# Kap. 10: Folgen und Reihen

## 10.1 Definition: Zahlenfolge

Eine Funktion

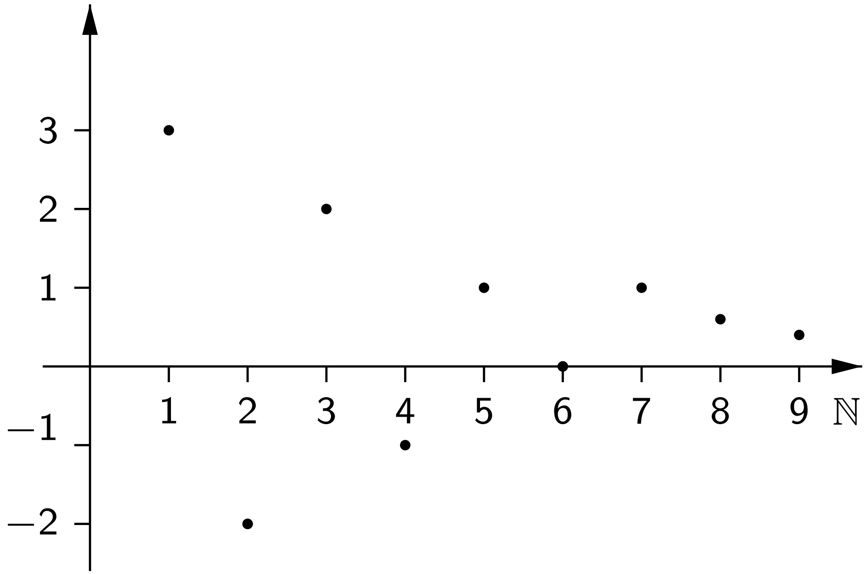
$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad (\text{oder } \mathbb{C})$$

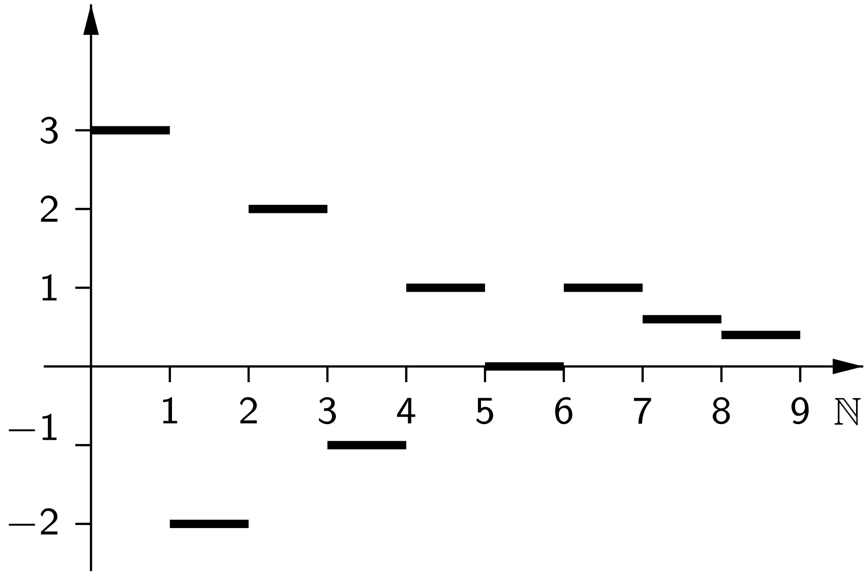
heißt *reelle* (oder *komplexe*) *Zahlenfolge*. Man nennt $a_n = a(n)$ das $n$-te Folgenglied und schreibt kurz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)$.

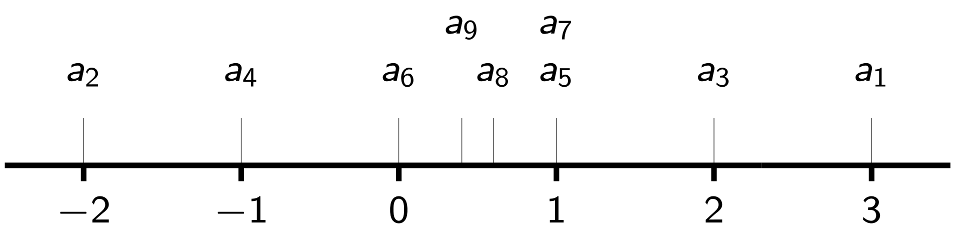
- Ebenso sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ oder $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ mit festem $n_0 \in \mathbb{Z}$ Zahlenfolgen.
- Eine *Teilfolge* entsteht, indem man (endlich oder unendlich viele) Folgenglieder weglässt, wobei noch unendlich viele Glieder übrigbleiben müsses: Für natürliche Zahlen $1 \leqslant n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ ist

