichnet solche Wavelets $\psi_j[\cdot - 2^{-j}k]$ als die “inneren” Wavelets zur Menge I_N . Nur am Rand von I_N (also für k nahe 0 und 2^j) müssen die Werte $a_j[k2^{-j}]$ und $d_j[k2^{-j}]$ durch eine sinnvolle Fortsetzung von f außerhalb des Intervalls definiert werden. Dies lässt sich auch durch die Einführung von “Rand-Wavelets” beschreiben. Hierzu gibt es im wesentlichen 4 Strategien.

2.1. Zero-Padding. Man definiert das durch Nullen fortgesetzte Signal

$$f_0[k/N] = \begin{cases} f[k/N], & 0 \leq k < N, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und berechnet die Wavelet-Zerlegung von f_0 über $N^{-1}\mathbb{Z}$. Dieses Vorgehen entspricht der Verwendung des Matlab-Befehls `conv` für alle diskreten Faltungen zur Berechnung der Folgen a_j und d_j im Zerlegungs-Algorithmus. Falls f keine homogenen Randbedingungen $f[0] = f[1] = 0$ erfüllt, führt dies aber zu großen Wavelet-Koeffizienten nahe am Rand, da dann “Unstetigkeit” des (diskreten) Signals am Rand vorliegt.

Dieses Vorgehen lässt sich auch beschreiben, indem man als Rand-Wavelets die abgeschnittenen diskreten Funktionen $\psi_j[\cdot - 2^{-j}k]|_{I_N}$ verwendet, denn

$$\langle f_0, \psi_j[\cdot - 2^{-j}k] \rangle_{N^{-1}\mathbb{Z}} = \langle f, \psi_j[\cdot - 2^{-j}k]|_{I_N} \rangle_{I_N}.$$

Da die Rand-Wavelets i.a. kein verschwindendes Moment mehr besitzen, werden die Wavelet-Koeffizienten am Rand besonders groß sein.

2.2. Periodisierung. Zu $f : I_N \rightarrow \mathbb{R}$ und f_0 wie oben definiert man das 1-periodische Signal

$$f^{\text{per}}[k/N] = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f_0[k/N + \ell], \quad k \in \mathbb{Z},$$

und berechnet die Wavelet-Zerlegung von f^{per} . Dieses Vorgehen entspricht der Berechnung der diskreten Faltungen zur Wavelet-Zerlegung mit der FFT. Es führt ebenfalls zu großen Wavelet-Koeffizienten nahe am Rand, falls die gegebenen Daten gar nicht periodisch sind.

Zur Interpretation dieses Vorgehens durch die Einführung von Rand-Wavelets beachte man, dass

$$\langle f^{\text{per}}, \psi_j[\cdot - 2^{-j}k] \rangle_{N^{-1}\mathbb{Z}} = \langle f, \psi_j^{\text{per}}[\cdot - 2^{-j}k] \rangle_{I_N}$$

gilt, wobei durch

$$\psi_j^{\text{per}} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \psi_j[\cdot + \ell]$$

ein diskretes 1-periodisches Wavelet auf $N^{-1}\mathbb{Z}$ definiert ist. Die Einschränkung von $\psi_j^{\text{per}}[\cdot - 2^{-j}k]$ auf I_N stimmt mit $\psi_j[\cdot - 2^{-j}k]$ überein, falls der Träger dieser Funktion in I_N liegt (siehe Begriff des “inneren Wavelets”). Andernfalls entsteht ein Rand-Wavelet, dessen Träger zwei disjunkte Anteile nahe des Randes 0 und 1 von I_N hat. Insgesamt hat ψ_j^{per} zwar wieder m verschwindende Momente auf I_N ,

$$\sum_{k=0}^{N-1} k^\nu \psi_j^{\text{per}}[k/N] = 0, \quad 0 \leq \nu \leq m-1,$$

die einzelnen Teile am linken und rechten Rand haben i.a. jedoch kein verschwindendes Moment. Dies erklärt auf andere Weise, dass die Wavelet-Koeffizienten am Rand groß werden, falls f keine periodischen Randbedingungen erfüllt. Bemerkenswert ist noch die Eigenschaft, dass für $N = 2^J$ und alle $J > L \geq 0$ die Funktionen

$$\{\phi_L^{\text{per}}[\cdot - 2^{-L}k]; 0 \leq k < 2^L\} \cup \{\psi_j^{\text{per}}[\cdot - 2^{-j}k]; 0 \leq k < 2^j, L \leq j < J\}$$

eine Orthonormalbasis von $\ell^2(I_N)$ bilden.

ÜBUNG 7.4. *Beweisen Sie diese Aussage.*

2.3. Klappung (engl. folding). Zu $f : I_N \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man zunächst die gerade Fortsetzung

$$f_1[k/N] = \begin{cases} f[k/N], & 0 \leq k < N, \\ f[-k/N], & -N+1 \leq k < 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Meist setzt man noch $f[-N/N] = f[-(N-1)/N]$, um wieder eine Gesamtlänge von $2N = 2^{J+1}$ zu erhalten. Sodann definiert man das 2-periodische Signal

$$f^{\text{fold}}[k/N] = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f_1[k/N + 2\ell], \quad k \in \mathbb{Z},$$

und berechnet die Wavelet-Zerlegung von f^{fold} . Hierdurch wird zwar die vorher beschriebene “Unstetigkeit” bei $k = 0$ behoben, dennoch besitzt f^{fold} i.a. keine Glattheit höherer Ordnung (im kontinuierlichen Fall wäre die Funktion stetig, aber nicht differenzierbar bei $t = 0$). Also gibt es wieder relativ große Wavelet-Koeffizienten nahe am Rand.

Die Einführung von Rand-Wavelets wird durch

$$\langle f^{\text{fold}}, \psi_j[\cdot - 2^{-j}k] \rangle_{N^{-1}\mathbb{Z}} = \langle f, \psi_j^{\text{fold}}[\cdot - 2^{-j}k] \rangle_{I_N}$$

mit dem “geklappten” 2-periodischen Wavelet

$$\psi_j^{\text{fold}} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (\psi_j[\cdot - 2\ell] + \psi_j[2\ell - \cdot])$$

auf $N^{-1}\mathbb{Z}$ erzielt. Die Einschränkung von $\psi_j^{\text{fold}}[\cdot - 2^{-j}k]$ auf I_N stimmt wieder mit dem Wavelet $\psi_j[\cdot - 2^{-j}k]$ überein, falls der Träger dieser Funktion in I_N liegt. Gegenüber dem periodisierten Wavelet besteht der Vorteil, dass für die Rand-Wavelets jeweils eine Spiegelung des Trägers am Intervallende nach innen vorgenommen wird. Man vermeidet dadurch das Entstehen von zwei disjunkten Anteilen nahe des Randes 0 und 1 von I_N . Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass die Rand-Wavelets mindestens ein verschwindendes Moment besitzen. Jedoch liegen i.a. keine höheren verschwindenden Momente vor. Dies erklärt, dass die Wavelet-Koeffizienten am Rand wieder groß werden.

Falls p symmetrisch und N ungerade ist (also $p_{N-k} = p_k \in \mathbb{R}$ für $0 \leq k \leq N$ gilt), und falls zusätzlich $P(0) = 1$ und $|P(\omega)|^2 + |P(\omega + \pi)|^2 = 1$ für alle ω erfüllt ist, so bilden die Funktionen

$$(7.5) \quad \{\phi_L^{\text{fold}}[\cdot - 2^{-L}k]; 0 \leq k < 2^L\} \cup \{\psi_j^{\text{fold}}[\cdot - 2^{-j}k]; 0 \leq k < 2^j, L \leq j < J\}$$

wieder eine Orthonormalbasis von $\ell^2(I_N)$. Leider bleibt bei diesen Forderungen nur die Funktion $P = (1 + e^{-i\omega})/2$ (und einfache Abwandlungen hiervon) als Skalierungssymbol übrig. Um mehr Freiheit bei der Wahl von P zu erhalten, betrachtet man ein Paar (P, \tilde{P}) symmetrischer "biorthogonaler Skalierungssymbole" mit $P(0) = \tilde{P}(0) = 1$, $P(\pi) = \tilde{P}(\pi) = 1$ sowie

$$P(\omega)\overline{\tilde{P}(\omega)} + P(\omega + \pi)\overline{\tilde{P}(\omega + \pi)} = 1.$$

Definiert man wie üblich diskrete Skalierungsfunktionen $\phi_j, \tilde{\phi}_j$ und Wavelets $\psi_j, \tilde{\psi}_j$, so ergibt die Klappung ein Paar biorthogonaler Basen (7.5) und

$$\{\tilde{\phi}_L^{\text{fold}}[\cdot - 2^{-L}k]; 0 \leq k < 2^L\} \cup \{\tilde{\psi}_j^{\text{fold}}[\cdot - 2^{-j}k]; 0 \leq k < 2^j, L \leq j < J\}.$$

2.4. Rand-Wavelets mit verschwindenden Momenten. Die drei vorhergehenden Ansätze führen zu Rand-Wavelets auf $I_N \subset [0, 1)$, die weniger verschwindende Momente als die inneren Wavelets besitzen. Dadurch hat die Wavelet-Transformation am Rand des Intervalls schlechtere Qualität als im Inneren. Um auch am Rand die gleiche Qualität zu erreichen, werden nun zu einem Skalierungssymbol der Form

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=-m+1}^m p_k e^{-ik\omega} = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^m P_0(\omega)$$

und mit $|P(\omega)|^2 + |P(\omega + \pi)|^2 = 1$ Rand-Wavelets $\psi_{j,k}$ mit m verschwindenden Momenten so konstruiert, dass wieder eine ONB entsteht.

BEMERKUNG 7.5. Die Orthogonalitätsrelation erfordert $p_m p_{-m} = 0$, daher ist die Gesamtlänge der Koeffizientenfolge immer gerade, wie bei den Beispielen der Daubechies-Skalierungssymbole

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2m-1} p_k e^{-ik\omega}.$$

Man erhält die obige symmetrische Indizierung durch Verschiebung der Indizes von (p_k) . Dies entspricht dem gleichen \mathbb{Z} -Shift der kontinuierlichen Skalierungsfunktion ϕ . Mit dieser Vorgabe hat auch $q_k = (-1)^k \overline{p_{1-k}}$ diese symmetrische Indizierung (q_{-m+1}, \dots, q_m) .

Wir betrachten wieder die diskreten Skalierungsfunktionen $\phi_j[\cdot]$ und Wavelets $\psi_j[\cdot]$ aus (7.1) mit Definitionsbereich $N^{-1}\mathbb{Z}$, $N = 2^J$. Mit vollständiger Induktion nach $\ell \geq 0$ erhält man die Beziehungen

$$\phi_{J-\ell}[k/N] = 0, \quad \psi_{J-\ell}[k/N] = 0 \quad \text{für } |k| > (2^\ell - 1)m =: k_\ell.$$

Also ist der Träger der diskreten Funktionen

$$\phi_j[\cdot - k2^{-j}], \quad \psi_j[\cdot - k2^{-j}] \quad m \leq k < 2^j - m,$$

in I_N enthalten. Wir verlangen noch $j \geq L$ und $2^L > 2m$, damit dieser Indexbereich nicht leer ist. Die angegebenen Funktionen werden wieder als "innere" Skalierungsfunktionen und Wavelets beibehalten.

Wir kommen nun zur Konstruktion von jeweils m diskreten Skalierungsfunktionen und Wavelets am linken und rechten Rand,

$$\begin{aligned} \phi_{j,k}^{\text{left}}, \quad \psi_{j,k}^{\text{left}}, \quad & 0 \leq k \leq m-1, \\ \phi_{j,k}^{\text{right}}, \quad \psi_{j,k}^{\text{right}}, \quad & 2^j - m \leq k \leq 2^j - 1. \end{aligned}$$

Der Multiskalen-Raum \dot{V}_j (der Punkt soll auf den diskreten Fall hinweisen) wird definiert als

(7.6)

$$\dot{V}_j = \text{span} \left(\{\phi_{j,k}^{\text{left}}; 0 \leq k < m\} \cup \{\phi_j[\cdot - k2^{-j}]; m \leq k < 2^j - m\} \cup \{\phi_{j,k}^{\text{right}}; 2^j - m \leq k < 2^j\} \right).$$

Dabei bilden die angegebenen diskreten Funktionen ein ONS. Der Waveletraum \dot{W}_j ist wieder das orthogonale Komplement von \dot{V}_j in \dot{V}_{j+1} . Für die Verschachtelungseigenschaft $\dot{V}_j \subset \dot{V}_{j+1}$ machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} \phi_{j,k}^{\text{left}} &= 2^{-1/2} \left(\sum_{\ell=0}^{m-1} p_{k,\ell}^{\text{left}} \phi_{j+1,\ell}^{\text{left}} + \sum_{\ell=m}^{m+2k} p_{k,\ell}^{\text{left}} \phi_{j+1}[\cdot - \ell 2^{-j-1}] \right), \\ \phi_{j,2^j-1-k}^{\text{right}} &= 2^{-1/2} \left(\sum_{\ell=0}^{m-1} p_{k,\ell}^{\text{right}} \phi_{j+1,2^j-1-\ell}^{\text{right}} + \sum_{\ell=m}^{m+2k} p_{k,\ell}^{\text{right}} \phi_{j+1}[\cdot - (2^{j+1} - 1 - \ell) 2^{-j-1}] \right). \end{aligned}$$

Hierbei ist $0 \leq k < m$, und die zusätzlichen Koeffizienten $p_{k,\ell}^{\text{left}}$ und $p_{k,\ell}^{\text{right}}$ sollen nicht von der Skalierungsstufe j abhängen! Diese Einschränkung wird im Hinblick auf die Anwendung der Zerlegungs- und Rekonstruktions-Algorithmen gemacht.

