1 Grundlagen und Zahlenmengen

1.1 Zahlenmengen

$\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen: $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$

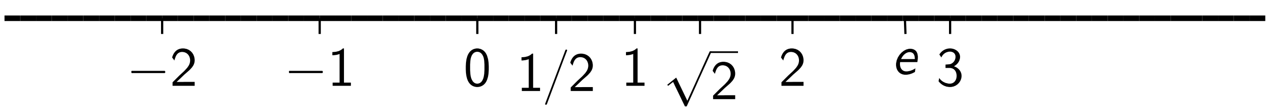
$\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen: $\{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$

$\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen: $\left\{\dfrac{m}{n};\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

$\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen

Zur Veranschaulichung dient die Zahlengerade.



Jedem Punkt auf der Zahlengeraden entspricht genau eine reelle Zahl, und umgekehrt.

1.2 Summen- und Produktzeichen

Für ganze Zahlen $m \leqslant n$ bedeutet:

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

$$\prod_{j=m}^{n} a_j = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n.$$

Für jede reelle (oder komplexe) Zahl x definieren wir $x^0 := 1$.

Als Sonderfall für $m > n$ wird vereinbart:

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = 0, \qquad \prod_{j=m}^{n} a_j = 1.$$

1.3 Fakultät und Binomialkoeffizient

- Für $n \in \mathbb{N}$ ist
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{j=1}^{n} j$$
die *Fakultät von n* (kurz *"n-Fakultät"*); wir setzen außerdem $0! = 1$.
- Für ganzzahlige $n \geqslant 0$ und $0 \leqslant k \leqslant n$ ist
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$
der *Binomialkoeffizient n über k*.

Die Binomialkoeffizienten erfüllen die Regeln:

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; speziell $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

(ii) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ für $0 \leqslant k \leqslant n-1$

Eine wichtige Beweismethode ist das folgende Prinzip.

1.4 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Für jede natürliche Zahl n sei eine Aussage $A(n)$ formuliert. Wenn wir beweisen können, dass die folgenden beiden Aussagen gelten:

(i) $A(1)$ ist wahr. (**Induktionsanfang**)

(ii) Wenn für eine natürliche Zahl n die Aussage $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr. (**Induktionsschluss** von n auf $n+1$)

Dann ist bewiesen, dass die Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl n wahr ist.

1.5 Beispiele: (a) Einfache Summenformeln

Behauptung: Für jede natürliche Zahl n gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

1.6 (b) Anzahl der Permutationen

Behauptung: Für jede natürliche Zahl n gibt es genau $n!$ verschiedene Möglichkeiten, die Zahlen $1,\ 2,\ 3, \ldots, n$ anzuordnen.

(Anders ausgedrückt: es gibt genau $n!$ **Permutationen** von n verschiedenen Dingen.)

1.7 (c) Anzahl der Kombinationen

Behauptung: Für jede natürliche Zahl n und jede ganze Zahl $0 \leqslant k \leqslant n$ gibt es genau $\binom{n}{k}$ verschiedene Möglichkeiten,
k verschiedene natürliche Zahlen zwischen 1 und n auszuwählen (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge; siehe Lotto 6 aus 49).

Mit anderen Worten: Eine Menge mit n Elementen hat genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit k Elementen.

1.8 (d) Binomischer Satz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}.$$

1.9 (e) Geometrische Summenformel

Für beliebiges $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

1.10 (f) Varianten des Induktionsbeweises

- Als Induktionsanfang beweist man $A(n_0)$ für ein $n_0 \in \mathbb{Z}$. Gilt dann der Induktionsschluss von n nach $n+1$ für jedes $n \geqslant n_0$, so ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \geqslant n_0$ bewiesen (siehe Übungen).
- Als Voraussetzung für den Induktionsschluss von n nach $n+1$ darf man verwenden, dass $A(k)$ wahr ist für alle $n_0 \leqslant k \leqslant n$.

1.11 Beweise

Direkter Beweis
Wir wollen beweisen, dass eine Aussage A wahr ist.

Der direkte Beweis würde A aus einer (bekanntermassen) wahren Aussage B herleiten oder A äquivalent in eine wahre Aussage B überführen

$$\text{Schema 1: wahre Aussage } B \Longrightarrow \text{Aussage } A$$

$$\text{Schema 2: Aussage } A \Longleftrightarrow \text{wahre Aussage } B$$

Widerspruchsbeweis

Man bezeichnet mit $\neg A$ das Gegenteil der Aussage A.

$$\text{Schema : } (\neg A \Longrightarrow \text{Widerspruch zu } \neg A) \Longrightarrow A \text{ wahr}$$

Da aus etwas Wahrem nichts Falsches folgen kann, muss $\neg A$ falsch sein und damit A wahr.

Indirekter Beweis

Ist die Aussage B als wahr bekannt, und hat man $\neg A \Longrightarrow \neg B$, so ist A wahr.

$$(B \text{ wahr und } (\neg A \Longrightarrow \neg B) \Longrightarrow A \text{ wahr}$$

Diese Methode beweist man mit dem Widerspruchsbeweis:
Ist A falsch, dann ist $\neg A$ wahr, und damit auch $\neg B$. Dann müsste B falsch sein, was aber der Voraussetzung B wahr widerspricht.

1.12 Beispiele

Behauptung: Sei n eine ganze Zahl und n^2 durch 3 teilbar.
Dann ist n durch 3 teilbar.