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ eine Teilfolge von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

- Später behandeln wir auch Folgen von Vektoren $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\vec{v}_n \in \mathbb{R}^d$, Folgen von Matrizen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \in \mathrm{Mat}(p,q)$ oder Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$.



## 10.2 Konvergenz, Grenzwert

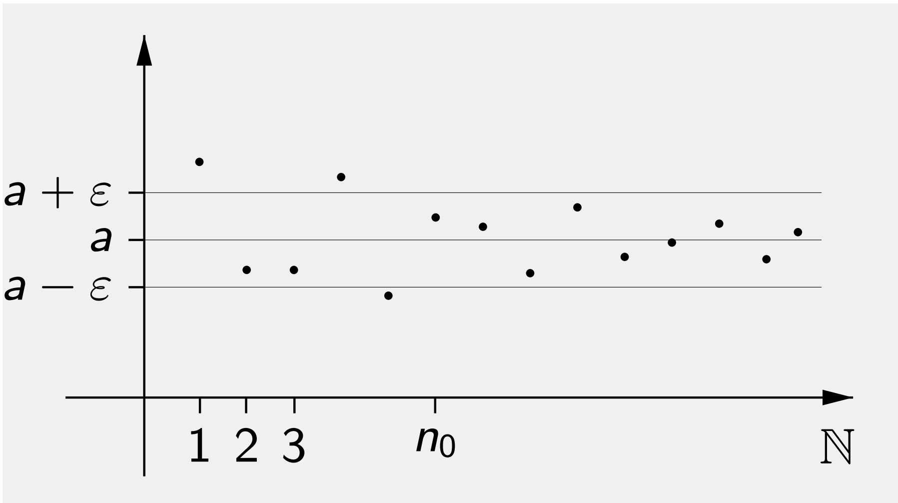
Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) mit der folgenden Eigenschaft gibt: zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geqslant n_0$ die Ungleichung

$$|a_n - a| < \epsilon$$

gilt. Dann heißt $a$ der *Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die Folge "*konvergiert gegen* $a$" und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \to a$$

- Ist die Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent, so heißt sie *divergent*.



# Einfache Hilfsmittel zur Berechnung von Grenzwerten:

## 10.3 Grenzwertsatz

Die Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien konvergent, und $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ sowie $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ seien die Grenzwerte. Dann gilt:

a) $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

b) Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$ ist $(\alpha a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha a$.

c) $(a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $\lim_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = ab$.

d) Sind alle $b_n \neq 0$ und gilt $b \neq 0$, so ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

## 10.4 Nullfolge, bestimmte Divergenz

a) Eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ heißt *Nullfolge*.

b) $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$

c) Eine reelle Zahlenfolge heißt *bestimmt divergent gegen* $\infty$ (bzw. gegen $-\infty$), wenn für jedes $r > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geqslant n_0$ die Ungleichung

$$a_n > r \qquad (\text{bzw. } a_n < -r)$$

gilt. Dann heißt $\infty$ ( bzw. $-\infty$ ) der *uneigentliche Grenzwert* der Folge und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad (\text{ bzw. } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty) \quad \text{oder} \quad a_n \to \pm\infty.$$

Bemerkung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a$ genau dann, wenn $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

$a_n \to \infty \iff$ für $n \geqslant n_0$ ist $a_n > 0$ und $\dfrac{1}{a_n} \to 0$.

## 10.5 Konvergenz und Ordnung

a) Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.
Ist für $n \geqslant n_0$ stets $a_n \leqslant b_n$, so ist auch $a \leqslant b$.

b) Gegeben seien drei reelle Zahlenfolgen $(a_n)$, $(b_n)$ und $(c_n)$ und es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = s$. Falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \qquad \text{für alle} \quad n \geqslant n_0$$

gibt, so ist auch $(b_n)$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = s$.