An dieser Stelle muss man die Konstruktion kontinuierlicher Skalierungsfunktionen und Wavelets zu Rate ziehen. Ohne weiter hierauf einzugehen, halten wir fest, dass die verschwindenden Momente der diskreten Wavelets über eine Gewichtung am Rand definiert werden. Dies hat u.a. damit zu tun, dass die kontinuierlichen Skalierungsfunktionen am Rand nicht mehr das Integral 1 haben. Es wird dazu eine invertierbare Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} A^{\text{left}} & & \\ & I & \\ & & A^{\text{right}} \end{pmatrix}$$

mit $m \times m$ Dreiecks-Matrizen A^{left} und A^{right} sowie der Einheitsmatrix I der Länge $N - 2m$ spezifiziert. Die verschwindenden Momente der diskreten Rand-Wavelets

liegen dann in der Form

$$(\psi_{j,k}[\ell/N]; 0 \leq \ell < N)^T \cdot A \cdot (\ell^\nu; 0 \leq \ell < N) = 0, \quad 0 \leq \nu < m,$$

vor. Dies bedeutet für die praktische Anwendung folgendes: falls Daten der Form $f[k/N]$ vorliegen (z.B. durch Abtasten einer kontinuierlichen Funktion), berechnet man zuerst $a_j = A \cdot f$ und führt sodann den Zerlegungsalgorithmus aus. Die nach der Codierung und Rekonstruktion erhaltene diskrete Funktion \tilde{a}_j wird mittels $\tilde{f} = A^{-1} \cdot \tilde{a}_j$ in die Datenwerte zurücktransformiert. Die erste Multiplikation mit A wird als ‘Vorkonditionierung’ bezeichnet und beschreibt näherungsweise den Übergang von Abtastwerten $f[k/N]$ zu inneren Produkten $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$.

Explizite Lösungen wurden von Cohen, Daubechies und Vial¹ bestimmt. Für die Rand-Wavelets werden von j unabhängige Koeffizientenfolgen aus dem Ansatz

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}^{\text{left}} &= 2^{-1/2} \left(\sum_{\ell=0}^{m-1} q_{k,\ell}^{\text{left}} \phi_{j+1,\ell}^{\text{left}} + \sum_{\ell=m}^{m+2k} q_{k,\ell}^{\text{left}} \phi_{j+1}[\cdot - \ell 2^{-j-1}] \right), \\ \psi_{j,2^j-1-k}^{\text{right}} &= 2^{-1/2} \left(\sum_{\ell=0}^{m-1} q_{k,\ell}^{\text{right}} \phi_{j+1,2^j-1-\ell}^{\text{right}} + \sum_{\ell=m}^{m+2k} q_{k,\ell}^{\text{right}} \phi_{j+1}[\cdot - (2^j - 1 - \ell) 2^{-j-1}] \right) \end{aligned}$$

berechnet, so dass der Waveletraum \tilde{W}_j die Orthonormalbasis

$$(7.7) \quad \tilde{W}_j = \text{span} \left(\{ \psi_{j,k}^{\text{left}}; 0 \leq k < m \} \cup \{ \psi_j[\cdot - k 2^{-j}]; m \leq k < 2^j - m \} \cup \{ \psi_{j,k}^{\text{right}}; 2^j - m \leq k < 2^j \} \right)$$

erhält. Zu den Skalierungssymbolen von Daubechies mit $2 \leq m \leq 6$ verschwindenden Momenten sind die mit $2^{-1/2}$ multiplizierten Koeffizienten $p_{k,\ell}^{\text{left}}$, $p_{k,\ell}^{\text{right}}$ sowie $q_{k,\ell}^{\text{left}}$, $q_{k,\ell}^{\text{right}}$ als ‘double precision’ Dezimalzahlen tabelliert unter

<http://www.numerical-recipes.com/contrib/>

siehe auch Tabelle 7.1 für $m = 2$ und Mallat’s Buch, S. 290. Die obige Webseite enthält auch die Koeffizienten der Dreiecksmatrizen A^{left} und A^{right} . Z.B. ist für $m = 2$

$$\begin{aligned} A^{\text{left}} &= \begin{pmatrix} 0.324894048898962 & 0.0371580151158803 \\ 0 & 1.00144540498130 \end{pmatrix}, \\ A^{\text{right}} &= \begin{pmatrix} 1.08984305289504 & 0 \\ -0.800813234246437 & 2.09629288435324 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die schnelle Wavelet-Zerlegung und -Rekonstruktion wird analog zur üblichen Filterbank durchgeführt. Nur am Rand müssen die Berechnungen modifiziert werden. Z.B. erhalten wir am linken Rand für $0 \leq k \leq m - 1$ die Zerlegungsrelationen

$$\begin{aligned} a_{j-1}[k 2^{-j+1}] &= 2^{-1/2} \sum_{\ell=0}^{m+2k} p_{k,\ell}^{\text{left}} a_j[\ell 2^{-j}], \\ d_{j-1}[k 2^{-j+1}] &= 2^{-1/2} \sum_{\ell=0}^{m+2k} q_{k,\ell}^{\text{left}} a_j[\ell 2^{-j}]. \end{aligned}$$

¹A. Cohen, I. Daubechies, P. Vial, Wavelet bases on the interval and fast algorithms, Applied and Computational Harmonic Analysis 1 (1993), 54–81

	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$
$2^{-1/2}p_{0,\ell}^{\text{left}}$	0.603332511928053	0.690895531839104	-0.398312997698228		
$2^{-1/2}p_{1,\ell}^{\text{left}}$	0.0375174604524466	0.457327659851769	0.850088102549165	0.223820356983114	-0.129222743354319
$2^{-1/2}q_{0,\ell}^{\text{left}}$	-0.796543516912183	0.546392713959015	-0.258792248333818		
$2^{-1/2}q_{1,\ell}^{\text{left}}$	-0.0100372245644139	-0.122351043116799	-0.227428111655837	0.836602921223654	-0.483012921773304
$2^{-1/2}p_{0,\ell}^{\text{right}}$	0.870508753349866	0.434896997965703	0.230389043796969		
$2^{-1/2}p_{1,\ell}^{\text{right}}$	-0.194233407427412	0.190151418429955	0.374955331645687	0.767556669298114	0.443149049637559
$2^{-1/2}q_{0,\ell}^{\text{right}}$	0.257512919478482	-0.801422961990337	0.539822500731772		
$2^{-1/2}q_{1,\ell}^{\text{right}}$	0.371718966535296	-0.363906959570891	-0.717579999353722	0.401069519430217	0.231557595006790

TABELLE 7.1. Rand-Filter $2^{-1/2}p_{k,\ell}^{\text{left}}$ und $2^{-1/2}q_{k,\ell}^{\text{left}}$ zur Daubechies-Skalierungsfunktion mit 2 verschwindenden Momenten.

Ebenfalls am linken Rand erhalten wir modifizierte Rekonstruktionsrelationen für $0 \leq \ell \leq m-1$

$$a_j[\ell 2^{-j}] = 2^{-1/2} \sum_{k=0}^{m-1} (p_{k,\ell}^{\text{left}} a_{j-1}[k 2^{-j+1}] + q_{k,\ell}^{\text{left}} d_{j-1}[k 2^{-j+1}])$$

und für $m \leq \ell \leq 3m-2$

$$a_j[\ell 2^{-j}] = 2^{-1/2} \sum_{k=(\ell-m)/2}^{m-1} (p_{k,\ell}^{\text{left}} a_{j-1}[k 2^{-j+1}] + q_{k,\ell}^{\text{left}} d_{j-1}[k 2^{-j+1}]) + 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (p_{\ell-2k} a_{j-1}[k 2^{-j+1}] + q_{\ell-2k} d_{j-1}[k 2^{-j+1}]).$$

Der rechte Rand wird analog behandelt.

Zusammenfassung: Die Verfahren der Periodisierung, Klappung und die explizite Konstruktion der Randwavelets mit m verschwindenden Momenten führen zu diskreten Skalierungsfunktionen und Wavelets $\phi_{j,k}$ und $\psi_{j,k}$, $0 \leq k \leq 2^j - 1$. Für geeignetes $0 \leq L < J$ sind die Funktionen

$$\{\phi_{L,k}; 0 \leq k < 2^L\} \cup \{\psi_{L,k}; 0 \leq k < 2^L\} \cup \dots \cup \{\psi_{J-1,k}; 0 \leq k < 2^{J-1}\}$$

eine ONB von $\ell^2(I_N)$. Fasst man diese Funktionen als Spalten einer Matrix zusammen, so liefert dies eine dünn besetzte Matrix $N^{1/2}\mathcal{W}$, wobei \mathcal{W} eine Orthogonalmatrix ist, also $\mathcal{W}\mathcal{W}^T = I$ erfüllt. Die Wavelet-Zerlegung von $a_j \in \ell^2(I_N)$

entspricht der Multiplikation

$$(7.8) \quad \mathcal{W}^T a_J = \begin{pmatrix} a_L \\ d_L \\ \vdots \\ d_{J-1} \end{pmatrix}.$$

Die Rekonstruktion wird durch

$$(7.9) \quad \mathcal{W} \begin{pmatrix} a_L \\ d_L \\ \vdots \\ d_{J-1} \end{pmatrix} = a_J$$

repräsentiert. Die Orthogonalität der Matrix entspricht der Eigenschaft der perfekten Rekonstruktion. Die schnelle Wavelet-Transformation entspricht einer Faktorisierung der Matrix \mathcal{W} . Allgemeiner können (z.B. bei der Klappung) auch biorthogonale Skalierungsmasken verwendet werden. Dann wird die Zerlegungsmatrix \mathcal{W} wie oben und die Rekonstruktionsmatrix $\tilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W}^{-1}$ verwendet. Für die letzte Konstruktion muss zusätzlich beachtet werden: Sind die gegebenen Daten Abtastwerte (und nicht die inneren Produkte a_J), so muss die Vorkonditionierung am Rand durchgeführt werden. Weitere Einzelheiten entnimmt man dem Buch von Mallat, S. 255–265 und 281–292.

BEISPIEL 7.6. Die Matrix $2^{1/2}\mathcal{W}$ zu $N = 2^J$ und $L = N - 1$ (also einem Zerlegungsschritt) lautet für die Daubechies-Filter mit $m = 2$ und der expliziten Randanpassung

$p_{0,0}^{\text{left}}$	$p_{1,0}^{\text{left}}$					$q_{0,0}^{\text{left}}$	$q_{1,0}^{\text{left}}$				
$p_{0,1}^{\text{left}}$	$p_{1,1}^{\text{left}}$					$q_{0,1}^{\text{left}}$	$q_{1,1}^{\text{left}}$				
$p_{0,2}^{\text{left}}$	$p_{1,2}^{\text{left}}$					$q_{0,2}^{\text{left}}$	$q_{1,2}^{\text{left}}$				
	$p_{1,3}^{\text{left}}$	p_{-1}					$q_{1,3}^{\text{left}}$	q_{-1}			
	$p_{1,4}^{\text{left}}$	p_0					$q_{1,4}^{\text{left}}$	q_0			
		p_1	p_{-1}					q_1	q_{-1}		
		p_2	p_0					q_2	q_0		
			p_1						q_1		
			p_2	\dots				q_2	\dots		
				p_{-1}					q_{-1}		
				p_0					q_0		
				p_1	$p_{1,4}^{\text{right}}$			q_1	$q_{1,4}^{\text{right}}$		
				p_2	$p_{1,3}^{\text{right}}$	$p_{1,4}^{\text{right}}$		q_2	$q_{1,3}^{\text{right}}$	$q_{1,4}^{\text{right}}$	
					$p_{1,2}^{\text{right}}$	$p_{0,2}^{\text{right}}$	$p_{1,3}^{\text{right}}$		$q_{1,2}^{\text{right}}$	$q_{0,2}^{\text{right}}$	$q_{1,3}^{\text{right}}$
					$p_{1,1}^{\text{right}}$	$p_{0,1}^{\text{right}}$	$p_{1,2}^{\text{right}}$		$q_{1,1}^{\text{right}}$	$q_{0,1}^{\text{right}}$	$q_{1,2}^{\text{right}}$
					$p_{1,0}^{\text{right}}$	$p_{0,0}^{\text{right}}$	$p_{1,1}^{\text{right}}$		$q_{1,0}^{\text{right}}$	$q_{0,0}^{\text{right}}$	$q_{1,1}^{\text{right}}$

Anhand der Tabelle 7.1 lässt sich überprüfen, dass $\mathcal{W}_N := \mathcal{W}$ tatsächlich eine Orthogonalmatrix ist. Weiterhin besitzen die Spaltenvektoren von $A^T \mathcal{W}$ jeweils 2 verschwindende Momente.

Werden $L > 1$ Zerlegungsschritte verwendet ($L \leq J - 2$), so wird \mathcal{W} durch das Produkt

$$(7.10) \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}_N \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{N/2} & \\ & \mathcal{I}_{N/2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{N/2^{L-1}} & \\ & \mathcal{I}_{(N-N/2^{L-1})} \end{pmatrix}$$

ausgedrückt. Hierbei ist \mathcal{I}_M die Einheitsmatrix der Größe $M \times M$ und die Matrizen \mathcal{W}_{2^j} haben die gleiche Form wie oben und die Größe $2^j \times 2^j$. Sie beschreiben die Darstellung eines einzelnen Zerlegungsschritts

$$(7.11) \quad \mathcal{W}_{2^j}^T a_j = \begin{pmatrix} a_{j-1} \\ d_{j-1} \end{pmatrix}.$$

Die transponierte Matrix \mathcal{W}^T des Produkts (7.10) beschreibt also die rekursive Zerlegung der Koeffizientenvektoren a_j , $J \geq j > J - L$, in der Filterbank zur Wavelet-Zerlegung.

3. Wavelets für zweidimensionale Daten

Auch hier wollen wir nur den diskreten Fall betrachten. Zum kontinuierlichen Fall verweisen wir auf Mallat, S. 303–312.

