11.1 Festlegung Definitionsbereich

Festlegung:
Wir betrachten Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, deren Definitionsbereich eine endliche Vereinigung von Intervallen ist, also z.B.

$$D = [a, b], \quad D = [-5, 1) \cup (3, \infty), \quad D = \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Der *Abschluss* $\overline{D}$ ist die Menge, die durch Hinzunahme der Intervallränder entsteht, in den obigen Beispielen also

$$\overline{D} = [a, b], \quad \overline{D} = [-5, 1] \cup [3, \infty), \quad \overline{D} = \mathbb{R}.$$

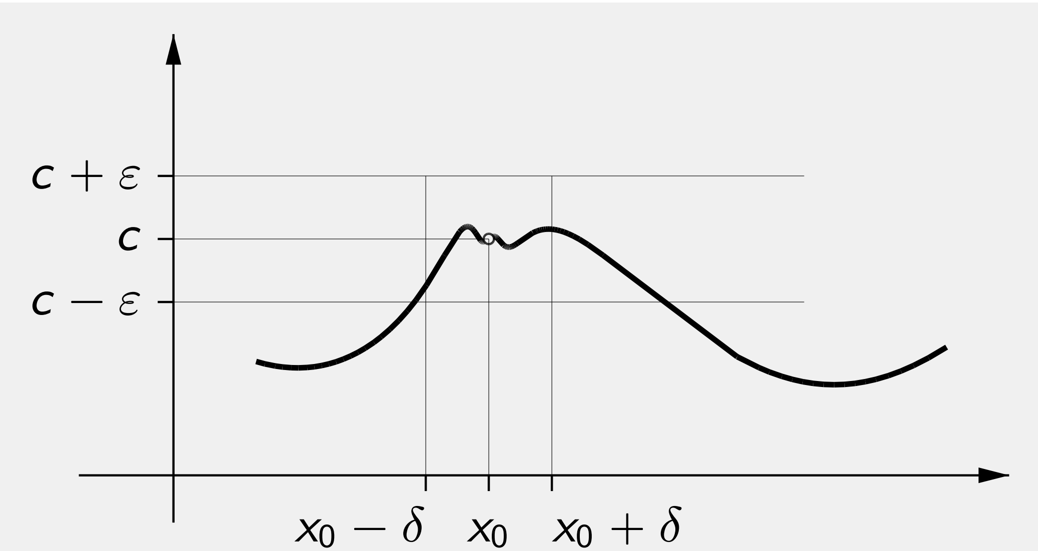
11.2 Definition Grenzwert

Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und ein $x_0 \in \overline{D}$.

(a) f besitzt den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ an der Stelle x_0, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - c| < \epsilon \quad \text{für alle} \quad x \in D \backslash \{x_0\} \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

gilt. Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.



Bemerkung: Der Funktionswert $f(x_0)$ taucht in der Bedingung an den Grenzwert von f an der Stelle x_0 nicht auf! Dieser wird erst später für den Begriff der Stetigkeit von f verwendet.

(b) f besitzt den uneigentlichen Grenzwert ∞ (bzw. $-\infty$) an der Stelle x_0, wenn zu jedem $r > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f(x) > r \quad (\text{bzw. } f(x) < -r) \qquad \text{für alle} \quad x \in D\backslash\{x_0\} \quad \text{mit} \quad |x - x_0| < \delta$$

gilt. Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad (\text{bzw. } \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty)$.

Äquivalent zur "ϵ-δ-Definition" 11.2 des Grenzwerts ist die folgende

11.3 Definition mit Folgen

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x_0 \in \overline{D}$ den Grenzwert c, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Folgengliedern $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ und mit dem Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c.$$

Zwei Varianten von Grenzwerten werden in den nächsten beiden Abschnitten definiert:

11.4 Definition: Grenzwert von f bei ∞ und $-\infty$

Der Definitionsbereich D enthalte ein Intervall (a, ∞). Dann hat f in ∞ den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $r > a$ existiert, so dass

$$|f(x) - c| < \epsilon \quad \text{für alle} \quad x > r$$

gilt. Schreibweise: $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$.