Irrationale Zahlen

Behauptung: Es gibt reelle Zahlen, die nicht rational (also keine Brüche ganzer Zahlen) sind. Solche Zahlen heißen **irrational**.

Achtung: Das Aufstellen des Gegenteils der Aussage A ist häufig schwierig (“Negation”).

Die Eigenschaften der reellen Zahlen

1.13 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper

Für die Addition reeller Zahlen gilt:

(A1) Zu je zwei reellen Zahlen a, b gibt es genau eine reelle Zahl $a + b$, die **Summe** von a und b.

Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

(A2) $a + b = b + a$ (Kommutativität)

(A3) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativität)

(A4) Es gibt genau eine reelle Zahl 0 mit der Eigenschaft: $a + 0 = 0 + a = a$ für jede reelle Zahl a.

(A5) Für jede reelle Zahl a gibt es genau eine reelle Zahl $-a$ mit der Eigenschaft: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Für die Multiplikation reeller Zahlen gilt:

(M1) Zu je zwei reellen Zahlen a, b gibt es genau eine reelle Zahl $a \cdot b$ (geschrieben ab), das **Produkt** von a und b.

Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

(M2) $ab = ba$ (Kommutativität)

(M3) $(ab)c = a(bc)$ (Assoziativität)

(D) $(a + b)c = ac + bc$ (Distributivität)

(M4) Es gibt genau eine reelle Zahl 1 mit der Eigenschaft: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ für jede reelle Zahl a

(M5) Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ gibt es genau eine reelle Zahl a^{-1} (geschrieben $\frac{1}{a}$) mit der Eigenschaft: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Bemerkungen:

- Schreibweise der Subtraktion: $a+(-b)=a-b$
- Schreibweise der Division und Brüche: $ab^{-1}=a/b=\frac{a}{b}$, falls $b\neq 0$.
- Das 2. Distributivgesetz $a(b+c)=ab+ac$ folgt aus (D) und (M2).

1.14 Die Axiome der Anordnung in $\mathbb{R}$

(O1) Es gibt eine Relation “ $<$ ”(kleiner) in $\mathbb{R}$, so dass für je zwei reelle Zahlen a, b genau eine der drei folgenden Aussagen gilt:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad \text{oder} \qquad b < a$$

Die Relation “ $<$ ”hat die folgenden Eigenschaften:

(O2) Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$ (Transitivität)

(O3) Aus $a < b$ folgt für alle reellen c : $a + c < b + c$

(O4) Aus $a < b$ folgt für alle reellen c mit $0 < c$: $ac < bc$

Schreibweisen: $b > a$ (b größer a) bedeutet $a < b$, entsprechend $a \leqslant b$ (a kleiner oder gleich b) und $b \geqslant a$ (b größer oder gleich a)

1.15 Rechenregeln für Ungleichungen

Für reelle Zahlen a, b, c, d folgt aus den Axiomen (O1) bis (O4):

(a) $a < b \quad \wedge \quad c < d \quad \Longrightarrow \quad a + c < b + d$

(b) $a < b \quad \wedge \quad c < 0 \quad \Longrightarrow \quad ac > bc$

(c) $1 > 0$

(d) $0 < a < b \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

(e) $ab > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a > 0 \ \wedge \ b > 0) \ \vee \ (a < 0 \ \wedge \ b < 0)$

$ab < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a > 0 \ \wedge \ b < 0) \ \vee \ (a < 0 \ \wedge \ b > 0)$

(f) Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ ist $a^2 > 0$.

(g) Für $a > 0$ und $b > 0$ gilt: $\quad a < b \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 < b^2$

Die Symbole $\wedge$ (“und”), $\vee$ (“oder”) sind Verknüpfungen aus der Aussagenlogik.

Die Charakterisierung der reellen Zahlen

1.16 Archimedisches Axiom

Zu jeder reellen Zahl a gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n$.
Oder gleichbedeutend damit: Zu jeder reellen Zahl $\epsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$.

1.17 Vollständigkeitsaxiom, "Dedekindscher Schnitt"

Die Mengen A und B seien nichtleere Mengen reeller Zahlen. Für jedes $a \in A$ und jedes $b \in B$ gelte $a \leqslant b$ (anschaulich: A liegt links auf der Zahlengeraden von B.) Dann gibt es mindestens eine reelle Zahl c, so dass für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt

$$a \leqslant c \leqslant b.$$

Die Körperaxiome 1.13, Anordnungsaxiome 1.14, sowie die beiden letzten Axiome charakterisieren die Menge $\mathbb{R}$; d.h. $\mathbb{R}$ ist der einzige vollständige, archimedische angeordnete Körper.

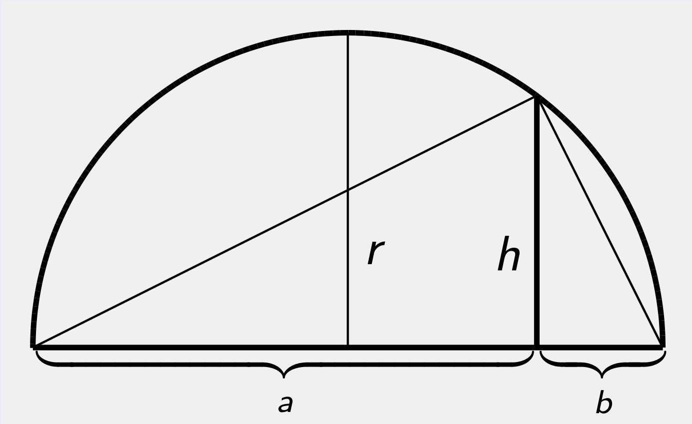
Frage: $\mathbb{Q}$ ist ein archimedischer angeordneter Körper. Man finde ein Beispiel von Mengen $A, B \subset \mathbb{Q}$, die zeigen, dass das Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{Q}$ nicht gilt.