Gegeben sei wieder das trigonometrische Polynom P mit $P(0) = 1$ und $|P(\omega)|^2 + |P(\omega + \pi)|^2 = 1$. Die diskreten Funktionen ϕ_j und ψ_j auf I_N , mit $N = 2^J$ und $j < J$, sind in (7.1) definiert. Auf I_N sind dann für $J_0 \leq j < J$ die Familien

$$(7.12) \quad \Phi_j := \{\phi_{j,k}; 0 \leq k < 2^j\}, \quad \Psi_j := \{\psi_{j,k}; 0 \leq k < 2^j\}$$

aus “inneren” und nach einer der oben skizzierten Methoden erzeugten Randfunktionen gegeben. Weiter seien Φ_j und Ψ_j ONS in $\ell_2(I_N)$. Setzen wir

$$\dot{V}_j = \text{span } \Phi_j, \quad \dot{W}_j = \text{span } \Psi_j,$$

so ist mit Hilfe von

$$\dot{V}_{j+1} = \dot{V}_j \oplus \dot{W}_j, \quad \dot{V}_j \perp \dot{W}_j,$$

gezeigt, dass auch $\Phi_j \cup \Psi_j$ eine ONB von V_{j+1} ist.

Wir wollen nun den Vektorraum $\mathcal{H} := \ell^2(I_N \times I_N)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = N^{-2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} f[k/N, \ell/N] \overline{g[k/N, \ell/N]}$$

genauer betrachten. Der Teilraum

$$V_j^2 := V_j \otimes V_j = \{f : I_N \times I_N; f[k/N, \ell/N] = \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} c_{r,s} \phi_{j,r}[k/N] \phi_{j,s}[\ell/N]\}$$

wird als *Tensorprodukt* bezeichnet. Offensichtlich ist $V_j = \mathcal{H}$, und die Räume V_j^2 sind wie bei einer MRA ineinander geschachtelt, also $V_j^2 \subset V_{j+1}^2$. Die Familie

$$\Phi_j^2 = \{\phi_{j,r,s}^2[\cdot, *] = \phi_{j,r}[\cdot] \phi_{j,s}[*]; 0 \leq r, s < N\}$$

bildet eine ONB von V_j^2 .

Der Wavelet-Raum W_j^2 , also das orthogonale Komplement von V_j^2 in V_{j+1}^2 , ist gegeben durch die Summe von 3 Tensorprodukt-Räumen

$$W_j^2 = (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j).$$

Dies ergibt sich aus der Distributivität des Tensorprodukts

$$V_{j+1}^2 = (V_j \oplus W_j) \otimes (V_j \oplus W_j) = V_j^2 \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j).$$

Wir erhalten sogar, dass die 3 Wavelet-Familien

$$\begin{aligned} \Psi_j^1 &= \{\psi_{j,r,s}^1[\cdot, *] = \phi_{j,r}[\cdot] \psi_{j,s}[*]; 0 \leq r, s < N\}, \\ \Psi_j^2 &= \{\psi_{j,r,s}^2[\cdot, *] = \psi_{j,r}[\cdot] \phi_{j,s}[*]; 0 \leq r, s < N\}, \\ \Psi_j^3 &= \{\psi_{j,r,s}^3[\cdot, *] = \psi_{j,r}[\cdot] \psi_{j,s}[*]; 0 \leq r, s < N\}. \end{aligned}$$

eine ONB von W_j^2 sind. Wichtig ist, dass beide Koordinatenrichtungen zur gleichen Skalierungsstufe j gehören. Für ein $f : I_N \times I_N \rightarrow \mathbb{R}$ ergeben die Wavelet-Koeffizienten

$$d_{j,r,s}^\nu = \langle f, \psi_{j,r,s}^\nu \rangle, \quad \nu = 1, 2, 3,$$

Details von f zu unterschiedlichen Auflösungen (Parameter j) und Richtungen (Parameter ν). Für $\nu = 1$ wird in horizontaler Richtung geglättet und Details in vertikaler Richtung bestimmt, für $\nu = 2$ ist es genau umgekehrt. Für $\nu = 3$ werden Details beider Richtungen miteinander vermischt.

Die zweidimensionale Wavelet-Zerlegung von $f : I_N \times I_N \rightarrow \mathbb{R}$ über $J - J_0$ Stufen ist nun eine Darstellung von f mittels der ONB

$$(7.13) \quad \Phi_{J_0} \cup \bigcup_{j=J_0}^{J-1} (\Psi_j^1 \cup \Psi_j^2 \cup \Psi_j^3).$$

Die schnelle Berechnung eines Zerlegungsschritts erfolgt durch Anwendung der Zerlegungs-Filterbank aus Bild 5.1 auf jede "Zeile" $f[k/N, *]$ von f und anschließende Anwendung derselben Filterbank auf alle Spalten an beiden Ausgängen der ersten Filterbank. Dies wird im oberen Teil von Bild 7.2 dargestellt. Dabei sind die Filter p und q am Rand entsprechend anzupassen, um die Rand-Wavelets korrekt zu verwenden. Analog wird ein Schritt der Rekonstruktion mit der Verkettung eindimensionaler Filterbänke durchgeführt, siehe Bild 7.2 (unten).

Ein Anwendungsbeispiel wird mit Matlab vorgestellt.

ÜBUNG 7.7. Zeigen Sie, dass man eine andere ONB von $\ell^2(I_N \times I_N)$ erhält, indem man alle Produkte $f[\cdot, *] = u[\cdot]v[*]$ mit

$$u, v \in \Phi_{J_0} \cup \bigcup_{j=J_0}^{J-1} \Psi_j$$

bestimmt. Worin besteht der wesentliche Unterschied zu der hier vorgestellten Wavelet-Basis?

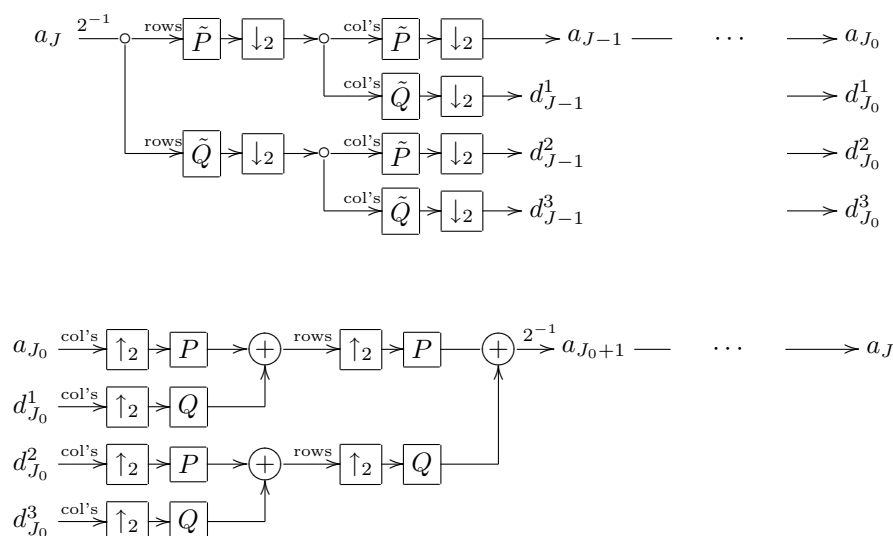


BILD 7.1. Zweidimensionale DWT-Zerlegung (oben) und Rekonstruktion (unten)

4. Quantisierung und Kodierung der Wavelet-Zerlegung

Wir wollen nun als Anwendung der Wavelet-Transformation die Datenkompression behandeln. Dazu betrachten wir ein stochastisches Modell, bei dem die Funktionsauswertung $f[k/N]$ (bzw. $f[k/N, \ell/N]$ für Bilddaten) als Realisierung einer stetigen Zufallsvariablen $F[k/N]$ angesehen wird. Die Verteilungsdichte dieser Zufallsvariablen sei a priori bekannt. Mit F bezeichnen wir den Spaltenvektor $(F[k/N]; 0 \leq k < N)$.

4.1. Transformation des Zufallsvektors. Sei \mathcal{W} eine Orthogonalmatrix mit Spaltenvektoren $\psi_k = (\psi_k[\ell/N]; 0 \leq \ell < N)$, $0 \leq k < N$. Als Beispiel stellen wir uns die Matrix \mathcal{W} zur Wavelet-Transformation auf $\ell^2(I_N)$ vor. Dann wird durch

$$F_{\mathcal{W}}[k] := \langle F, \psi_k \rangle = \sum_{\ell=0}^{N-1} \psi_k[\ell/N] F[\ell/N], \quad 0 \leq k < N,$$

ein neuer Zufallsvektor $F_{\mathcal{W}} = \mathcal{W}^T F$ definiert. Der ursprüngliche Vektor F besitzt die Darstellung

$$F = \mathcal{W} F_{\mathcal{W}} = \sum_{k=0}^{N-1} F_{\mathcal{W}}[k] \psi_k.$$

Mit p_k bezeichnen wir im Folgenden die Verteilungsdichte von $F_{\mathcal{W}}[k]$.

BEISPIEL 7.8. Als Spezialfall betrachtet man häufig, dass die Zufallsvariablen $F[k/N]$ normal-verteilt (engl. Gaussian) mit Erwartungswert 0 und Varianz σ_k^2 sind. Mit K werde die Korrelationsmatrix $K = (E\{F[k/N]F[\ell/N]\}; 0 \leq k, \ell < N)$ bezeichnet. (Der Zufallsvektor F besitzt dann eine mehrdimensionale Normalverteilung.)

Ein allgemeiner Satz der Stochastik besagt, dass dann auch $F_{\mathcal{W}}[k]$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 sind und die Korrelationsmatrix

$$K_{\mathcal{W}} = (E\{F_{\mathcal{W}}[k]F_{\mathcal{W}}[\ell]\}; 0 \leq k, \ell < N) = \mathcal{W}^T K \mathcal{W}$$

besitzen.

Am obigen Beispiel erkennt man schon, dass die stochastischen Eigenschaften von $F_{\mathcal{W}}[k]$ im allgemeinen von der Basis \mathcal{W} abhängen. Als "optimale Basis" wird eine Basis von Eigenvektoren von K , die sog. Karhunen-Loève Basis, bezeichnet, weil sie zur Unkorreliertheit (und Unabhängigkeit) der Zufallsvariablen $F_{\mathcal{W}}[k]$ führt: Mit dieser Basis ist $K_{\mathcal{W}}$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte von K . Beim JPEG-Standard zur Bildkompression wurde eine Cosinus-Basis verwendet, weil man diese als Näherung an die Karhunen-Loève Basis ansah. Beim neuen Standard JPEG2000 treten an ihre Stelle gewisse biorthogonale Wavelet-Basen.

Wir belassen es bei diesen Bemerkungen und wenden uns den folgenden Teilen der Signalkompression zu.

4.2. Quantisierung. Die Datenkompression, aber auch allein die Abspeicherung der Koeffizienten $F_{\mathcal{W}}[k]$, erfordert eine *Quantisierung* dieser Werte. Hiermit ist eine Abbildung

$$Q_k : \mathbb{R} \rightarrow \{x_1, \dots, x_{s_k}\}, \quad Q_k(x) = x_i \quad \text{für } x \in (y_{i-1}, y_i], \quad 0 \leq i \leq s_k,$$

mit **endlichem** Wertebereich gemeint. Werte im gesamten Intervall $(y_{i-1}, y_i]$ (engl. "bin") werden also nur durch einen Wert x_i repräsentiert. Ein Beispiel zur Quantisierung ist das Runden

$$Q_k(x) = i \quad \text{für } x \in [i - 1/2, i + 1/2), \quad i \in \{-i_0, \dots, i_0\}.$$

Wir betrachten dann

$$\tilde{F}_{\mathcal{W}}[k] = Q_k(F_{\mathcal{W}}[k])$$

als neue (diskrete) Zufallsvariable. Ist p_k die Verteilungsdichte von $F_{\mathcal{W}}[k]$, so ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\tilde{F}_{\mathcal{W}}[k]$ gegeben durch

$$(7.14) \quad p_i^{(k)} = Pr(\tilde{F}_{\mathcal{W}}[k] = x_i) = Pr(F_{\mathcal{W}}[k] \in (y_{i-1}, y_i]) = \int_{y_{i-1}}^{y_i} p_k(x) dx.$$

(Ohne weitere Erwähnung setzen wir immer $F_{\mathcal{W}}[k] \in [y_0, y_{s_k}]$ voraus.)

Das aus der Quantisierung zurückgewonnene Signal ist der Zufallsvektor

$$\tilde{F} = \mathcal{W}\tilde{F}_{\mathcal{W}} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}_{\mathcal{W}}[k]\psi_k.$$

Die *Verzerrung* (engl. distortion) ist gegeben durch

$$d := E\{\|F - \tilde{F}\|^2\} = \sum_{k=0}^{N-1} E\{|F[k/N] - \tilde{F}[k/N]|^2\}.$$

Da \mathcal{W} eine Orthogonalmatrix ist, gilt auch

$$d = E\{\|\mathcal{W}^T(F - \tilde{F})\|^2\} = E\{\|F_{\mathcal{W}} - \tilde{F}_{\mathcal{W}}\|^2\} = \sum_{k=0}^{N-1} d_k$$

mit den einzelnen Verzerrungen

$$d_k = E\{|F_{\mathcal{W}}[k] - \tilde{F}_{\mathcal{W}}[k]|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - Q_k(x))^2 p_k(x) dx, \quad 0 \leq k < N.$$

Im Folgenden soll zu vorgegebener Verzerrung $d > 0$ eine möglichst effiziente Quantisierung und Codierung der Koeffizienten $F_{\mathcal{W}}[k]$ ermittelt werden.