(b) heißt *Einschließungskriterium* oder *Sandwich-Lemma* oder *Schraubstock-Kriterium*.

## 10.6 Wichtige Beispiele

a) $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0.

b) $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1.

c) Für jedes $c>0$ konvergiert $(\sqrt[n]{c})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1.

d) Für jedes feste $\ell\in\mathbb{N}$ konvergiert $\left(\sqrt[n]{n^\ell}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 (folgt aus b) und dem Grenzwertsatz).

e) Die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z\in\mathbb{C}$ und $|z|<1$ ist eine Nullfolge.

Hilfreich ist die folgende Wachstumshierarchie. Weiter rechtsstehende Folgen gehen schneller als linksstehende gegen unendlich, also z.B. ist $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^7}{2^n}=0$. Dabei sei $\alpha>0$ und $q>1$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $\ln n$ | $n^\alpha$ | $q^n$ | $n!$ | $n^n$ |

Wichtiges Hilfsmittel ist die *Stirling-Formel*

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Der Quotient der beiden Terme hat den Grenzwert 1.
Die Differenz geht gegen unendlich. Es gibt noch weit genauere Abschätzungen.

Zur Klarstellung dient der folgende Satz.

### 10.7 Satz

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei konvergent.

a) Dann ist ihr Grenzwert $a$ eindeutig bestimmt und

b) jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und hat denselben Grenzwert $a$.

Ein wichtiger Begriff im Zusammenhang mit Teilfolgen:

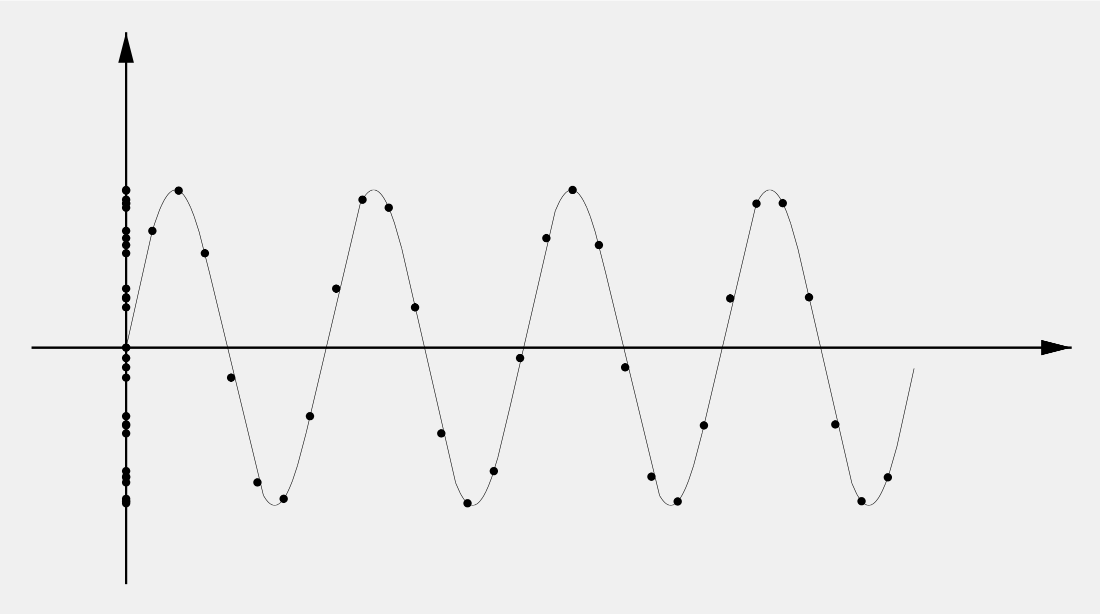
### 10.8 Definition Häufungswert

Die Zahl $b$ heißt ein *Häufungswert* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $b$ gibt, also