Wichtige Ungleichungen der Analysis

1.18 Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

Sind a und b positive reelle Zahlen, so gilt

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$



$$r = \frac{a+b}{2}$$
$$h = \sqrt{ab}$$

1.19 Bernoullische Ungleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geqslant -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

1.20 Cauchy-Schwarz Ungleichung

Für beliebige reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\,\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$$

1.21 Absolutbetrag und Signumsfunktion

Für jede reelle Zahl a definieren wir

(i) den **Absolutbetrag** oder **Betrag** $$|a| = \begin{cases} a & , \text{ wenn } a \geqslant 0, \\ -a & , \text{ wenn } a < 0. \end{cases}$$

(ii) das **Signum** (Vorzeichen) $$\operatorname{sign}(a) = \begin{cases} 1 & , \text{ wenn } a > 0, \\ 0 & , \text{ wenn } a = 0, \\ -1 & , \text{ wenn } a < 0. \end{cases}$$

- Der Absolutbetrag $|a|$ ist der Abstand auf der Zahlengeraden von a zum Nullpunkt.
- Der Abstand von zwei Zahlen a und b auf der Zahlengeraden ist $|a - b|$.
- Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $|a| = \sqrt{a^2}$.

1.22 Rechnen mit Beträgen

Für alle reellen Zahlen a, b gilt

(a) $|a| \geqslant 0, \quad \text{und } (|a| = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0);$

(b) $|ab| = |a|\,|b|;$

(c) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \quad \text{falls } b \neq 0;$

(d) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

(e) $|a+b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$

(f) $(|a| = |b| \;\Leftrightarrow\; a^2 = b^2), \qquad (|a| < |b| \;\Leftrightarrow\; a^2 < b^2)$

Für reelle Zahlen a_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, folgt aus (d) per Induktion die verallgemeinerte Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_j|$$

Die komplexen Zahlen

Die quadratische Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung, denn für jede reelle Zahl x gilt $x^2 + 1 > 0$ (nach 1.15(c),(f)).

1.23 Definition von $\mathbb{C}$

Zu den reellen Zahlen fügen wir die “Zahl” i (=“imaginäre Einheit”) hinzu, für die gilt $i^2 = -1$.

Dann ist die Menge

$$\mathbb{C} = \{a + bi \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

der **komplexen Zahlen** abgeschlossen bezüglich der Addition und Multiplikation: Für komplexe Zahlen $z = a + bi$ und $w = c + di$ setzen wir

$$\begin{aligned} z + w &= (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \\ zw &= (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

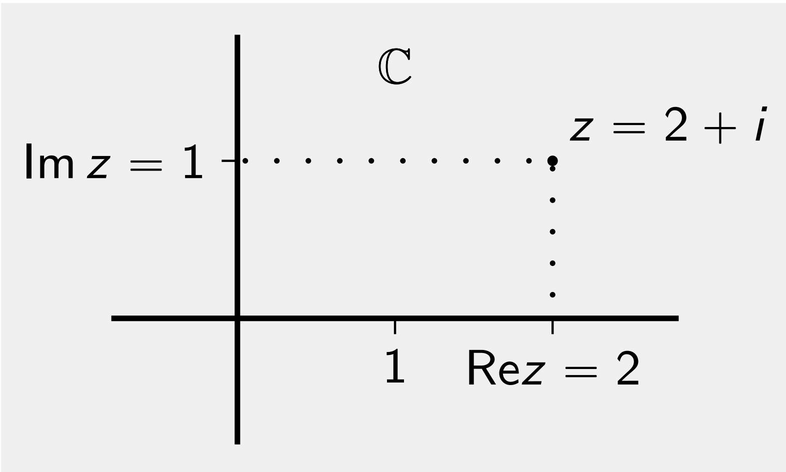
1.24 Die Gaußsche Zahlenebene

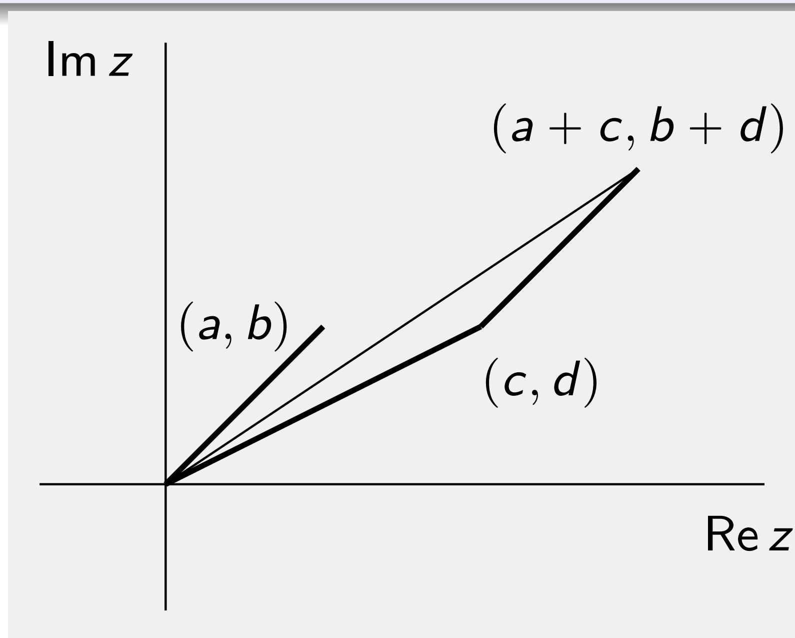
Jede komplexe Zahl $z = a + bi$ entspricht genau einem geordneten Paar (a, b) reeller Zahlen, mit $a = \mathrm{Re}\,(z)$ und $b = \mathrm{Im}\,(z)$.
Dieses Paar (a, b) wird als Punkt in der Ebene dargestellt. Dabei sind (a, b) die *kartesischen Koordinaten* von $z = a + bi$.