4.3. Codierung. Üblicherweise werden die Intervalle $(y_{i-1}, y_i]$ und die Werte x_i zur Quantisierung (in einer Kurzform) separat abgespeichert. Der hierzu erforderliche Platz wird nicht weiter berücksichtigt.

Anstelle der Werte x_i werden binäre "Codeworte" w_i der Länge ℓ_i zur Abspeicherung verwendet. Die eindeutige Zuordnung $x_i \leftrightarrow w_i$ soll dabei so vorgenommen werden, dass für häufiger auftretende Werte x_i eine kürzere Wortlänge ℓ_i gewählt wird. Aufeinander folgende Werte x_{i_0}, \dots, x_{i_n} können als lineare Liste

$$(7.15) \quad w_{i_0} w_{i_1} \cdots w_{i_n}$$

(ohne Trennzeichen) gespeichert werden, falls man sogenannte *Präfix-Codes* verwendet, bei denen kein Codewort w_i der Kopf eines anderen Codeworts w_j ist. Dann kann die Folge x_0, x_1, \dots, x_n eindeutig aus der linearen Liste (7.15) zurückgewonnen werden.

BEISPIEL 7.9. Für 4 Werte x_1, \dots, x_4 bilden die binären Codeworte $w_1 = '0'$, $w_2 = '10'$, $w_3 = '101'$, $w_4 = '111'$ keinen Präfix-Code, weil w_2 der Kopf von w_3 ist. Z.B. lässt sich die Liste

$$'01010101'$$

nicht eindeutig rekonstruieren: Es könnte sich sowohl um $x_1 x_3 x_1 x_3$ als auch um $x_1 x_2 x_2 x_3$ handeln. Ersetzt man dagegen $w_3 = '110'$, so erhält man einen Präfix-Code.

Bei einer Realisierung f des Zufallsvektors F wird der Wert $Q_k(f_{\mathcal{W}}[k]) = x_i$ mit der Wahrscheinlichkeit $p_i^{(k)}$ in (7.14) angenommen. Also ergibt sich die *durchschnittliche Bitrate*

$$R_k = \sum_{i=1}^{s_k} \ell_i p_i^{(k)}$$

zum Abspeichern des Codeworts des quantisierten Koeffizienten $\tilde{f}_{\mathcal{W}}[k]$. Der durchschnittliche Gesamtbedarf zur Abspeicherung der transformierten, quantisierten und codierten Realisierung f ist dann

$$R = \sum_{k=0}^{N-1} R_k.$$

Die durchschnittliche Bitrate R_k wird (nahezu) optimal, wenn wir sogenannte Entropie-Codierung verwenden. Die *Entropie* der skalaren Zufallsvariablen $\tilde{F}_{\mathcal{W}}[k]$ ist definiert als

$$\mathcal{H}(F_{\mathcal{W}}[k]) = - \sum_{i=1}^{s_k} p_i^{(k)} \log_2 p_i^{(k)}.$$

Die folgende Aussage geht auf C. E. Shannon² zurück.

SATZ 7.10. *Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeiten p_i , $1 \leq i \leq s$. Dann gilt für die durchschnittliche Bitrate R jedes Präfix-Codes*

$$R \geq \mathcal{H} = - \sum_{i=1}^s p_i \log_2 p_i.$$

Andererseits existieren Präfix-Codes mit $R \leq \mathcal{H} + 1$.

Man sieht leicht ein, dass Präfix-Codes den binären Bäumen entsprechen, deren Blätter die Codeworte w_i sind. Dabei entspricht das Codewort w_i mit der Länge ℓ_i dem Blatt des Baumes, das von der Wurzel aus über Verzweigungen nach links (Bit '0') und rechts (Bit '1') auf einem Weg der Länge ℓ_i erreicht wird. Ein prominentes Beispiel eines Präfix-Codes mit $R \leq \mathcal{H} + 1$ ist der Huffman-Code³. Siehe dazu Bild 7.4. Bei gegebenen Wahrscheinlichkeiten

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_s$$

wird der binäre Baum rekursiv nach folgender Regel konstruiert: Man findet zunächst den binären Baum zum Huffman-Code von

$$p_1 + p_2, p_3, \dots, p_s \text{ (angeordnet)}$$

und ersetzt dann das zu $p_1 + p_2$ gehörende Blatt durch Anhängen von zwei Blättern p_1 und p_2 . Ein Matlab-Programm hierzu ist in Bild 7.3 gegeben. Das Ergebnis für den Eingabevektor $\vec{p} = (0.05, 0.1, 0.1, 0.15, 0.2, 0.4)$ ist in Bild 7.4 angegeben.

BEMERKUNG 7.11. *Der Exzess 1 in der Abschätzung der Bitrate R kann durch Übergang zu sogenannten Block-Codes verringert werden. Weitere Präfix-Codes, die in der Praxis häufig angewendet werden, sind die arithmetischen Codes.*

BEISPIEL 7.12. *Ein Huffman-Code zur Häufigkeitsverteilung*

$$\vec{p} = (0.05, 0.1, 0.1, 0.15, 0.2, 0.4)$$

²Claude Elwood Shannon (30.4.1916-24.2.2001), graduierte 1936 an der University of Michigan (Doppel-Abschluss in Electrical Engineering und Mathematik) und war bis 1978 Professor am MIT. Er wird als "Vater der Informationstheorie" bezeichnet. Seine Masterarbeit 1937 kann als Fundament für die Verwendung Boolescher Algebra zum Design von Schaltkreisen angesehen werden. Seine fundamentalen Beiträge "A mathematical theory of communication" im Bell System Technical Journal (1948), "Communication Theory of Secrecy Systems" a.a.O. (1949), "Communication in the Presence of Noise" Proc. IRE (1949) haben die Informationstheorie, digitale Kommunikation, Codierungstheorie und Kryptographie massgeblich beeinflusst. Sein Name wird in Zusammenhang mit dem Abtasttheorem für bandbeschränkte Funktionen (Whittaker-Shannon Theorem) genannt. Robert Gallager bezeichnete Shannon als "the greatest scientist of the 20th century".

³D. Huffman, A method for the onstruction of minimum redundancy codes, Proc. IRE 40 (1952), 1098-1101.

von 6 Werten x_i hat die Codeworte

$$'0011', '0010', '011', '010', '000', '1'$$

in der gleichen Reihenfolge wie die angegebenen p_i . Der zugehörige binäre Baum ist in Bild 7.4 angegeben. (Gleichwertige Codes erhält man durch Vertauschen von Blättern.) Die entsprechenden Bitlängen ℓ_i sind $(4, 4, 3, 3, 3, 1)$. Für die Entropie \mathcal{H} und die durchschnittliche Bitrate R erhalten wir die Werte

$$\mathcal{H} = - \sum_{i=1}^6 p_i \log_2 p_i = 2.2842, \quad R = \sum_{i=1}^6 p_i \ell_i = 2.35.$$

4.4. Hochauflösende Quantisierung und Codierung (High bit-rate compression). Wir wollen nun beschreiben, wie die Quantisierung unter speziellen Annahmen so optimiert werden kann, dass eine minimale durchschnittliche Bitrate erzielt wird. Dazu treffen wir die folgende Annahme.

DEFINITION 7.13. Die Quantisierung Q_k von $F_{\mathcal{W}}[k]$ zu den Intervallgrenzen $y_0^{(k)} < y_1^{(k)} < \dots < y_{s_k}^{(k)}$ heißt hochauflösend, wenn die Dichtefunktion p_k von $F_{\mathcal{W}}[k]$ auf jedem Intervall $(y_{i-1}^{(k)}, y_i^{(k)})$ konstant ist.

In der Praxis wird man annehmen, dass p_k im Quantisierungsintervall nahezu konstant ist. Dies wird bei hinreichend kleinen Intervallen der Fall sein. Für eine hochauflösende Quantisierung berechnet man die Häufigkeitsverteilung in (7.14) sofort als

$$p_i^{(k)} = \Delta_i^{(k)} p_k(x_i^{(k)}) \quad \text{mit} \quad \Delta_i^{(k)} = (y_i^{(k)} - y_{i-1}^{(k)}), \quad x_i^{(k)} \in (y_{i-1}^{(k)}, y_i^{(k)}).$$

SATZ 7.14. Eine hochauflösende Quantisierung erzielt die minimale Verzerrung

$$d_k = E\{|F_{\mathcal{W}}[k] - \tilde{F}_{\mathcal{W}}[k]|^2\} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{s_k} p_i^{(k)} (\Delta_i^{(k)})^2$$

genau dann, wenn $x_i^{(k)}$ der Mittelpunkt des Quantisierungsintervalls $(y_{i-1}^{(k)}, y_i^{(k)})$ ist.

Beweis: Mallat, S. 538, Proposition 11.3. \square

Für eine hochauflösende und gleichmäßige Quantisierung (d.h. $\Delta_i^{(k)} = \Delta_k$ für alle $1 \leq i \leq s_k$) ergibt sich dann

$$(7.16) \quad d_k = \frac{1}{12} \Delta_k^2.$$

Der folgende Satz besagt, dass bei gleicher Verzerrung d_k die Entropie der quantisierten Zufallsvariablen $\tilde{F}_{\mathcal{W}}[k]$ (also die minimale durchschnittliche Bitrate R_k) minimiert wird, wenn eine gleichmäßige Quantisierung gewählt wird.

SATZ 7.15. Q_k sei eine hochauflösende Quantisierung von $F_{\mathcal{W}}[k]$ und d_k die zugehörige Verzerrung. Mit der differentiellen Entropie

$$\mathcal{H}_d(F_{\mathcal{W}}[k]) := - \int_{\mathbb{R}} p(x) \log_2 p(x) dx$$

```

function t = huffman(p)

% function t = huffman(p)
%
% produce a binary tree for the Huffman code of probabilities
% p(j); vector p is assumed to be in ascending order
%
% Only the terminal nodes (leaves) of the binary tree t
% are stored. They are defined by the 3-by-(N+1) matrix t, where
% - N is the number of terminal nodes
% - t(1,N+1)=-2 denotes the end of the list
% - t(1,k)=i is the number of the k-th terminal node
%   (from left to right) in the complete binary tree which
%   is numbered as follows:
%
%           0
%          1  2
%         3  4  5  6
%
%   e.g. t(1,2)=5 means that the second terminal node
%         from left to right is the third node from the left at
%         depth 2
%
% - t(2,k)=j is the index of data p(j) at terminal node t(1,k)
% - t(3,k) is the data p(j) at terminal node t(1,k)

lp = length(p);
if lp>2
    % recursive definition of tree
    [pn,i] = sort([p(1) + p(2) p(3:lp)]);
    t = huffman(pn);
    % adjust the index entries to p
    t(2,1:lp-1) = i(t(2,1:lp-1)) + 1;
    % find index of terminal node which must be split
    ksplite = find( t(2,:) == 2);
    % make 2 new leaves at node ksplite
    j=t(1,ksplite);
    ins=[2*j+1,2*j+2; 2,1; p(2),p(1)];
    t = [t(:,1:ksplite-1),ins,t(:,ksplite+1:end)];
elseif lp == 2
    % only two elements
    t = [1 2 -2; 2 1 0; p(2) p(1) 0];
elseif lp==1
    t = [0 -2; 1 0; p(1) 0];
else
    error('empty vector');
end

```

BILD 7.2. Programm zum Huffman Code

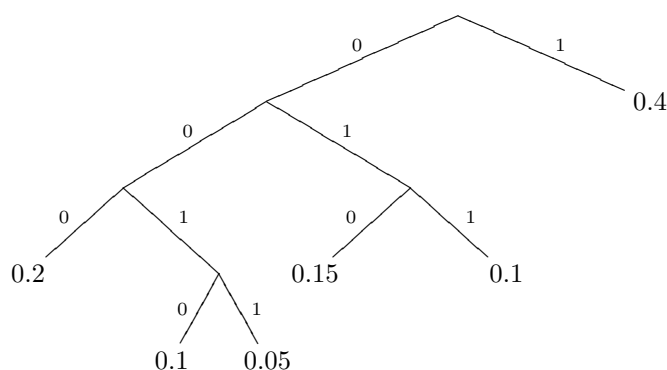


BILD 7.3. Binärer Baum zum Huffman-Code aus Beispiel 7.12

der stetigen Zufallsvariablen $F_{\mathcal{W}}[k]$ gilt dann

$$\mathcal{H}(\tilde{F}_{\mathcal{W}}[k]) \geq \mathcal{H}_d(F_{\mathcal{W}}[k]) - \frac{1}{2} \log_2(12d_k).$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn Q_k eine gleichmäßige Quantisierung ist und $x_i^{(k)}$ die Mittelpunkte der Quantisierungsintervalle sind.

Beweis: Mallat, S. 539, Theorem 11.2. \square

Setzen wir (7.16) für die gleichmäßige Quantisierung ein, so erhalten wir die Entropie

$$(7.17) \quad \mathcal{H}(\tilde{F}_{\mathcal{W}}[k]) = \mathcal{H}_d(F_{\mathcal{W}}[k]) - \log_2 \Delta_k.$$

Wir wollen nun die bestmögliche (skalare) Quantisierung Q_k aller Zufallsvariablen $F_{\mathcal{W}}[k]$, $0 \leq k < N$, bei fester Verzerrung $d = \sum_k d_k$ ermitteln. Dazu soll also die Gesamt-Bitrate $R = \sum_k R_k$ minimiert werden. Ersatzweise minimieren wir die Gesamt-Entropie

$$R^* = \sum_k \mathcal{H}(\tilde{F}_{\mathcal{W}}[k]).$$

Wir wissen schon, dass jede Quantisierung Q_k gleichmäßig mit einer Intervalllänge Δ_k zu wählen ist. Der folgende Satz besagt, dass alle Intervalllängen gleich gewählt werden müssen.