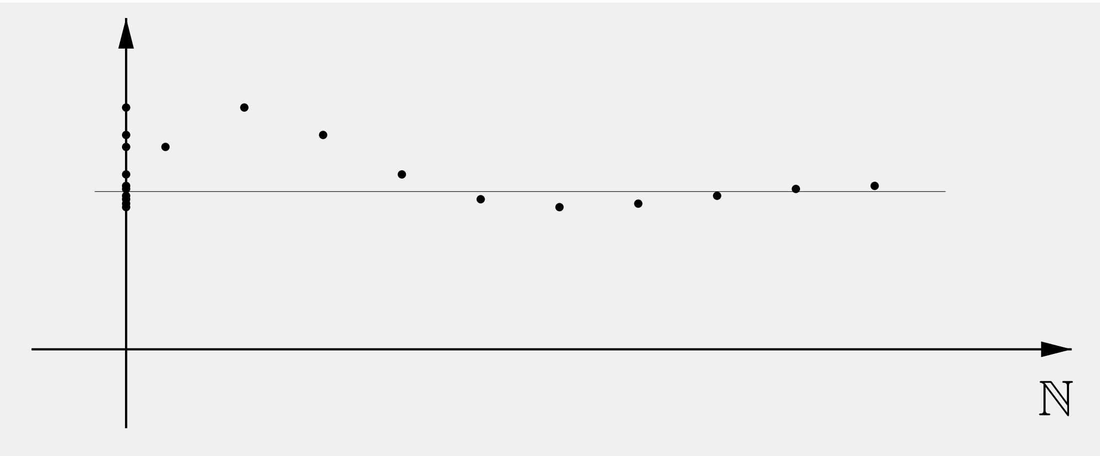
$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = b$$

gilt.

## Beispiele



Die durch $a_n = \sin \frac{5}{6} n$ definierte Folge hat jedes $x \in [-1, 1]$ als Häufungswert.




Bei einer konvergenten Folge ist der Grenzwert der einzige Häufungswert.

## 10.9 beschränkte und monotone Folge

a) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, wenn es ein $r > 0$ gibt mit $|a_n| \leqslant r$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

- *monoton wachsend*, wenn $a_{n+1} \geqslant a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,
- *monoton fallend*, wenn $a_{n+1} \leqslant a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,
- *monoton*, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Neben Satz 10.3 lautet das wichtigste "Konvergenz-Kriterium" wie folgt:

### 10.10 Satz von Bolzano und Weierstraß

Jede monotone und beschränkte reelle Zahlenfolge ist konvergent.

Bemerkung: Eine andere Formulierung, die auch für komplexe Zahlenfolgen gültig ist, lautet:

*Jede beschränkte Folge (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Genauer: Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und eine Zahl $b$ mit

$$\lim_{k\in\mathbb{N}} a_{n_k} = b.$$

## 10.11 Intervallschachtelung

Gegeben seien eine monoton wachsende reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine monoton fallende reelle Zahlenfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es gelte

(i) $a_n \leqslant b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Man sagt, dass die abgeschlossenen Intervalle $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$ eine *Intervallschachtelung* definieren.

Dann enthält der Durchschnitt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$$

genau eine reelle Zahl $s$, nämlich

$$s = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

## 10.12 Beispiel: die Eulersche Zahl $e$

Die Eulersche Zahl $e = 2.71828182845904\ldots$ kann folgendermaßen definiert werden:
Wir betrachten die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Folgengliedern

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Dann gilt:

1. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.
2. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.
3. Es ist $b_n - a_n \geqslant 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.
4. Das Prinzip der Intervallschachtelung ergibt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: e.$$

# Zahlenwerte: “sehr langsame Konvergenz” gegen $e$

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 |
| 10 | 2.59374246010000 | 2.85311670611000 |
| 100 | 2.70481382942153 | 2.73186196771574 |
| 1000 | 2.71692393223559 | 2.71964085616783 |
| 1000000 | $\underline{2.7182}6823719230$ | $\underline{2.7182}8318737622$ |

Zwei weitere Begriffe:

### 10.13 Limes superior und Limes inferior

Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, sind der größte Häufungswert (*Limes superior*)

  $$\limsup_{n\to\infty} a_n := \max\{b | b \text{ ist Häufungswert von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$$

  und der kleinste Häufungswert (*Limes inferior*)

  $$\liminf_{n\to\infty} a_n := \min\{b | b \text{ ist Häufungswert von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$$

  definiert.
- Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt ist (d.h. zu jedem $r > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > r$), so setzen wir $\limsup_{n\to\infty} a_n := \infty$.

  Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach unten beschränkt ist (d.h. zu jedem $r > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n < -r$), so setzen wir $\liminf_{n\to\infty} a_n := -\infty$.