1.25 Addition in $\mathbb{C}$

Die Addition $z + w$ komplexer Zahlen entspricht der “Vektoraddition”:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad \sim \quad (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$





Es sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl, $a, b \in \mathbb{R}$.

- $a = \operatorname{Re}(z)$ heißt *Realteil* von z,
  $b = \operatorname{Im}(z)$ heißt *Imaginärteil* von z.
  Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn Realteil und Imaginärteil übereinstimmen.
- $\overline{z} = a - bi$ heißt die *konjugiert komplexe* Zahl (sprich "z-quer").
  Es gilt $\quad \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt der *Absolutbetrag* von z.
  Es gilt $\quad |z| = \sqrt{z\overline{z}}$.
- Für $z \neq 0$ ist $|z| > 0$. Durch die Gleichung

$$z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1 \quad (= 1 + 0i).$$

  ist der Kehrwert von $z \neq 0$ definiert als $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Bemerkung: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ wird durch die Identität $a = a + 0i$ geklärt. Also ist $z \in \mathbb{C}$ genau dann reell, wenn $z = \overline{z}$ gilt.

1.26 $\mathbb{C}$ ist Körper

Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit der Addition und Multiplikation aus 1.23 ist ein Körper.

Das heißt im Einzelnen:

- es gelten die Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze,
- das neutrale Element der Addition ist $0 = 0 + 0i$, das der Multiplikation ist $1 = 1 + 0i$,
- zu $z = a + bi$ ist $-z = -a - bi$; falls $z \neq 0$, so ist

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

1.27 Beispiele

(a) Berechnen von Real- und Imaginärteil:

$$z = \frac{3+i}{(1-3i)^2} = \frac{3+i}{1-6i-9} = \frac{3+i}{-8-6i}$$

(b) Es gilt $|z| = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{z} = \overline{z}$.

1.28 Weitere Rechenregeln in $\mathbb{C}$

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

(a) $0 \cdot z = z \cdot 0 = 0$ und $(zw = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0 \vee w = 0)$.

(b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, falls $w \neq 0$.

(c) $|z| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 0$.

(d) $|zw| = |z|\,|w|, \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, falls $w \neq 0$.

(e) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

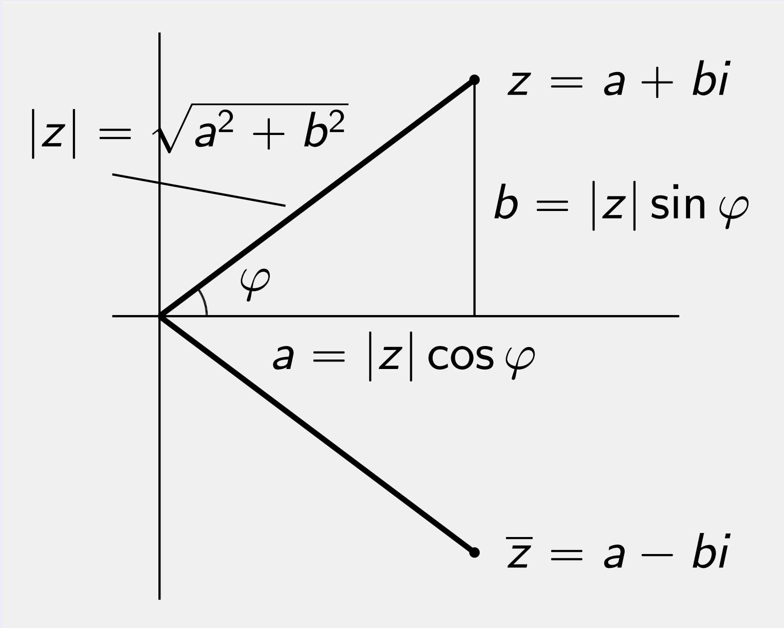
(f) $|z \pm w| \geqslant \big||z| - |w|\big|$

Für die Multiplikation, Division, Potenzen und Wurzeln eignet sich eine andere geometrische Beschreibung der komplexen Zahlen besser.

