Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl.-Math. T. Kloos

Dortmund, 27.11.2013

Höhere Mathematik I (P/MP/ET/IT/I-I)

7. Übungsblatt

Abgabetermin: 05.12.2013, 12:00

Aufgabe 1

a) Entscheiden und begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind linear abhängig.

(ii) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ bilden genau dann eine Basis ihres Aufspanns, wenn sie linear unabhängig sind.

b) Zeigen Sie, dass

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Schreiben Sie $(1, 3, -1)^T$ in der Form $u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 + u_3\vec{a}_3$.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie eine Basis von

$$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

und geben Sie die Dimension an.

b) Prüfen Sie, ob der Vektor $(1, 1, 1)^T$ im Aufspann aus Teil a) liegt.

c) Ergänzen Sie die in Aufgabenteil a) gefundene Basis zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3

Es sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm. Beweisen Sie

a) die Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad x, y \in V,$$

b) die Polarisationsformel

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), \quad x, y \in V.$$

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass durch $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 9x_1y_1 + 4x_2y_2$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird.

b) Bestimmen Sie die zugehörige Norm auf $\mathbb{R}^2$ und zeichnen Sie alle Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\vec{x}\| \leq 1$.

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter
  `http://www.mathematik.tu-dortmund.de/hm/`