Als partielle Umkehrung des Satzes von Bolzano-Weierstraß geben wir noch folgendes Resultat an:

### 10.14 Aus konvergent folgt beschränkt

Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Als wichtiges (abstraktes) Konvergenz-Kriterium dient:

### 10.15 Cauchy-Kriterium

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n > m \geqslant n_0$ die Ungleichung

$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

gilt.

## 10.16 Reihen

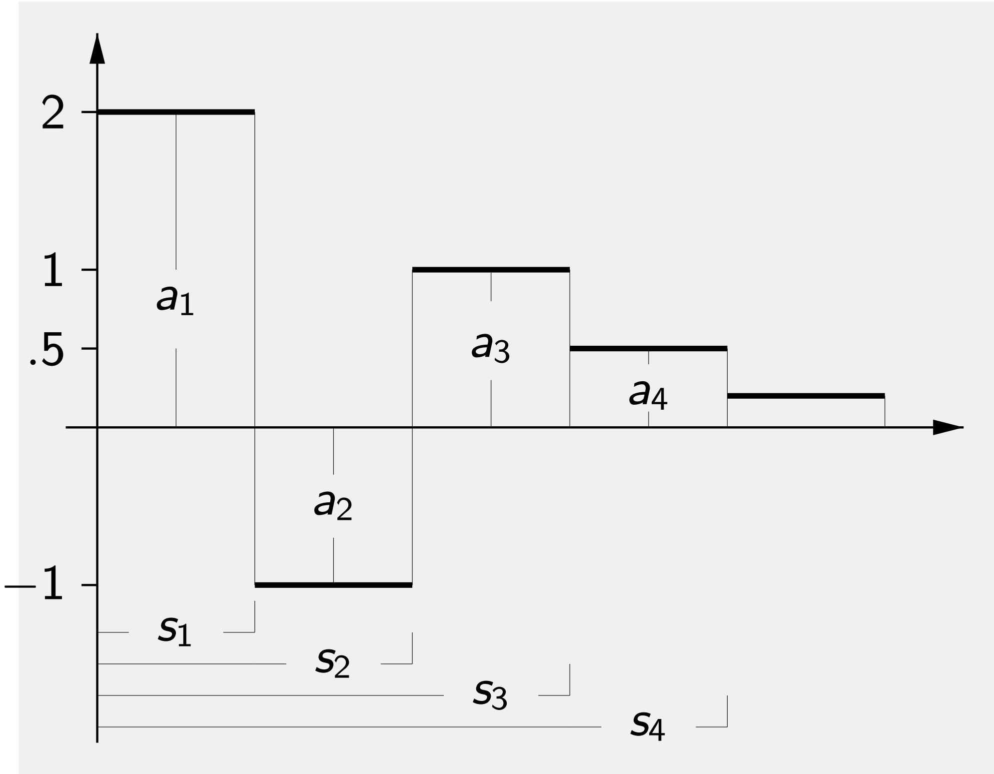
- Die zu einer gegebenen Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gebildete Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *Partialsummen*
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
heißt eine *unendliche Reihe*. Der Summand $a_k$ heißt $k$-tes Reihenglied.

- Anstatt $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schreibt man kurz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ für die unendliche Reihe.

- Falls die unendliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ gegen die Zahl $s \in \mathbb{C}$ konvergiert, so schreiben wir
$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

- Eine Reihe heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ konvergiert.

## Beispiel:




Mit $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 0.5$, ... entspricht die Partialsumme $s_n$ dem orientierten Flächeninhalt unter den ersten $n$ Kästchen.
Man hat in diesem Beispiel $s_1 = 2$, $s_2 = 1$, $s_3 = 2$, $s_4 = 2.5$, $s_5 = \ldots$.
Die Reihe konvergiert, wenn die Folge der Partialsummen einen Grenzwert hat.