1.29 Polarkoordinaten in $\mathbb{C}$

Die komplexe Zahl $z = a + bi$ hat die **Polarkoordinaten**

- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *Betrag*
  Das ist der Abstand zu 0
- φ *Argument*
  Das ist der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und der Strecke von 0 zu z.
  Dabei ist $-\pi < \varphi <= \pi$



Die Darstellung von z in Polarkoordinaten lautet

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Hierbei ist zu beachten:

- alle Winkel werden im **Bogenmaß** (Einheit rad) gemessen, wobei π rad dem Winkel 180^o entspricht. Umrechnung:

  α^o (α Grad) entspricht $\varphi = \dfrac{\alpha\pi}{180}$ rad

- Die Zuordnung

$$(a, b) \longleftrightarrow (r, \varphi)$$

  ist für $(a, b) \neq (0, 0)$ eineindeutig. Die Umrechnungen lauten

$$\begin{aligned} a &= r\cos\varphi \\ b &= r\sin\varphi \\[1em] r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi &= \begin{cases} \arccos(a/r), & \text{falls } b \geqslant 0, \\[1em] -\arccos(a/r), & \text{falls } b < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

  Hierbei wird der Hauptwert des Arcus-Cosinus mit Werten $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$ verwendet.

1.30 Rechenoperationen in $\mathbb{C}$

Für $z, w \in \mathbb{C}$ mit $\varphi = arg(z)$, $\psi = arg(w)$, gilt:

- Multiplikation:

$$z \cdot w = |z|\,|w|\,(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))\,.$$

  (Multiplikation der Beträge und Addition der Argumente)

- Division für $w \neq 0$:

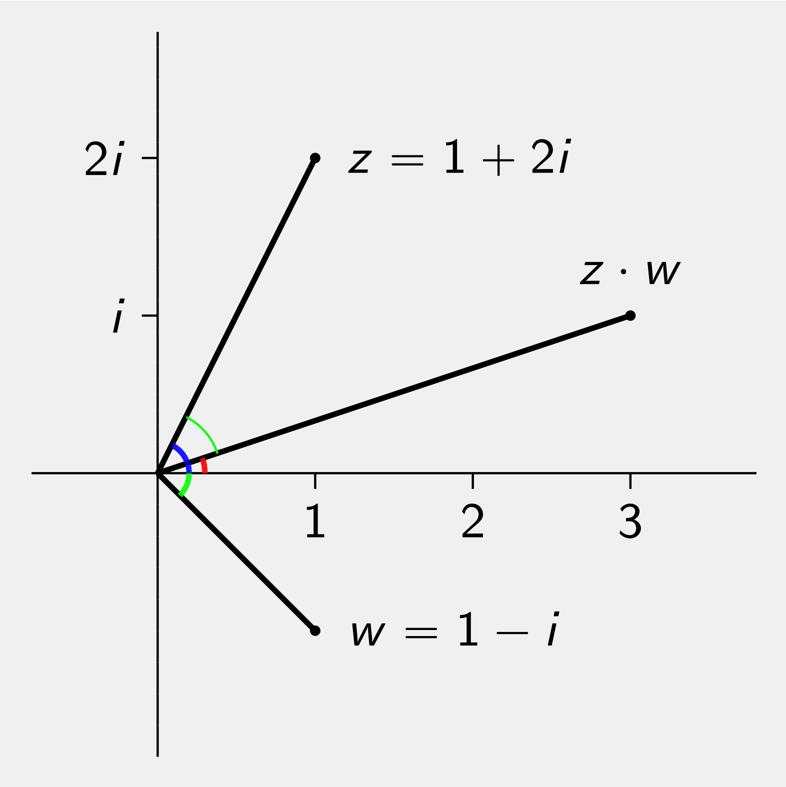
$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\,(\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))\,.$$

  (Division der Beträge und Subtraktion der Argumente)

- Konjugation:

$$\overline{z} = |z|\,(\cos\varphi - i \sin\varphi) = |z|\,(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))\,.$$

  (Spiegelung an der reellen Achse)



Mit $z \cdot w = (1+2i)(1-i) = 3+i$ ist

$$|z| = \sqrt{5},\ \varphi_z \approx 63^\circ$$
$$|w| = \sqrt{2},\ \varphi_w = -45^\circ$$
$$|zw| = \sqrt{10},\ \varphi_{zw} \approx 18^\circ$$

1.31 Eulersche Formel

Wir setzen zunächst nur formal (als Kurzschreibweise)

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

wobei e die Eulersche Zahl ($\approx 2.7182...$) ist.

Dann ist durch

$$z = |z|e^{i\varphi}, \quad w = |w|e^{i\psi} \quad \Longrightarrow \quad z \cdot w = |z|\ |w|e^{i(\varphi+\psi)}$$

bereits eine Eigenschaft der "Exponentialfunktion" ausgedrückt, die wir später noch allgemein herleiten werden. Die Exponential-Schreibweise erleichtert den Umgang mit den Polarkoordinaten (verwende die üblichen Potenzgesetze).

Als direkte Folgerung der Multiplikationsregel ergibt sich:

1.32 Moivresche Formel

Für $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$z^n = |z|^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big) = |z|^n\ e^{in\varphi}.$$

Die komplexen Zahlen vom Betrag 1 haben die Form $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Für spezielle Winkel ergeben sich die sogenannten Einheitswurzeln.