SATZ 7.16. *Bei hochauflösender Quantisierung und vorgegebener Verzerrung d wird R^* minimal, falls alle Quantisierer Q_k gleichmäßig mit der Intervalllänge*

$$\Delta_k = \Delta = \frac{12d}{N}$$

gewählt werden. In diesem Fall ist

$$(7.18) \quad d = d(R^*) = \frac{N}{12} 2^{-2R^*/N} 2^{2\overline{\mathcal{H}}_d}$$

mit der durchschnittlichen differentiellen Entropie $\overline{\mathcal{H}}_d = \frac{1}{N} \sum_k \mathcal{H}_d(F_{\mathcal{W}}[k])$.

Beweis: Wir wissen nach Satz 7.15, dass die skalaren Quantisierer Q_k gleichmäßig mit einer Intervalllänge Δ_k zu wählen sind. Mit (7.17) und (7.16) ist

$$R^* = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{H}(\tilde{F}_{\mathcal{W}}[k]) = N\overline{\mathcal{H}_d} - \sum_{k=0}^{N-1} \log_2 \Delta_k = N\overline{\mathcal{H}_d} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \log_2(12d_k).$$

Bei konstanter Gesamtverzerrung $d = \sum_k d_k$ wird die letzte Summe genau dann maximal, wenn alle d_k denselben Wert $d_k = d/N$ haben (strikte Konkavität der Logarithmus-Funktion, Jensen's Ungleichung). Also nimmt R^* sein Minimum genau dann an, wenn $\Delta_k^2 = 12d_k = 12d/N$ gilt. Der entsprechende Wert ist dann

$$R^* = N\overline{\mathcal{H}_d} - \frac{N}{2} \log_2(12d/N).$$

Hieraus ergibt sich (7.18) sofort. \square

Aus der Kenntnis der differentiellen Entropie der Koeffizienten $F_{\mathcal{W}}[k]$ von

$$F = \sum_{k=0}^{N-1} F_{\mathcal{W}}[k] \psi_k$$

lässt sich nach dem obigen Satz die Gesamt-Bitrate $R \approx R^*$ so bestimmen, dass eine erlaubte Verzerrung d nicht überschritten wird. Dabei wird d zu gleichen Anteilen auf die Koeffizienten $F_{\mathcal{W}}[k]$ verteilt und alle Koeffizienten mit dem gleichmäßigen Quantisierer Q zur Intervalllänge $(12d/N)^{1/2}$ behandelt. Die optimale Aufteilung der Bitrate auf die einzelnen Koeffizienten ist dann

$$R_k = \mathcal{H}_d(F_{\mathcal{W}}[k]) - \frac{N}{2} \log_2(12d/N).$$

Für Zufallsvariablen $F_{\mathcal{W}}[k]$ mit kleiner Varianz kann dieser Ausdruck negativ sein (weil $\mathcal{H}_d(F_{\mathcal{W}}[k])$ häufig von der Varianz bestimmt wird, siehe Übung 7.17).

ÜBUNG 7.17. *Wir haben in Beispiel 7.8 erwähnt, dass die orthogonale Transformation eines (mehrdimensional) normalverteilten Zufallsvektors F wieder einen normalverteilten Zufallsvektor $F_{\mathcal{W}}$ ergibt. Berechnen Sie die differentielle Entropie $\mathcal{H}_d(F_{\mathcal{W}}[k])$ der normalverteilten Zufallsvariablen $F_{\mathcal{W}}[k]$ mit der Dichte*

$$p_k(x) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_k^2}}.$$

Hinweis: Das Ergebnis ist $\mathcal{H}_d(F_{\mathcal{W}}[k]) = \log_2 \sigma_k + \frac{1}{2} \log_2(2\pi e)$.

Bei praktischen Problemen tritt an die Stelle der Verzerrung d eine gewichtete Summe

$$d = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{d_k}{w_k^2}$$

mit Gewichten $w_k > 0$. Dann werden die vorherigen Argumente auf die gewichteten Koeffizienten $F_{\mathcal{W}}^w[k]$ angewendet. Für den ursprünglichen Koeffizienten $F_{\mathcal{W}}[k]$ ergeben sich dann die Größen

$$\Delta_k = w_k \Delta, \quad d_k = w_k^2 d/N.$$

$\ell \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	16	11	10	16	24	40	51	61
1	12	12	14	19	26	58	60	55
2	14	13	16	24	40	57	69	56
3	14	17	22	29	51	87	80	62
4	18	22	37	56	68	108	103	77
5	24	35	55	64	81	194	113	92
6	49	64	78	87	103	121	120	101
7	72	92	95	98	121	100	103	99

TABELLE 7.2. Typische Gewichte $w_{k,\ell}$ der Koeffizienten zur Block-Cosinus-Transformation des JPEG-Standards

Für Koeffizienten mit kleinem w_k wird also eine feinere Quantisierung verwendet als für Koeffizienten mit großem w_k . Dieses Vorgehen findet man z.B. beim JPEG-Standard. Die Daten eines 8×8 -Blocks $f[a+k, b+\ell]$, $0 \leq k, \ell \leq 7$, werden mittels der diskreten zweidimensionalen Cosinus-Transformation behandelt,

$$(7.19) \quad f_{\mathcal{W}}[k, \ell] = \frac{2\lambda_k \lambda_\ell}{64} \sum_{m,n=0}^7 f[a+m, b+n] \cos\left(\frac{k\pi}{8} \left(m + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{8} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right),$$

wobei $\lambda_k = 1$ für $k > 0$ und $\lambda_0 = 2^{-1/2}$ ist. Typische Gewichte $w_{k,\ell}$ sind in der Tabelle 7.2 angegeben.

4.5. Bilddaten-Kompression. Für Bilddaten ist die Interpretation der Pixelwerte $f[k/N, \ell/N]$, $0 \leq k, \ell \leq N-1$, als Realisierung eines stochastischen Prozesses häufig nicht naheliegend. Dazu ist die Diversität von Bilddaten zu groß und unstrukturiert. Weiterhin passt die Annahme der ‘‘hochauflösenden Quantisierung’’ nicht zum Zweck der Daten-Kompression bei niedriger Bit-Rate.

Durch orthogonale Transformation erhalten wir zuerst eine Darstellung

$$f = \sum_{m=0}^{N^2-1} f_{\mathcal{W}}[m] \psi_m, \quad f_{\mathcal{W}}[m] = \langle f, \psi_m \rangle.$$

Mit $\tilde{f}_{\mathcal{W}}[m] = Q(f_{\mathcal{W}}[m])$ bezeichnen wir die quantisierten Werte. Anstelle der ‘‘erwarteten’’ Verzerrung wie im letzten Abschnitt erhalten wir die deterministische Verzerrung

$$d = d(R, f) = \|f - \tilde{f}\|^2 = \sum_{m=0}^{N^2-1} |f_{\mathcal{W}}[m] - \tilde{f}_{\mathcal{W}}[m]|^2,$$

die nun von der Bitrate R (also der Quantisierung und Codierung), aber auch von f selbst abhängt.

Eine Verbindung zum stochastischen Modell wird hergestellt, wenn wir die Dichtefunktion $p_k(x)$ durch das Histogramm $p(x)$ der Koeffizienten $f_{\mathcal{W}}[k]$, oder gleichbedeutend die entsprechende Verteilungsfunktion

$$Pr(F_{\mathcal{W}}[k] \leq x) \quad \text{durch} \quad \#\{m : f_{\mathcal{W}}[m] \leq x\}$$

ersetzen. Dann werden aus den Wahrscheinlichkeiten $p_i^{(k)}$ in (7.14) die relativen Häufigkeiten

$$p_i = \frac{1}{N^2} \#\{k; f_{\mathcal{W}}[k] \in (y_{i-1}, y_i)\}$$

und aus der differentiellen Entropie und der Entropie wird

$$\mathcal{H}_d(f_{\mathcal{W}}) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log_2 p(x) dx, \quad \mathcal{H} = - \sum_{i=1}^s p_i \log_2 p_i.$$

Der Shannon'sche Satz 7.10 liefert, dass der gesamte Bitbedarf R zur Entropie-Codierung der Werte $\tilde{f}_{\mathcal{W}}[k]$, $0 \leq k < N^2$, die Abschätzung

$$R \geq N^2 \mathcal{H}$$

erfüllt. Als durchschnittliche *Bitrate pro Pixel* erhalten wir

$$\bar{R} = R/N^2 \geq \mathcal{H}.$$

Als "Verzerrungs-Orakel" bezeichnet man den in Satz 7.16 erhaltenen Wert

$$d_{\mathcal{H}}(R, f_{\mathcal{W}}) = \frac{N^2}{12} 2^{-2\bar{R}} 2^{2\mathcal{H}_d(f_{\mathcal{W}})}.$$

Dieser Wert entspricht unter der Annahme der hochauflösenden Quantisierung der Verzerrung, die man bei vorheriger Kenntnis (daher "Orakel") der Verteilungsdichte $p = p(f)$ zur Bitrate \bar{R} erreichen kann.

Adaptive Codierungsverfahren (wie etwa die arithmetischen Codes) kommen ohne die Vorhersage der Verteilungsdichte p aus. Die Häufigkeiten p_i und die variable Codelänge ℓ_i werden dabei während der Codierungsphase angepasst. Dadurch kann sogar eine Bitrate $\bar{R} < \mathcal{H}$ erzielt werden. Zum Beispiel liefert die Wavelet-Transformation Koeffizienten $f_{\mathcal{W}}[m]$, die je nach der Skalierungsstufe eine unterschiedliche Größenordnung haben. Die adaptive Codierung (geordnet nach Skalen der Wavelet-Transformation) passt daher die Codelängen ℓ_i den Skalierungsstufen an und führt i.a. zu effizienterer Codierung als die "globale" Codierung aller N^2 Koeffizienten.

ÜBUNG 7.18. *Es gelte $|f_{\mathcal{W}}[k]| \leq C$ für alle $0 \leq k < N^2$. R sei so gross, dass bei gleichmäßiger Quantisierung des Intervalls $[-C, C]$ und fester Länge ℓ der Codeworte die Annahme der hochauflösenden Quantisierung erfüllt ist. Zeigen Sie mit (7.16), dass dann*

$$d = d(R, f) \leq \frac{N^2}{3} C^2 2^{-2\bar{R}}$$

gilt, die Verzerrung also mindestens exponentiell mit der Bitrate $\bar{R} = R/N^2$ abnimmt.

4.6. Wavelet Bild-Codierung. Eine einfache *Wavelet Bild-Codierung* führt zuerst die Wavelet-Transformation mit einem zweidimensionalen Tensor-Produkt-Wavelet durch, das

- hinreichend viele verschwindende Momente hat, um in glatten Regionen des Bildes möglichst kleine Wavelet-Koeffizienten zu erzielen,
- möglichst kleinen Träger hat, um den Einfluss abrupter Helligkeits- oder Farbwechsel (Kanten) auf möglichst wenige Wavelet-Koeffizienten zu beschränken.

Wir wissen aus der Entwicklung der Daubechies-Wavelets, dass beide Ziele sich widersprechen, also ein geeigneter Kompromiss gefunden werden muss. In der Praxis verwendet man häufig Wavelets mit 5-9 verschwindenden Momenten. Um die Randeffekte zu bewältigen, greift man auf bi-orthogonale symmetrische Wavelets zurück und führt die gerade Fortsetzung am Rand durch (siehe Abschnitt 2.3). Als geeignete Wavelets haben sich in praktischen Untersuchungen biorthogonale Wavelets mit fast gleicher Trägerlänge und 7 bzw. 9 verschwindenden Momenten erwiesen. Die Abweichung von strikter Orthogonalität ist hierfür sehr gering.

Eine gleichmäßige Quantisierung zur Intervalllänge Δ wird durch

$$Q_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < \Delta/2, \\ \text{sign}(x)k\Delta & \text{für } (k - 1/2)\Delta \leq |x| < (k + 1/2)\Delta, \quad k > 0, \end{cases}$$

definiert. Durch das "Nullintervall" $I_0 = (-\Delta/2, \Delta/2)$ wird der Schwellwert (engl. threshold)

$$\theta = \Delta/2$$

zum Abschneiden von Wavelet-Koeffizienten festgelegt. Die obige Quantisierung beinhaltet also das "harte Abschneiden" von Arbeitsblatt 2.

Für die Codierung mit *niedriger Bitrate* (zur Datenkompression) ist die Annahme der hochauflösenden Quantisierung meist nicht gerechtfertigt. Dann hat sich gezeigt, dass ein doppelt so großer Schwellwert

$$\theta = \Delta$$

zu einer besseren Bildqualität bei gleicher Bitrate führt. Der hierzu passende gleichmäßige Quantisierer lautet

$$Q_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < \Delta, \\ \text{sign}(x)(k + 1/2)\Delta & \text{für } k\Delta \leq |x| < (k + 1)\Delta. \end{cases}$$

Als Codierer verwendet man üblicherweise adaptive arithmetische Codes mit variabler Länge. Bei Bitraten $\bar{R} \geq 1$ (Kompression 1:8) und sehr oft bei $\bar{R} \geq 0.5$ (Kompression 1:16) sind keine Veränderungen des Bildes erkennbar.

BEMERKUNG 7.19. Als *PSNR-Wert* ("Peak Signal-to-Noise Ratio") eines codierten Bildes mit Graustufen $0 \leq f[k/N, \ell/N] \leq 255$ zur Bitrate \bar{R} bezeichnet man den Wert

$$PSNR(\bar{R}, f) = 10 \log_{10} \frac{N^2 \cdot 255^2}{d(\bar{R}, f)}.$$

Bei hochauflösender Quantisierung liefert das Verzerrungs-Orakel die Beziehung

$$PSNR(\bar{R}, f) = (20 \log_{10} 2) \bar{R} + K$$

mit einer Konstanten K , die von der Verteilungsdichte p zu f , aber nicht von der Größe N^2 abhängt.

