Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl.-Math. T. Kloos

Dortmund, 17.12.2013

Höhere Mathematik I (P/MP/ET/IT/I-I)

10. Übungsblatt

Abgabetermin: 09.01.2014, 12:00

Aufgabe 1

Es sei $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{E}_3$ die kanonische Basis und $\mathcal{A} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$, wobei $\vec{v_1} = (1,2,1)^T, \vec{v_2} = (1,-1,1)^T, \vec{v_3} = (1,0,-1)^T$. Weiter sei

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & -2+2\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \\ -2-2\sqrt{2} & 2+2\sqrt{2} & -2+4\sqrt{2} \\ 2-3\sqrt{2} & -2 & 2+3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und $F : V \to V$ die durch $F(\vec{v}) = A\vec{v}$ definierte lineare Abbildung. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen von F bezüglich $\mathcal{E}_3$ und $\mathcal{A}$.

Aufgabe 2

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 2 \\ -18 & -9 & -8 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

b) Entscheiden und begründen Sie, ob A diagonalisierbar ist. Geben Sie gegebenfalls die entsprechende Diagonalmatrix an.

Aufgabe 3

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

b) Geben Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an. Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 4

Beweisen Sie: Falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ einen nichtreellen Eigenwert λ besitzt, so ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A und es gilt

$$V_{\overline{\lambda}} = \{\overline{v} \mid v \in V_\lambda\}.$$

Hierbei ist $\overline{v}$ der Vektor, dessen Komponenten komplex konjugiert zu den Komponenten von v sind.

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter
  `http://www.mathematik.tu-dortmund.de/hm/`