1.33 Die n-ten Einheitswurzeln

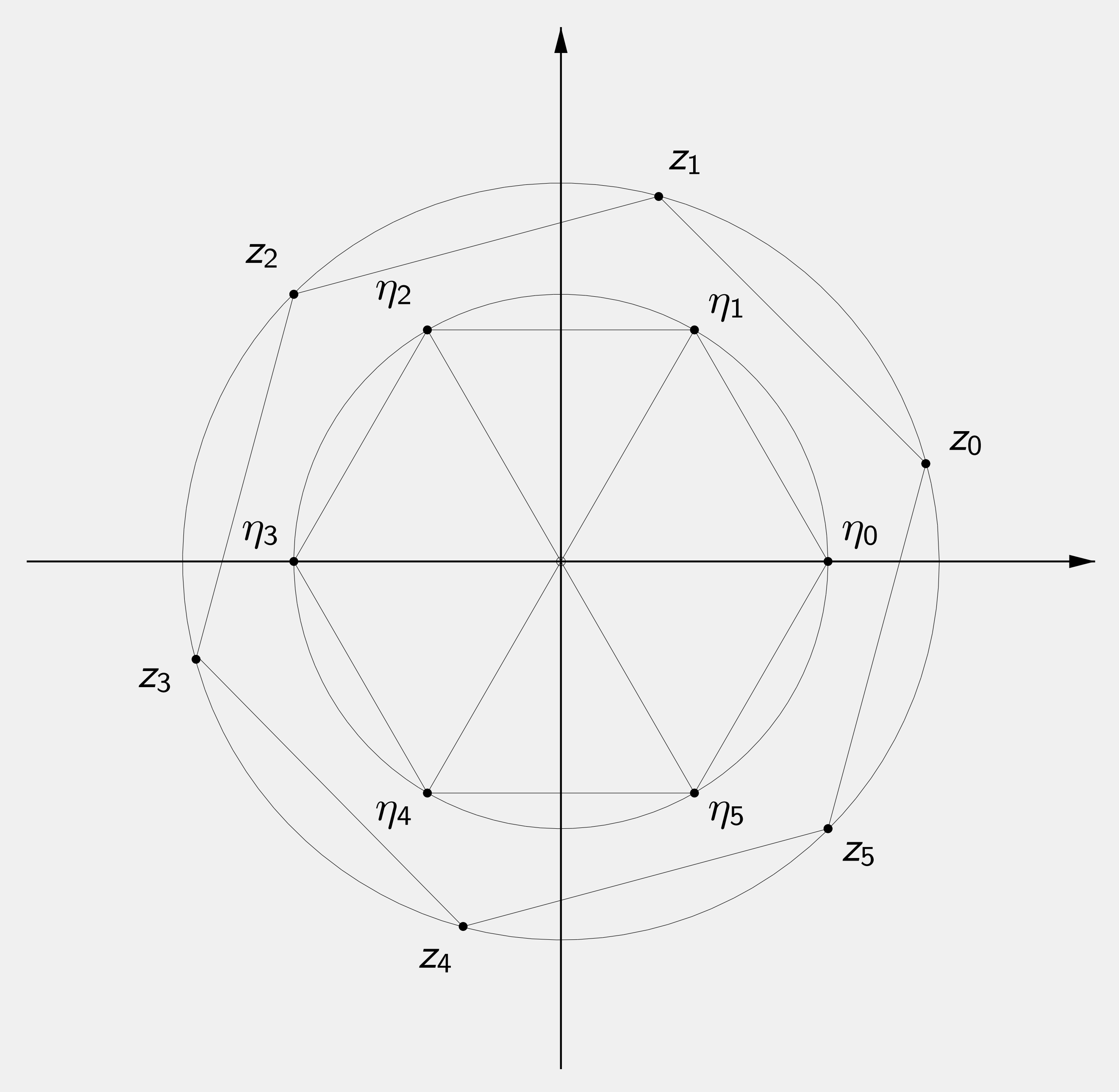
Sei n eine natürliche Zahl. Die komplexen Zahlen

$$\eta_k = e^{i2\pi k/n} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

heißen die ***n*-ten Einheitswurzeln**; durch sie sind sämtliche komplexe Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1$$

gegeben.



Die sechsten Einheitswurzeln η_0 bis η_5 und die Lösungen von $z^6 = 8i$.

1.34 Die n-ten Wurzeln in $\mathbb{C}$ Satz:

Zu $w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ sind sämtliche Lösungen der Gleichung $\boxed{z^n = w}$ gegeben durch die n komplexen Zahlen

$$z_k = |w|^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right) \text{ mit } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ist z eine beliebige Zahl mit $z^n = w$, so sind alle Lösungen durch $z_k = z \cdot \eta_k$ gegeben.

Schreibweise: Die *komplexe* Wurzel $\sqrt[n]{w}$ oder $w^{1/n}$ bezeichnet die Gesamtheit aller n verschiedenen n-ten Wurzeln von w.
(Im Gegensatz zum Reellen: $\sqrt{9} = 3$, und nicht -3.)

1.35 Beispiel:

Die 3-ten Wurzeln von $w = i = e^{i\pi/2}$

2 Mengen und Funktionen

2.1 Grundbegriffe der naiven Mengenlehre

(Georg Cantor 1845-1918)
Eine *Menge* ist die Zusammenfassung von verschiedenen Objekten (den *Elementen*) zu einem neuen Objekt.