Erzielt die Transformation eine große Anzahl von Koeffizienten im Nullintervall $I_0 = (-\Delta/2, \Delta/2)$ bzw. $(-\Delta, \Delta)$, so wird dies bei der Codierung in noch stärkerer Form berücksichtigt. Anstelle der jeweiligen Codierung von $\tilde{f}_{\mathcal{W}}[m] = 0$ gibt es zwei Varianten.

- a) Im JPEG-Standard werden die Koeffizienten $f_{\mathcal{W}}[k, \ell]$ in (7.19) in einer “Zickzack-Reihenfolge” durchlaufen. Dabei entstehen mehrere Sequenzen von quantisierten Koeffizienten $\tilde{f}_{\mathcal{W}}[k, \ell] = 0$. Eine solche Sequenz wird angegeben, indem in einem Codewort (S, B) der Bitlänge 8 die vorderen 4 Bits die Länge der Sequenz von Nullen (mit $0 \leq S \leq 15$) angeben. Die hinteren 4 Bits werden anderweitig verwendet. Die hieraus resultierenden Codeworte (S, B) der Länge 8 werden nochmals mit dem Huffman-Code codiert, um noch höhere Datenkompression zu erzielen. Einzelheiten dazu findet man z.B. bei Mallat, S. 563f.
- b) Zusätzlich zu den quantisierten Koeffizienten außerhalb des Nullintervalls führt man einen Inzidenz-Bereich b der Größe N^2 ein:

$$b[m] = \begin{cases} 1, & \text{falls } \tilde{f}_{\mathcal{W}}[m] \neq 0, \\ 0, & \text{falls } \tilde{f}_{\mathcal{W}}[m] = 0. \end{cases}$$

Dadurch entfällt die Speicherung der Koeffizienten im Nullintervall, man benötigt aber einen Teil des Bit-Bedarfs R für den Inzidenzbereich.

Mit M bezeichnen wir die Anzahl der “signifikanten” Koeffizienten $\tilde{f}_{\mathcal{W}}[m] \neq 0$. Dann ist durch

$$p_0 = (N^2 - M)/N^2, \quad p_1 = M/N^2$$

die Häufigkeitsverteilung des Inzidenzbereichs b gegeben. Zu seiner Entropie-Codierung werden also

$$(7.20) \quad R_0 \geq -N^2(p_0 \log_2 p_0 + p_1 \log_2 p_1) = M \log_2 \frac{N^2}{M} + (N^2 - M) \log_2 \frac{N^2}{N^2 - M}.$$

Bits benötigt. Der gesamte Bitbedarf R ist dann

$$R = R_0 + R_1,$$

wobei R_1 den Bedarf für die signifikanten Koeffizienten darstellt. Die Verzerrung zum Quantisierer Q_1 lautet

$$(7.21) \quad d(R, f) = \sum_{|f_{\mathcal{W}}[m]| < \Delta/2} |f_{\mathcal{W}}[m]|^2 + \sum_{|f_{\mathcal{W}}[m]| \geq \Delta/2} |f_{\mathcal{W}}[m] - Q(f_{\mathcal{W}}[m])|^2.$$

Der erste Anteil wird über Methoden der *nichtlinearen Optimierung* für bestimmte Klassen von Bildern abgeschätzt.

BEMERKUNG 7.20. Man bezeichnet mit $f_{\mathcal{W}}^*[m]$, $0 \leq m < N^2$, die Umordnung der Wavelet-Koeffizienten nach abnehmendem Absolutbetrag, also

$$|f_{\mathcal{W}}^*[0]| \geq |f_{\mathcal{W}}^*[1]| \geq \dots \geq |f_{\mathcal{W}}^*[N^2 - 1]|.$$

Weil die zweite Summe in (7.21) genau M Summanden enthält, gilt

$$f_M := \sum_{|f_{\mathcal{W}}[m]| \geq \Delta/2} f_{\mathcal{W}}[m] \psi_m = \sum_{m=0}^{M-1} f_{\mathcal{W}}^*[m] \psi_{\sigma(m)}$$

mit einer Permutation σ der Basiselemente $\{\psi_0, \dots, \psi_{N^2-1}\}$. Da wir eine Orthonormalbasis haben, ist die erste Summe in (7.21) gleich dem Fehlerquadrat der Approximation

$$(7.22) \quad \sum_{|f_{\mathcal{W}}[m]| < \Delta/2} |f_{\mathcal{W}}[m]|^2 = \sum_{m=M}^{N^2-1} |f_{\mathcal{W}}^*[m]|^2 = \|f - f_M\|_2^2.$$

Weiterhin ist $\|f - f_M\|_2^2$ sogar das Minimum aller M -Term Approximationen, d.h.

$$\|f - f_M\|_2^2 = \min \left\{ \|f - g\|_2^2 \mid g = \sum_{m \in K_M} \langle f, \psi_m \rangle \psi_m, \#K_M = M \right\}.$$

Da hier das Minimum über eine Teilmenge gebildet wird, die kein Teilraum von $\ell^2(I_N \times I_N)$ ist, spricht man von nichtlinearer Approximation und nennt f_M die beste M -Term Approximation von f (in der ℓ^2 -Norm).

Ein leicht zu beweisendes Resultat der nichtlinearen Approximation lautet wie folgt.

SATZ 7.21. Falls die Koeffizienten $f_{\mathcal{W}}[m] = \langle f, \psi_m \rangle$ zur Orthonormalbasis $\{\psi_m; 0 \leq m \leq N^2 - 1\}$ die Beziehungen

$$A(m+1)^{-s} \leq |f_{\mathcal{W}}^*[m]| \leq B(m+1)^{-s}$$

mit $s > 1/2$ erfüllen, so gelten die Abschätzungen

$$(7.23) \quad \frac{A^2}{2s-1} (1 - 2^{1-2s}) (M+1)^{1-2s} \leq \|f - f_M\|_2^2 \leq \frac{B^2}{2s-1} M^{1-2s}$$

für die beste M -Term Approximation f_M mit $M \leq N^2/2 - 1$ Summanden.

Beweis: Mit (7.22), der Voraussetzung und dem Integral-Vergleichskriterium für Reihen ist

$$\begin{aligned} \|f - f_M\|_2^2 &= \sum_{m=M}^{N^2-1} |f_{\mathcal{W}}^*[m]|^2 \\ &\leq B^2 \sum_{m=M}^{N^2-1} (m+1)^{-2s} \leq B^2 \int_M^\infty x^{-2s} dx = \frac{B^2}{2s-1} M^{1-2s}. \end{aligned}$$

Für die Abschätzung nach unten erhalten wir ähnlich

$$\|f - f_M\|_2^2 \geq A^2 \sum_{m=M}^{N^2-1} (m+1)^{-2s} \geq A^2 \int_{M+1}^{N^2} x^{-2s} dx = \frac{A^2}{2s-1} ((M+1)^{1-2s} - N^{2(1-2s)}).$$

Die Bedingung $M \leq N^2/2 - 1$ ergibt für den letzten Faktor

$$(M+1)^{1-2s} (1 - (N^2/(M+1))^{1-2s}) \geq (M+1)^{1-2s} (1 - 2^{1-2s}). \quad \square$$

BEMERKUNG 7.22. Häufig reicht es aus, nur die Größenordnung der Abschätzungen anzugeben, ohne auf die konkreten Konstanten zu verweisen. Die Aussage von Satz 7.21 lässt sich dann kurz ausdrücken durch

$$|f_{\mathcal{W}}^*[m]| \sim C(m+1)^{-s} \implies \|f - f_M\|_2^2 \sim C^2 M^{1-2s}.$$

Hierbei bedeutet die Notation ' \sim ', dass obere und untere Abschätzungen mit positiven Konstanten existieren, die nicht von N abhängen. Die Konstante C kann gerade solche Abhängigkeiten von N ausdrücken.

In vielen Fällen ist der erste Summand $\|f - f_M\|_2^2$ in (7.21) derjenige, der die Größenordnung der gesamten Verzerrung $d(R, f)$ bestimmt. Oft wird der Raum $X = BV[0, 1]^2$ der Funktionen mit beschränkter Variation als Modellraum verwendet. Die diskrete Funktion f auf I_N^2 wird dann als Diskretisierung von $g \in BV[0, 1]^2$ mit der Auflösung $h = N^{-1}$ aufgefasst. Die diskrete BV -Norm wird definiert als

$$\|f\|_{BV} = \frac{1}{N} \sum_{k, \ell=0}^{N-1} \left(\left| f \left[\frac{k+1}{N}, \frac{\ell}{N} \right] - f \left[\frac{k}{N}, \frac{\ell}{N} \right] \right|^2 + \left| f \left[\frac{k}{N}, \frac{\ell+1}{N} \right] - f \left[\frac{k}{N}, \frac{\ell}{N} \right] \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Sie erfüllt $\|f\|_{BV} \leq \sqrt{2}\|g\|_{BV}$ gleichmäßig in N , siehe Mallat, S. 37f. Unter geeigneten Zusatzbedingungen gilt die Abschätzung

$$|f_{\mathcal{W}}^*[m]| \sim N\|f\|_{BV} (m+1)^{-1}, \quad m > 0,$$

für die abnehmend sortierten Wavelet-Koeffizienten. Der folgende Satz macht nun Angaben über die Größenordnung der Verzerrung in Abhängigkeit der Bitrate \bar{R} ohne die Annahme der hochauflösenden Quantisierung, also auch bei niedriger Bitrate (hoher Kompression).

SATZ 7.23. Wir nehmen an, dass die (Wavelet-)Koeffizienten von f die Beziehung

$$(7.24) \quad |f_{\mathcal{W}}^*[m]| \sim C (m+1)^{-s}$$

mit $s > 1/2$ und $C > 0$ erfüllen. Zum gleichmäßigen Quantisierer Q_1 und für $R \leq N^2$ existiert dann ein adaptiver Codierer variabler Länge mit

$$(7.25) \quad d(R, f) \sim d_{\mathcal{H}}(R, f) \sim C^2 R^{1-2s} \left(1 + \log_2 \frac{N^2}{R} \right)^{2s-1}.$$

Beweis: Wir zeigen nur einige Beweisteile. Der vollständige Beweis steht in Mallat, S. 554.

1. Für den Quantisierer Q_1 zur Intervalllänge Δ gilt $|f_{\mathcal{W}}[m] - Q(f_{\mathcal{W}}[m])|^2 \leq \Delta^2/4$, also

$$\sum_{m=0}^{M-1} |f_{\mathcal{W}}^*[m] - Q(f_{\mathcal{W}}^*[m])|^2 \leq M\Delta^2/4.$$

Aus den Beziehungen

$$A C M^{-s} \leq |f_{\mathcal{W}}^*[M-1]| \leq B C M^{-s} \quad \text{und} \quad |f_{\mathcal{W}}^*[M]| < \Delta/2 \leq |f_{\mathcal{W}}^*[M-1]|$$

folgt

$$B C M^{-s} \geq \Delta/2 \implies M\Delta^2/4 \leq (BC)^2 M^{1-2s}.$$

Zusammen mit Satz 7.21 ergibt sich

$$(7.26) \quad d(R, f) = \|f - f_M\|_2^2 + \sum_{m=0}^{M-1} |f_{\mathcal{W}}^*[m] - Q(f_{\mathcal{W}}^*[m])|^2 \sim C^2 M^{1-2s},$$

falls auch noch $M \leq N^2/2 - 1$ erfüllt ist.

2. Der Zusammenhang von M zum Bitbedarf R_0 für die Inzidenzmatrix wird in (7.20) hergestellt. Die Funktion $h(x) = -x \log_2 x$ ist konkav und erfüllt $h(x) > h(1-x)$ für alle $x \in (0, 1/2)$. Mit $M/N^2 < 1/2$ ist $p_0 > 1/2$, also

$$R_0 = -N^2(p_0 \log_2 p_0 + p_1 \log_2 p_1) \sim -N^2 p_1 \log_2 p_1 = M \log_2 \frac{N^2}{M} > M.$$

3. Im Beweis von Mallat wird gezeigt, dass der Bitbedarf R_1 zur Codierung der M signifikanten Koeffizienten nur $R_1 \sim M$ beträgt. Damit ist der gesamte Bitbedarf durch

$$R \sim R_0 \sim M \log_2 \frac{N^2}{M}$$

gegeben. Auflösen dieser Beziehung für $M/N^2 < 1/2$ ergibt

$$M \sim R \left(1 + \log_2 \frac{N^2}{R} \right)^{-1}.$$

Denn: Mit $y = R/N^2 \in (0, 1)$ und $x = M/N^2 \in (0, 1/2)$ soll $y \sim -x \log_2 x$ aufgelöst werden. Dies geschieht durch

$$\frac{y}{1 - \log_2 y} \sim \frac{-x \log_2 x}{1 - \log_2 x - \log_2(-\log_2 x)} \sim \frac{-x \log_2 x}{-\log_2 x} = x.$$

Hierbei werden für $x \in (0, 1/2)$ die Beziehungen $-\log_2 x = \log_2(1/x) > 1$ und $\log_2(-\log_2 x) = \log_2(\log_2(1/x)) \leq \frac{\log_2 e}{e} |\log_2 x|$ verwendet.

Einsetzen in (7.26) ergibt (7.25).

4. Die Rechtfertigung der Annahme $M \leq N^2/2 - 1$, die in allen 3 Beweisschritten verwendet wird, erfolgt (sehr vage) aus $R = R_0 + R_1 \leq N^2$ und $R \geq 2M$. \square

Die Veranschaulichung der Untersuchungen dieses Kapitels werden auf Arbeitsblatt 3 gegeben.

Wavelet-Packets

Die effiziente Zerlegung akustischer Signale erfordert Basisfunktionen η_k , die für nahezu konstante hohe Frequenzen über einen längeren Zeitabschnitt eine bessere Frequenz-Auflösung bieten als Wavelets.