## Bemerkung:

- Unendliche Reihen sind also spezielle Zahlenfolgen. Die Begriffe Konvergenz und Grenzwert, Beschränktheit und Monotonie einer unendlichen Reihe beziehen sich immer auf die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (bzw. $(s_n)_{n\geqslant n_0}$ mit $n_0 \in \mathbb{Z}$).
- Die Konvergenz kann mit allen bisherigen Methoden untersucht werden.
  - Ist die unendliche Reihe z.B. monoton und beschränkt, so ist sie konvergent (Satz von Bolzano-Weierstraß).
  - Insbesondere ist eine Reihe genau dann absolut konvergent, wenn die Reihe der Absolutbeträge konvergiert.
  - Die unendliche Reihe ist genau dann konvergent, wenn das Cauchy-Kriterium gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n > m \geqslant n_0$ die Ungleichung

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon \qquad \text{gilt.}$$

### 10.17 Konvergenz und absolute Konvergenz

Eine absolut konvergente Reihe konvergiert.

Die Umkehrung gilt nicht.

## 10.18 Harmonische und geometrische Reihe

a) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

nennt man die *harmonische Reihe*.

Die harmonische Reihe divergiert.

b) Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

mit $z \in \mathbb{C}$ nennt man die *geometrische Reihe*. Für $z \neq 1$ lautet die Partialsumme (nach 1.9, geometrische Summenformel)

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Die geometrische Reihe konvergiert genau für $|z| < 1$, der Grenzwert ist dann $\frac{1}{1-z}$.

Der Grenzwertsatz 10.3 ergibt:

### 10.19 Rechenregeln für konvergente Reihen

Die unendlichen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ seien konvergent, ihre Grenzwerte seien $s_a$ und $s_b$.

Dann ist für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ konvergent und ihr Grenzwert ist $\alpha s_a + \beta s_b$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

# Weitere Kriterien zur Konvergenz- bzw. Divergenz-Untersuchung von Reihen

## 10.20 Notwendiges Kriterium für die Konvergenz

Falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so muss die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Reihenglieder eine Nullfolge sein.

Beispiel: Die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ mit $z \in \mathbb{C}$ und $|z| \geqslant 1$ ist divergent.

Das wichtigste Kriterium für Konvergenz bzw. Divergenz von Reihen:

### 10.21 Majorantenkriterium

Für zwei Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ und ein festes $n_0 \in \mathbb{N}$ gelte

$$|a_n| \leqslant b_n \qquad \text{für alle} \quad n \geqslant n_0.$$

Falls dann $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, so konvergieren auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

- Man beachte, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergieren muss, da stets $b_n \geqslant 0$ und daher $b_n = |b_n|$ ist.
- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt eine Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

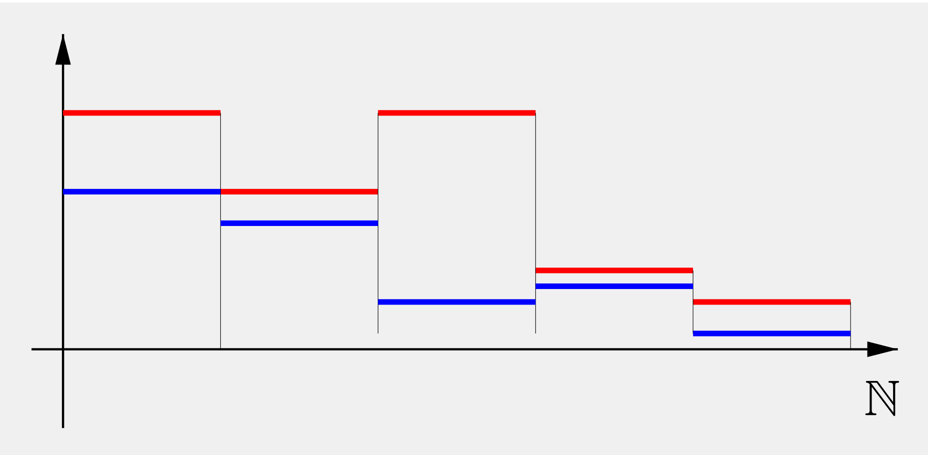
## 10.22 Minorantenkriterium

Für zwei Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ und ein festes $n_0 \in \mathbb{N}$ gelte

$$a_n \geqslant b_n \geqslant 0 \qquad \text{für alle} \quad n \geqslant n_0.$$

Falls dann $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert, so divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt eine Minorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.




Eine Folge mit positiven Gliedern konvergiert genau dann, wenn die Partialsummen beschränkt sind.
Sind die Partialsummen bei der roten Majorante beschränkt, sind sie es bei der blauen Minorante auch, sind die Partialsummen der Minorante unbeschränkt, können die der Majorante nicht beschränkt sein.