Eine Menge M wird definiert durch genaue Angabe ihrer Elemente:

- aufzählende Form:
  - $M_1 = \{1, 2, 3\}$ (*endliche* Menge)
  - $M_2 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ (*unendliche* Menge)
- beschreibende Form (anhand eines "Prädikats", das die Elemente charakterisiert:
  - $M_2 = \{n \mid n \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad n \text{ ist gerade}\}$
  - $M_3 = \{z \mid z \in \mathbb{C} \quad \wedge \quad \mathrm{Re}(z) > 0\}$ "rechte Halbebene"

Die Menge ohne Elemente heißt die *leere Menge* und wird mit dem Symbol $\varnothing$ bezeichnet.

2.2 Mengentheoretische Begriffe

- $x \in M$ bedeutet "x ist Element der Menge M";
  $x \notin M$ bedeutet "x ist kein Element der Menge M"
- Die Menge M heißt *Teilmenge* der Menge N (geschrieben $M \subseteq N$), wenn gilt: $\quad x \in M \;\Rightarrow x \in N$.
  M heißt *echte* Teilmenge von N (geschrieben $M \subsetneq N$), falls $M \subseteq N \;\wedge\; M \neq N$ gilt.
- Man beachte: $M = N \iff (M \subseteq N \;\wedge\; N \subseteq M)$.
- Die *Vereinigung* der Mengen M und N ist
  $M \cup N = \{x \mid x \in M \;\vee\; x \in N\}$
- Der *Durchschnitt* der Mengen M und N ist
  $M \cap N = \{x \mid x \in M \;\wedge\; x \in N\}$
- Die *Mengendifferenz* M "ohne" N (auch Komplement von N in M) ist
  $M \backslash N = \{x \mid x \in M \;\wedge\; x \notin N\}$

2.3 Rechenregeln für Mengen

Für Mengen A, B, C gelten die *Distributivgesetze*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

sowie die *de Morganschen Regeln*

$$C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B), \qquad C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B).$$

2.4 Intervalle

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$ sind

- das abgeschlossene Intervall $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
- das offene Intervall $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- die halboffenen Intervalle $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ und $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$

definiert. Weiterhin sind

- die *unbeschränkten abgeschlossenen Intervalle* $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$ und $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$,
- die *unbeschränkten offenen Intervalle* $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ und $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

definiert.

- Für $a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ heißt das offene Intervall $U_\epsilon(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ die ϵ-Umgebung von a.

2.5 Definition: obere Schranke, Supremum

M sei eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$.

- Existiert eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ so, dass $x \leqslant b$ für alle $x \in M$ gilt, so heißt b eine *obere Schranke* von M, und M heißt *nach oben beschränkt*.

- Das Vollständigkeitsaxiom von $\mathbb{R}$ ist äquivalent zu der folgenden Aussage: Falls die Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist, so gibt es eine **kleinste obere Schranke** s von M. Die Zahl s heißt *Supremum* von M, geschrieben $s = \sup M$.
  Es gilt
  $$x \leqslant \sup M \quad \text{für alle } x \in M,$$
  jedoch existiert für jedes $\epsilon > 0$ mindestens ein $x \in M$ mit $x > \sup M - \epsilon$.

Analog definiert man:

2.6 Definition: Untere Schranken, Infimum

M sei eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$.

- Existiert eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, dass $x \geqslant a$ für alle $x \in M$ gilt, so heißt a eine *untere Schranke* von M, und M heißt *nach unten beschränkt*.
- Die größte untere Schranke von M heißt das *Infimum* von M, geschrieben $\inf M$.
- Ist M nach oben und unten beschränkt, so heißt M *beschränkt*; dann gilt

$$\inf M \leqslant x \leqslant \sup M \quad \text{für alle } x \in M.$$

2.7 Definition: Kartesisches Produkt

Zu nichtleeren Mengen A und B definieren wir das *kartesische Produkt*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, \;\; b \in B\} \qquad \text{(sprich “}A \text{ kreuz } B\text{”)}$$

als die Menge der geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

- Es gilt $(a, b) = (c, d)$ genau dann, wenn $a = c$ und $b = d$ gilt.

Beispiele:

- Das Rechteck $[0, 3] \times [1, 2]$ enthält geordnete Zahlenpaare. Es ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Die Menge $M :=$ {Sonntag, Montag, ..., Samstag} $\times$ {Sonne, Regen, Nebel} enthält 21 geordnete Paare der Form (Wochentag, Wetter).

2.8 Relation

Gegeben seien nichtleere Mengen A und B. Eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ nennen wir eine *Relation* von A nach B. Die Menge

$$D(R) := \{a \in A \mid \text{es existiert mindestens ein Paar } (a, b) \in R\}$$

heißt die *Urbildmenge*, und die Menge

$$I(R) := \{b \in B \mid \text{es existiert mindestens ein Paar } (a, b) \in R\}$$

heißt die *Bildmenge* der Relation.

2.9 Definition: Abbildung, Funktion

Gegeben seien nichtleere Mengen A und B. Eine *Funktion* (oder *Abbildung*) f *von A nach B* ist eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ genau ein Element $b = f(a) \in B$ zuordnet. Wir schreiben

$$f : A \to B, \qquad a \mapsto f(a).$$

- A heißt der *Definitionsbereich*, B heißt der *Wertebereich* von f.
- $b = f(a)$ heißt das *Bild* von f an der Stelle a (oder auch Bild von a unter f).
- Für eine Teilmenge $M \subseteq A$ heißt $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\} \subseteq B$ das *Bild von M unter f*. Die Menge $f(A)$ ist die Bildmenge von f.
- Für eine Teilmenge $N \subseteq B$ heißt $f^{-1}(N) = \{x \in A \mid f(x) \in N\} \subseteq A$ das *Urbild von N unter f*.
- Der *Graph* von f ist die Menge

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B.$$

2.10 Definition: Einschränkung, Verkettung

Es seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ Funktionen.