Wir geben wie Kapitel 5 eine Skalierungsfunktion $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ mit kompakten Träger $\text{supp } \phi \subset [0, N] =: I_\phi$ und dem Skalierungssymbol

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N p_k e^{-ik\omega}$$

vor. Das “wesentliche Frequenzintervall” von ϕ sei wie in (3.11) definiert als

$$J_\phi = [-\Delta(\phi), \Delta(\phi)].$$

Weiter gelte

$$P(0) = 1, \quad |P(\omega)|^2 + |P(\omega + \pi)|^2 = 1,$$

und die Funktionen $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\}$ seien eine ONB von V_0 . Das orthogonale Wavelet ψ in (5.16) ist dann definiert durch

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k \phi(2x - k), \quad q_k = (-1)^{1-k} \overline{p_{1-k}}.$$

Sein Träger ist im Intervall $I_\psi = [-(N-1)/2, (N+1)/2]$ enthalten, und es besitzt das “wesentliche Frequenzband”

$$J_\psi = [-\omega_+^*(\psi) - \Delta_+(\psi), -\omega_+^*(\psi) + \Delta_+(\psi)] \cup [\omega_+^*(\psi) - \Delta_+(\psi), \omega_+^*(\psi) + \Delta_+(\psi)].$$

Durch Skalierung und Shift erhalten die Funktionen $\phi_{j,k}$ und $\psi_{j,k}$ die Zeit-Frequenz-Fenster

$$\begin{aligned} W(\phi_{j,k}) &:= 2^{-j}(k + I_\phi) \times 2^j J_\phi, \\ W(\psi_{j,k}) &:= 2^{-j}(k + I_\psi) \times 2^j J_\psi. \end{aligned}$$

Ziel dieses Abschnittes ist die Konstruktion weiterer Familien $\eta_{j,k}$, die bei vergleichbarer Zeitauflösung 2^{-j} einen Teil eines höheren Frequenzbandes $2^{j+L} J_\psi$ liefern. Eine recht einfache Verfahren wird durch die von R. Coifman und V. Wickerhauser vorgeschlagenen *Wavelet-Packets* geliefert.

1. Konstruktion

Zur Konstruktion der Wavelet-Packets dient der folgende Satz zur Zerlegung eines shift-invarianten Raumes.

SATZ 8.1. *Es sei $j \in \mathbb{Z}$. Der Raum X_j sei $2^{-j}\mathbb{Z}$ -shift-invariant und besitze die ONB $\{\theta_{j,k} = \theta_j(\cdot - 2^{-j}k); k \in \mathbb{Z}\}$. Dann definieren die Funktionen*

$$(8.1) \quad \theta_{j-1,k}^0 = 2^{-1/2} \sum_{\ell=0}^N p_\ell \theta_{j,2k+\ell},$$

$$(8.2) \quad \theta_{j-1,k}^1 = 2^{-1/2} \sum_{\ell=-N+1}^1 q_\ell \theta_{j,2k+\ell}$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ ebenfalls eine ONB von X_j . Weiterhin gilt für die Fouriertransformierten von $\theta_{j-1}^i := \theta_{j-1,0}^i$, $i = 0, 1$, die Beziehung

$$(8.3) \quad (\theta_{j-1}^0)^\wedge(\omega) = 2^{1/2} P(2^{-j}\omega) \hat{\theta}_j(\omega), \quad (\theta_{j-1}^1)^\wedge(\omega) = 2^{1/2} Q(2^{-j}\omega) \hat{\theta}_j(\omega).$$

Der Beweis wird ähnlich zu Satz 5.14 geführt. Man beachte, dass beide Familien $\Theta_{j-1}^i = \{\theta_{j-1,k}^i; k \in \mathbb{Z}\}$, $i = 1, 2$, wieder shift-invariant bzgl. $2^{-j+1}\mathbb{Z}$ sind. Setzen wir speziell $\theta_j = 2^{j/2}\phi(2^j\cdot)$ im obigen Satz, so erhalten wir genau die Zerlegung

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$$

der MRA-Wavelets. Wir können aber auch $\theta_j = 2^{j/2}\psi(2^j\cdot)$ verwenden und erhalten so eine neue Zerlegung

$$W_j = W_{j-1}^2 \oplus W_{j-1}^3$$

mit neuen Räumen W_{j-1}^2 und W_{j-1}^3 , die zusammen den Wavelet-Raum W_j ergeben. Der Unterschied wird an Bild 8.1 deutlich. Mit der Notation

$$V_j =: W_j^0, \quad W_j =: W_j^1,$$

ergibt eine rekursive Anwendung von Satz 8.1 Zerlegungen der Form

$$W_j^i = W_{j-1}^{2i} \oplus W_{j-1}^{2i+1}, \quad 0 \leq i < 2^{J-j},$$

die wir im binären Baum in Bild 8.1 darstellen.

Der vollständige binäre Baum in Bild 8.1 beschreibt eine Vielzahl verschiedener Basen des Grundraums $V_J = W_J^0$, der an der Wurzel des Baumes steht. Wir nennen einen binären Baum *zulässig*, wenn jeder Knoten entweder kein oder genau 2 Kinder besitzt. Jeder zulässige Baum der Tiefe $\leq L$ beschreibt dann eine ONB von V_J . Als Basis wählt man die Erzeugendensysteme der Räume, die an den Blättern des jeweiligen Baumes stehen. Zum Beispiel entspricht der Baum im linken Teil von Bild 8.2 der Basis von MRA-Wavelets zu 3 Zerlegungsschritten, also

$$V_J = V_{J-3} \oplus W_{J-3}^1 \oplus W_{J-2}^1 \oplus W_{J-1}^1.$$

Der Baum im rechten Teil von Bild 8.2 beschreibt eine andere Basis, nämlich die zur Zerlegung

$$V_J = V_{J-2} \oplus W_{J-2}^1 \oplus W_{J-2}^2 \oplus W_{J-3}^6 \oplus W_{J-3}^7.$$

Die Anzahl N_L solcher Bäume ist beschränkt durch

$$2^{2^{L-1}} \leq N_L \leq 2^{\frac{5}{4}2^{L-1}}, \quad L \geq 1,$$

vgl. Mallat, Seite 326.

Beweis: Ein zulässiger Baum der Tiefe $1 \leq t \leq L+1$ besteht aus zwei zulässigen Teilbäumen der Tiefe $0 \leq t_1, t_2 \leq L$ in beliebiger Kombination. Also ist

$$N_{L+1} = N_L^2 + 1, \quad L \geq 0,$$

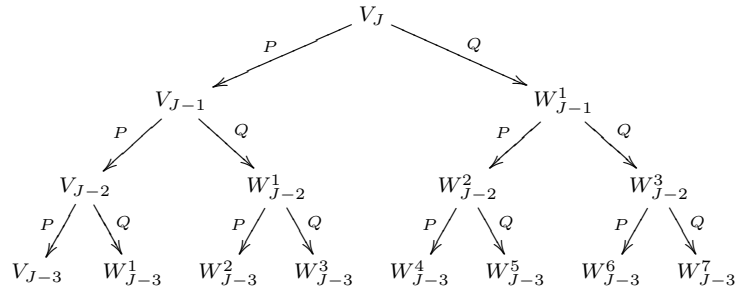


BILD 8.1. Vollständiger binärer Baum zur Wavelet-Packet-Zerlegung

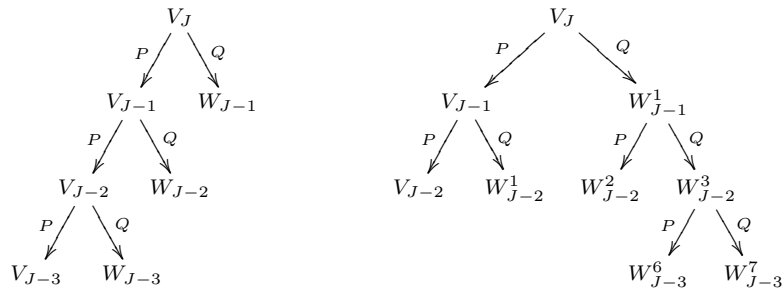


BILD 8.2. Die binären Bäume zur Wavelet-Basis (links) und zu einer weiteren Wavelet-Packet-Basis (rechts)

wobei der letzte Summand den Baum der Tiefe 0 (nur die Wurzel V_J) berücksichtigt. Mit $N_0 = 1$, $N_1 = 2$ folgt für alle $L \geq 1$

$$\log_2 N_L \geq 2 \log_2 N_{L-1} \geq \dots \geq 2^{L-1} \log_2 N_1 \implies N_L \geq 2^{2^{L-1}}.$$

Wegen $N_L \geq N_1 = 2$ folgt für $L \geq 2$ auch

$$\log_2 N_L = 2 \log_2 N_{L-1} + \log_2(1 + N_{L-1}^{-2}) \leq 2 \log_2 N_{L-1} + \log_2(5/4) \leq 2 \log_2 N_{L-1} + 1/4.$$

Per Induktion folgt hieraus

$$\log_2 N_L \leq 2^{L-1} \log_2 N_1 + 1/4 \sum_{j=0}^{L-2} 2^j \leq \frac{5}{4} 2^{L-1},$$

also die obere Abschätzung für alle $L \geq 2$. Die Gültigkeit für $L = 1$ ist sofort klar. \square

Dem binären Baum zur gewählten Basis entspricht eine *Wavelet-Packet-Filterbank*. Bezeichnen wir mit $\Theta_j^i = \{\theta_j^i(\cdot - 2^{-jk}); k \in \mathbb{Z}\}$ die ONB des Raumes W_j^i , $0 \leq i < 2^{J-j}$, so werden die Koeffizienten

$$d_{j,k}^i = \langle f, \theta_j^i(\cdot - 2^{-jk}) \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

der Wavelet-Packet-Zerlegung rekursiv durch Faltung und Downsampling mit den Folgen (p_k) bzw. (q_k) berechnet, die an den Kanten des Weges von der Wurzel (entspricht den Koeffizienten $a_J(f)$) bis zum Knoten W_j^i notiert sind. In vielen Anwendungen wird der vollständige binäre Baum der Wavelet-Packet-Koeffizienten bis zur Tiefe L berechnet. Danach wird durch Vergleich verschiedener Basen die "beste Basis" für die gegebene Funktion f ausgewählt. Der Algorithmus verläuft ganz analog zur Wavelet-Zerlegung in Algorithmus 5.21.

ALGORITHMUS 8.2. Vollständige Wavelet-Packet Zerlegung

Gegeben sei $d_J^0 := a_J = ((f, \theta_{J,k}))_{k \in \mathbb{Z}}$ zur Funktion $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{J,k} \theta_{J,k}$.

Für $j = J - 1, \dots, J - L$ und $0 \leq i \leq 2^{J-j-1} - 1$ berechne

$$(8.4) \quad \begin{aligned} d_{j,k}^{2^i} &= 2^{-1/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{p_m} d_{j+1, 2k+m}^i, \\ d_{j,k}^{2^{i+1}} &= 2^{-1/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{q_m} d_{j+1, 2k+m}^i. \end{aligned}$$

Die Rekonstruktion von $(d_{j,k}^i)_{k \in \mathbb{Z}}$ erfolgt analog zu (5.36)

$$(8.5) \quad d_{j,k}^i = 2^{-1/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (p_{k-2\ell} d_{j-1, \ell}^{2^i} + q_{k-2\ell} d_{j-1, \ell}^{2^{i+1}}).$$

Wir wollen noch die Zeit-Frequenz Konzentration der Basis-Funktionen θ_j^i angeben. Die Trägerlänge von θ_j^i ist

$$\text{diam supp } \theta_j^i = N 2^{-j},$$

stimmt also für alle $0 \leq i < 2^{J-j}$ mit der Trägerlänge von ϕ_j und ψ_j überein. Die Lokalisierung im Frequenzbereich soll in den folgenden Beispielen erläutert werden.

BEISPIEL 8.3. Wir betrachten die Skalierungsfunktion $\theta_J = 2^{J/2} \chi_{2^{-j}[0,1]}$ zum Haar-Wavelet. Hier ist $p_0 = p_1 = 1$, $q_0 = -q_1 = 1$ und $p_k, q_k = 0$ für $k \notin \{0, 1\}$. Der Träger aller Funktionen θ_j^i mit $0 \leq i < 2^j$ ist das Intervall $[0, 2^{-j}]$. Es gilt sogar

$$|\theta_j^i| = 2^{j/2} \chi_{2^{-j}[0,1]}.$$

Der Unterschied zwischen diesen Funktionen liegt in der Vorzeichenverteilung, also dem "Frequenzanteil" von θ_j^i . Für $0 \leq j \leq J = 3$ werden die Funktionen θ_j^i durch ihr Vorzeichen auf den Teilintervallen $I_{3,k} = [k/8, (k+1)/8)$ bestimmt, das in Tabelle 8.1 angegeben ist. Die letzte Spalte enthält die Anzahl der Vorzeichenwechsel. Diese ist mit dem Index i über den Gray-Code verknüpft. Man erkennt, dass die Funktionen θ_0^i , $0 \leq i \leq 7$, die ersten 8 Elemente der Walsh-Basis aus Beispiel 1.14 (in veränderter Reihenfolge) bilden.