Wichtige Konsequenz von Minoranten- und Majorantenkriterium ist das *Vergleichskriterium*.

### 10.23 Vergleichskriterium

Es gebe eine Zahl $c > 0$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|b_n|} = c$

Dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann absolut, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergiert.

## 10.24 Beispiele

a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Der Grenzwert

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1.64493406684822\ldots$$

kann erst viel später berechnet werden.

b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert.

c) Man merke sich schon jetzt als wichtige Reihen zum Vergleich: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{ist} \quad \begin{cases} \text{konvergent, falls } \alpha > 1 \text{ ist,} \\ \text{bestimmt divergent gegen } \infty \text{, falls } 0 < \alpha \leqslant 1 \text{ ist.} \end{cases}$$

## Satz: 10.25 Wurzelkriterium

- Falls ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant q \qquad \text{für alle} \quad n \geqslant n_0, \qquad (*)$$

  so konvergieren $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

- Falls

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 1 \qquad \text{für unendlich viele} \quad n \in \mathbb{N}$$

  gilt, so divergieren $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Bemerkung: Falls die Bedingung (*) nur mit $q = 1$ gilt (z.B. harmonische Reihe), so kann nicht auf Konvergenz geschlossen werden. Dann muss die Reihe mit anderen Kriterien untersucht werden.

## 10.26 Quotientenkriterium

- Falls ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass

$$a_n \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant q \qquad \text{für alle} \quad n \geqslant n_0 \qquad (**)$$

  gilt, so konvergieren $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

- Falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$a_n \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1 \qquad \text{für alle} \quad n \geqslant n_0 \qquad (**)$$

  gilt, so divergieren $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

### Bemerkung:

- Falls die Bedingung (**) nur mit $q = 1$ gilt, muss die Reihe wieder mit anderen Kriterien untersucht werden.

- Das Quotientenkriterium ist oft leichter zu handhaben als das Wurzelkriterium. Aber: es verlangt $a_n \neq 0$ ab einem Index $n_0$.

## 10.27 Beispiele

a) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ist konvergent.

Anmerkung: Der Grenzwert ist die Eulersche Zahl $e = 2.71828182845904\ldots$. Die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\geqslant 0}$ konvergiert viel schneller gegen $e$ als die Folge $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in 10.12.

Zahlenwerte:

| $n$ | $s_n$ | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 6 | 2.71805555555556 |
| 1 | 2 | 7 | 2.71825396825397 |
| 2 | 2.5 | 8 | 2.71827876984127 |
| 3 | 2.66666666666667 | 9 | 2.71828152557319 |
| 4 | 2.70833333333333 | 10 | 2.71828180114638 |
| 5 | 2.71666666666667 | | |

b) Für die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ergibt sich jeweils

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1.$$

Also kann mit dem Quotientenkriterium keine Aussage zur Konvergenz der Reihen getroffen werden. Ebenso erhalten wir

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

also hilft auch das Wurzelkriterium nicht weiter.

Oft prüft man die Existenz von $0 < q < 1$ in den Kriterien 10.25 und 10.26 so:

### 10.28 Limesversion

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei eine Reihe mit

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \qquad \text{oder} \qquad \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

Dann konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Beispiel: für $k \in \mathbb{Z}$ und $0 \leqslant q < 1$ ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k q^n} = q < 1$.
Daher gilt nach 10.20 $n^k q^n \to 0$.

Wir nennen die reelle Zahlenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *alternierend*, wenn die Reihenglieder $a_n \in \mathbb{R}$ abwechselnd positiv und negativ sind, also

$$\operatorname{sign}(a_n) = -\operatorname{sign}(a_{n+1}) \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{gilt.}$$

### 10.29 Satz: Leibnizkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei alternierend. Falls die Folge der Absolutbeträge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Zusatz: Der Grenzwert $s$ erfüllt für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{sign}(a_n) = 1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \leqslant s \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

**Beispiel: 10.30 Leibniz'sche Reihe** Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

heißt die *Leibniz'sche Reihe*. Sie ist alternierend und die Folge der Absolutbeträge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Also konvergiert die Leibniz'sche Reihe. Wir zeigen (viel) später:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2 = 0.6914718055994....$$