- Für eine Teilmenge $M \subseteq A$ definieren wir die *Einschränkung* von f

  $$f|_M : M \to B, \qquad x \mapsto f(x).$$

  f heißt dann *Fortsetzung* von $f|_M$.

- Für den Fall $B \subseteq C$ definieren wir die *Hintereinanderausführung* (oder Verkettung oder Komposition)

  $$g \circ f : A \to D, \qquad x \mapsto g(f(x)).$$

2.11 Definition: injektiv, surjektiv, bijektiv

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

(a) *injektiv*, wenn es zu jedem $y \in B$ höchstens ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$,

(b) *surjektiv*, wenn es zu jedem $y \in B$ mindestens ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$,

(c) *bijektiv*, wenn es zu jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$.

2.12 Definition: Umkehrfunktion

Wenn $f : A \to B$ bijektiv ist, so ist die *Umkehrfunktion* $f^{-1} : B \to A$ definiert durch

$$f^{-1}(b) = a \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(a) = b.$$

- Der Graph der Umkehrfunktion ist

$$\mathrm{Graph}(f^{-1}) = \{(b, f^{-1}(b)) \mid b \in B\} = \{(f(a), a) \mid a \in A\}.$$

- Für reelle Funktionen (also $A, B \subseteq \mathbb{R}$) ist $\mathrm{Graph}(f^{-1})$ die Spiegelung von $\mathrm{Graph}(f)$ an der 1. Winkelhalbierenden im (x, y)-Koordinatensystem.

2.13 Definition: Monotonie

$A, B \subset \mathbb{R}$ seien nichtleere Mengen. Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

- streng monoton wachsend, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2),$$

- streng monoton fallend, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

- Die Funktion heißt monoton wachsend (bzw. fallend), wenn aus $x_1 < x_2$ die Beziehung $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \geqslant f(x_2)$) folgt.

2.15 Satz: Streng monotone Funktionen

Ist die reelle Funktion $f : A \to B$ streng monoton wachsend (oder streng monoton fallend), so ist sie injektiv.

Einfache Funktionen auf $\mathbb{C}$

2.16 Polynome

Eine Funktion $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Zuordnungsvorschrift

$$x \mapsto P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

wobei die a_j gegebene komplexe Zahlen sind, heißt *Polynom vom Grad* $\leqslant n$. Die a_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, nennt man die Koeffizienten von P.

Sind alle Koeffizienten reell, so nennt man P ein *reelles Polynom*. Als Definitions- und Wertebereich sind auch $\mathbb{R}$ sowie Teilmengen von $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ zugelassen.

- a_n heißt *Leitkoeffizient* oder *Höchstkoeffizient* von P.
- Falls $a_n \neq 0$, so hat P den (exakten) Grad n.
- Ist $a_n = 1$, so heißt P *normiert*.

2.17 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom P vom Grad $n \geqslant 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$, d.h. es gibt ein $z \in \mathbb{C}$ mit $P(z) = 0$.

Als Folgerung ergibt sich:

2.18 Satz: Zerlegung in Linearfaktoren

Jedes Polynom P vom Grad $n \geqslant 1$ läßt sich schreiben als Produkt von n Linearfaktoren

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Dabei sind die $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von P.

- Fasst man gleiche Nullstellen zusammen, so ergibt sich die Produktform

  $$P(z) = a_n(z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_r)^{m_r}$$

  mit den paarweise verschiedenen Nullstellen $z_1, \ldots, z_r$ von P. Die Zahl $m_k \in \mathbb{N}$ heißt *Ordnung* der Nullstelle z_k, und es ist $\sum_{k=1}^{r} m_k = n$.

2.19 Horner-Schema

Die Auswertung des Polynoms

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

an einer Stelle z erfolgt nach dem Horner-Schema:

$$P(z) = (\cdots((a_n z + a_{n-1})z + a_{n-2})z + \cdots)z + a_0.$$

Das Horner-Schema liefert eine Kurzform zur Polynomdivision durch den Linearfaktor $(z - z_0)$:

- Zum gegebenen Polynom $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ und zur Stelle z_0 ist die Division mit Rest, also die Darstellung

$$P(z) = (z - z_0) \cdot (b_n z^{n-1} + b_{n-1} z^{n-2} + \cdots + b_2 z + b_1) + b_0$$

gesucht. Die Koeffizienten $b_0, \ldots, b_n$ liest man aus der letzten Zeile des Hornerschemas ab:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
z_0	$-$	$z_0 \cdot b_n$	$z_0 \cdot b_{n-1}$	$\cdots$	$z_0 \cdot b_2$	$z_0 \cdot b_1$
	$b_n = a_n$	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_1	$b_0 = P(z_0)$

Hierbei ist $b_k = z_0 \cdot b_{k+1} + a_k$.

- Falls z_0 eine Nullstelle von P ist, so gilt $b_0 = 0$ und wir erhalten die "Abspaltung" des Linearfaktors $(z - z_0)$

$$P(z) = (z - z_0) \cdot (b_n z^{n-1} + b_{n-1} z^{n-2} + \cdots + b_2 z + b_1)$$