BEISPIEL 8.4. Wir betrachten die bandbeschränkte Skalierungsfunktion

$$\theta_J(x) = 2^{-J/2} \frac{\sin 2^J \pi x}{\pi x}$$

mit der Fouriertransformierten $\hat{\theta}_J = 2^{-J/2} \chi_{[-2^J \pi, 2^J \pi]}$. Die Skalierungssymbole von ϕ und ψ lauten

$$P(\omega) = \chi_{[-\pi/2, \pi/2)}(\omega), \quad Q(\omega) = \chi_{[-\pi, -\pi/2)}(\omega) + \chi_{[\pi/2, \pi)}(\omega).$$

Mit der Beziehung (8.3) folgt, dass für festes $j < J$ die Funktionen θ_j^i , $0 \leq i < 2^j$, eine disjunkte Zerlegung des Frequenzbereichs $J_\psi = [-2^j \pi, 2^j \pi]$ liefern. Ordnet man den Frequenzbereich nach wachsendem Betrag $|\omega|$ in die Bereiche

$$K_{j,k} = [-(k+1)2^j \pi, -k2^j \pi) \cup [k2^j \pi, (k+1)2^j \pi), \quad 0 \leq k < 2^j,$$

so ergibt sich der in Tabelle 8.2 dargestellte Träger von θ_j^i . Die Gesamtlänge der anteiligen Frequenzintervalle auf der Stufe j ist konstant, nämlich $2^j 2\pi$. Man

		$I_{3,0}$	$I_{3,1}$	$I_{3,2}$	$I_{3,3}$	$I_{3,4}$	$I_{3,5}$	$I_{3,6}$	$I_{3,7}$	#VZW
$j=3$	$i=0$	+								0
$j=2$	$i=0$	+	+							0
	$i=1$	+	-							1
$j=1$	$i=0$	+	+	+	+					0
	$i=1$	+	+	-	-					1
	$i=2$	+	-	+	-					3
	$i=3$	+	-	-	+					2
$j=0$	$i=0$	+	+	+	+	+	+	+	+	0
	$i=1$	+	+	+	+	-	-	-	-	1
	$i=2$	+	+	-	-	+	+	-	-	3
	$i=3$	+	+	-	-	-	-	+	+	2
	$i=4$	+	-	+	-	+	-	+	-	7
	$i=5$	+	-	+	-	-	+	-	+	6
	$i=6$	+	-	-	+	+	-	-	+	4
	$i=7$	+	-	-	+	-	+	+	-	5

TABELLE 8.1. Haar Wavelet-Packet und Walsh-Funktionen

erkennt also, dass der Skalenindex j nicht mehr als alleiniger Repräsentant des Frequenzbereiches von θ_j^i verwendet werden kann. Vielmehr wird das gesamte Frequenzband der Skalierungsfunktion θ_j durch die Basisfunktionen θ_j^i jeder Stufe komplett abgedeckt. Hierbei hängt der Index i von θ_j^i über den Gray-Code mit dem nach wachsendem $|\omega|$ sortierten Frequenzbereich zusammen.

Die diskrete Wavelet-Packet-Zerlegung auf Intervallen erfordert wieder eine Anpassung am Rand wie in Abschnitt 2. Wir beziehen uns hier auf die Darstellung am Ende des Abschnitts 2. Seien $I_N = \{k/N; 0 \leq k < N\}$ und $\ell^2(I_N)$ mit $N = 2^J$ gegeben. Für jedes $L+1 \leq j \leq J$ sei ferner die orthogonale Matrix \mathcal{W}_{2^j} der Größe $2^j \times 2^j$ wie in (7.11) gegeben, die einen Zerlegungsschritt der Wavelet-Zerlegung mit Randanpassung darstellt, also

$$\mathcal{W}_{2^j}^T a_j = \begin{pmatrix} a_{j-1} \\ d_{j-1} \end{pmatrix}.$$

Dann wird die Wavelet-Packet-Zerlegung zu einer konkreten Basis von V_J durch eine orthogonale Matrix \mathcal{W} beschrieben, die die Faktorisierung

$$\mathcal{W} = \mathcal{X}_J \begin{pmatrix} \mathcal{X}_{J-1}^0 & & & \\ & \mathcal{X}_{J-1}^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{X}_{J-L+1}^{2^{L-1}-1} \end{pmatrix}$$

besitzt. Hierbei ist \mathcal{X}_j^i entweder die Einheitsmatrix \mathcal{I}_{2^j} oder \mathcal{W}_{2^j} . Die Faktoren $\mathcal{X}_j^i = \mathcal{W}_{2^j}$ entsprechen dabei den Knoten des binären Baumes auf der Stufe $J-j$,

Zum Beispiel definiert die Familie der Wavelet-Packet Basen von \mathbb{C}^N mit $N = 2^J$ (oder von $L^2(\mathbb{R})$), die ein binärer Baum der Tiefe L in Bild 8.1 enthält, ein Wörterbuch von \mathbb{C}^N (bzw. $L^2(\mathbb{R})$).

Wir beschränken uns im Folgenden auf den Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$. Der Begriff ‘‘Basis’’ meint im Folgenden immer eine Orthonormalbasis. Für festes $f \in \mathcal{H}$ können wir zwei Basen $\mathcal{B}_1 = \{\eta_k^{(1)}; 0 \leq k < N\}$ und $\mathcal{B}_2 = \{\eta_k^{(2)}; 0 \leq k < N\}$ hinsichtlich ihrer ‘‘Effektivität’’ miteinander vergleichen. Mit $f_{\mathcal{B}_i}^* = (f_{\mathcal{B}_i}^*[k])_{0 \leq k < N}$ bezeichnen wir wieder die betragsmäßig absteigende Folge der Koeffizienten zur Entwicklung

$$f = \sum_{k \in K} f_{\mathcal{B}_i}[k] \eta_k^{(i)}, \quad f_{\mathcal{B}_i}[k] = \langle f, \eta_k^{(i)} \rangle.$$

Dann ist der Fehler der besten M -Term Approximation von f zur Basis \mathcal{B}_i gegeben durch

$$(8.6) \quad \varepsilon_M(f, \mathcal{B}_i) = \left(\sum_{k=M}^{N-1} |f_{\mathcal{B}_i}^*[k]|^2 \right)^{1/2}.$$

DEFINITION 8.6. $f \in \mathcal{H}$ sei fest. Die Basis \mathcal{B}_1 heißt besser (zur Approximation von f) als die Basis \mathcal{B}_2 , wenn

$$\varepsilon_M(f, \mathcal{B}_1) \leq \varepsilon_M(f, \mathcal{B}_2)$$

für alle $1 \leq M \leq N$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $\mathcal{B}_1 \prec \mathcal{B}_2$. Ist \mathcal{D} ein Wörterbuch von \mathbb{C}^N , so definiert ‘ \prec ’ eine partielle Ordnung auf \mathcal{D} . Jedes minimale Element bzgl. dieser Ordnung heißt eine beste Basis (in \mathcal{D} zur Approximation von f).

Als Hilfsmittel zum Vergleich der Güte von zwei Basen setzen wir ein Resultat aus der Analysis ein. Zunächst schreiben wir kurz

$$x_k := \frac{|f_{\mathcal{B}_1}^*[k]|^2}{\|f\|^2}, \quad y_k = \frac{|f_{\mathcal{B}_2}^*[k]|^2}{\|f\|^2}, \quad 0 \leq k < N.$$

Die Parseval-Identität ergibt sofort

$$(8.7) \quad \sum_{k=0}^{N-1} x_k = \sum_{k=0}^{N-1} y_k = 1.$$

SATZ 8.7. (Hardy, Littlewood, Polya)

Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^N$ mit monoton fallenden Koordinaten $x_k \geq x_{k+1} \geq 0$, $y_k \geq y_{k+1} \geq 0$, $0 \leq k < N-1$, und gleicher Summe (8.7) sind äquivalent:

a) Für alle $1 \leq M \leq N$ gilt

$$(8.8) \quad \sum_{k=0}^{M-1} x_k \geq \sum_{k=0}^{M-1} y_k.$$

b) Für jede konkave Funktion $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$(8.9) \quad \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(x_k) \leq \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(y_k).$$

Der Algorithmus von Coifman und Wickerhauser bestimmt nun die “beste” Wavelet-Packet Basis zu $f \in \mathbb{C}^N$ bezüglich **einer** speziellen konkaven Funktion Φ . Man nutzt also nur die Notwendigkeit der Bedingung (8.9) und wählt Φ dazu geeignet aus. Als Kandidaten findet man häufig die *Entropiefunktion*

$$\Phi(x) = -x \ln x,$$

die *Quasi-Normen*

$$\Phi(x) = x^p, \quad 0 < p \leq 1,$$

und die Abzählfunktion (auch als ℓ_0 -Quasinorm bezeichnet)

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zu gegebenem Φ und $f \in \mathbb{C}^N$ wird durch

$$(8.10) \quad C_\Phi(f, \mathcal{B}) := \sum_{k=0}^{N-1} \Phi \left(\frac{|f_{\mathcal{B}}^*[k]|^2}{\|f\|^2} \right)$$

eine *Kostenfunktion* auf dem Wörterbuch \mathcal{D} definiert. Eine beste Basis $\mathcal{B} \in \mathcal{D}$ für f bzgl. Φ ist ein Minimum dieser Kostenfunktion. Man beachte, dass für die Berechnung von $C_\Phi(f, \mathcal{B})$ die Reihenfolge der Koeffizienten $f_{\mathcal{B}}^*[k]$ keine Rolle spielt, auf die Anordnung also verzichtet werden kann.

BEMERKUNG 8.8. *Wir erwähnen einige Eigenschaften der Kostenfunktion. Dazu setzen wir $\alpha_k = \frac{|f_{\mathcal{B}}^*[k]|^2}{\|f\|^2}$, $0 \leq k < N$.*

- a) *Speziell für $\Phi(x) = x$ (also $p = 1$ in der obigen Notation der Quasi-Normen) ergibt die Parseval-Identität $C(f, \mathcal{B}) = \sum_k \alpha_k = 1$ unabhängig von der gewählten ONB \mathcal{B} . Diese Wahl von Φ ergibt also keine Differenzierung zwischen den Wavelet-Packet Basen.*
- b) *Die Konkavität von Φ liefert*

$$C(f, \mathcal{B}) = N \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(\alpha_k) \right) \leq N \Phi \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \right) = N \Phi \left(\frac{1}{N} \right).$$

Meist verwendet man eine konkave Funktion Φ mit $\Phi(0) = 0$. Dann folgt weiterhin

$$C(f, \mathcal{B}) = \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(\alpha_k) \geq \Phi \left(\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \right) = \Phi(1).$$

- c) *Wir betrachten noch den folgenden Spezialfall: Ist f ein Basiselement, also $f = \alpha\psi$ mit $\psi \in \mathcal{B}$, dann gilt*

$$C(f, \mathcal{B}) = \Phi(1) \leq C(f, \mathcal{B}')$$

für jede weitere ONB \mathcal{B}' .

Die Notation der Kostenfunktion $C(f, \cdot)$ wird auf Orthonormalsysteme $\mathcal{B} = \{\psi_0, \dots, \psi_r\} \subset \mathbb{C}^N$ erweitert, indem man

$$C_\Phi(f, \mathcal{B}) := \sum_{k=0}^r \Phi \left(\frac{|\langle f, \psi_k \rangle|^2}{\|f\|^2} \right)$$

setzt. Man beachte hier, dass der Nenner $\|f\|^2$ i.a. größer ist als die Summe der Zähler $\alpha_k = |\langle f, \psi_k \rangle|^2$ (Bessel-Ungleichung).

Der Algorithmus von Coifman und Wickerhauser basiert nun auf folgender Beobachtung. Es sei

$$W_{j+1}^i = W_j^{2i} \oplus W_j^{2i+1}$$

die orthogonale Zerlegung des Raums W_{j+1}^i wie im binären Baum 8.1 dargestellt. Dann haben wir zwei Basen

$$\mathcal{B}_1 := \Theta_{j+1}^i \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_2 := \Theta_j^{2i} \cup \Theta_j^{2i+1}$$

von W_{j+1}^i zur Verfügung. Mit der Notation der Kostenfunktion für Orthonormalsysteme gilt offensichtlich

$$C_\Phi(f, \mathcal{B}_2) = C_\Phi(f, \Theta_j^{2i}) + C_\Phi(f, \Theta_j^{2i+1}).$$

Falls diese Summe kleiner ist als $C_\Phi(f, \mathcal{B}_1)$, so ist die Basis \mathcal{B}_2 dem Knoten W_{j+1}^i zuzuordnen, andernfalls die Basis \mathcal{B}_1 . Ein "Bottom-Up"-Durchlauf des binären Baums in Bild 8.1 ergibt dann die beste Wavelet-Packet Basis zum gegebenen $f \in \mathbb{C}^N$.

ALGORITHMUS 8.9. (*Beste Wavelet-Packet Basis*)

Gegeben:

- $f \in \mathbb{C}^N$ mit $N = 2^J$
- konkave Funktion $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zur Bestimmung der Kostenfunktion sowie
- Kosten der Koeffizientenfolge d_j^i , $0 \leq i < 2^{J-j}$ und $J-L \leq j \leq J$, an jedem Knoten des vollständigen binären Baums in Bild 8.1, also

$$C_j^i = \sum_{k=0}^{2^j-1} \Phi \left(\frac{|d_j^i[k]|^2}{\|d_j^i\|^2} \right).$$

Gesucht: Wavelet-Packet Basis \mathcal{B} mit minimaler Kostenfunktion $C_\Phi(f, \mathcal{B})$

Initialisierung: Setze

$$\mathcal{B}_{J-L}^i = \Theta_{J-L}^i, \quad 0 \leq i < 2^L.$$

Iteration: Für $j = J-L+1, \dots, J$ und $0 \leq i < 2^{J-j} - 1$

falls $C_j^i \leq C_{j-1}^{2i} + C_{j-1}^{2i+1}$

setze $\mathcal{B}_j^i = \Theta_j^i$,

sonst setze $\mathcal{B}_j^i = \mathcal{B}_{j-1}^{2i} \cup \mathcal{B}_{j-1}^{2i+1}$,

$$C_j^i = C_{j-1}^{2i} + C_{j-1}^{2i+1}$$

end

Dann ist $\mathcal{B} = \mathcal{B}_J^0$ beste Basis zu f bezüglich Φ mit Kosten C_J^0 .

Der Algorithmus wählt je nach Vorgabe von Φ geeignete Zeit-Frequenz-Atome zur Darstellung von f .