Entsprechend: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ sowie uneigentliche Grenzwerte $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ etc.

Bemerkung: Endliche Grenzwerte c für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ sind bei der Kurvendiskussion die *horizontalen Asymptoten* von f.

11.5 rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert

a) f besitzt den *rechtsseitigen Grenzwert* $c \in \mathbb{R}$ an der Stelle x_0, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - c| < \epsilon \quad \text{für alle} \quad x \in D \text{ mit } \; x_0 < x < x_0 + \delta$$

gilt. Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = c$.

b) f besitzt den *linksseitigen Grenzwert* $c \in \mathbb{R}$ an der Stelle x_0, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - c| < \epsilon \quad \text{für alle} \quad x \in D \text{ mit } \; x_0 - \delta < x < x_0$$

gilt. Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = c$.

Ebenso: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \infty$ etc.

Bemerkung:

- Am Randpunkt a eines Intervalls (a, b) oder $[a, b]$ ist der Grenzwert aus Definition 11.2 das gleiche wie der rechtsseitige Grenzwert.

- An einer Stelle $x_0 \in (a, b)$ (also im Inneren des Intervalls) existiert der Grenzwert c von f genau dann, wenn sowohl der rechtsseitige als auch der linksseitige Grenzwert existieren und gleich c sind, also

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = c$$

gilt.

Die Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen lassen sich auf Grenzwerte von Funktionen übertragen.

11.6 Rechenregeln für Grenzwerte

Gegeben seien zwei Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ sowie ein $x_0 \in \overline{D}$. Weiter seien $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = c$ und $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = d$. Dann gilt

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha c + \beta d$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (f(x) g(x)) = cd$.

c) Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ und $d \neq 0$ gilt, so ist $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{c}{d}$.

11.7 Stetigkeit

Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$.

a) f heißt *stetig* an der Stelle $x_0 \in D$ (auch: "stetig in x_0"), wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

b) f heißt *stetig*, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

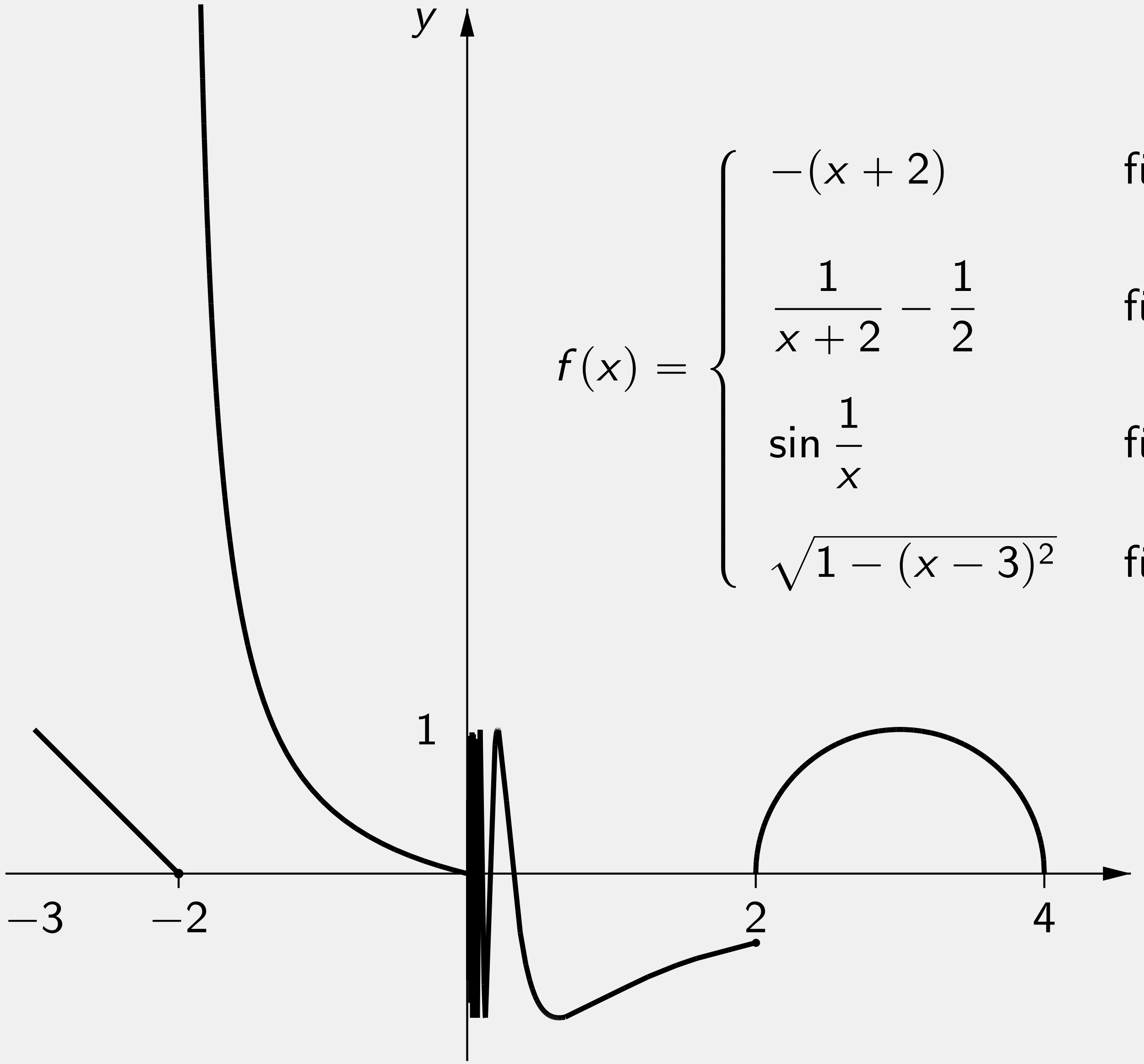
Beachte: Die Grenzwertdefinition 11.3 und 11.2 besagt:

- $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig an der Stelle $x_0 \in D$ genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D : \quad (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

- $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig an der Stelle $x_0 \in D$ genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Folgengliedern $x_n \in D$ und dem Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$



$$f(x) = \begin{cases} -(x+2) & \text{für } -3 < x \leqslant -2 \\ \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{2} & \text{für } -2 < x \leqslant 0 \\ \sin \dfrac{1}{x} & \text{für } 0 < x \leqslant 2 \\ \sqrt{1-(x-3)^2} & \text{für } 2 < x < 4 \end{cases}$$

Verschiedene Typen von Unstetigkeit

Bemerkung: Die letzte Aussage wird häufig zur Grenzwertberechnung von Folgen verwendet: Falls die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert und f stetig an der Stelle a ist, so darf der Grenzwert “hineingezogen’ werden:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(a).$$

Als direkte Folgerung aus 11.6 ergibt sich

11.8 Rechenregeln für stetige Funktionen

Die Funktionen $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ seien stetig in x_0. Dann gilt:

a) Für beliebige Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\alpha f + \beta g$ stetig in x_0.

b) Das Produkt fg ist stetig in x_0.

c) Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ gilt, so ist der Quotient $\frac{f}{g}$ stetig in x_0.

Die Summe von Funktionen ist wie in 6.2 definiert, Produkt und Quotient entsprechend.

11.9 Der Vektorraum der stetigen Funktionen

Die Menge aller stetigen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ bildet einen reellen Vektorraum,

$$C(D) := \{f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}.$$

Hintereinanderausführung von Funktionen:

- Gegeben sind zwei Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$. Der Bildbereich $f(D_f)$ sei eine Teilmenge von D_g. Dann ist die zusammengesetzte Funktion

$$g \circ f : D_f \to \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

definiert.

11.10 Zusammengesetzte Funktionen

Falls $f : D_f \to \mathbb{R}$ stetig an der Stelle x_0 und $g : D_g \to \mathbb{R}$ stetig an der Stelle $f(x_0)$ ist, so ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$ stetig an der Stelle x_0.

Die folgende Aussage liegt vielen Untersuchungen zu Grunde.

11.11 Lemma

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig an der Stelle $x_0 \in D$ und es gelte $f(x_0) > c$ für irgendeine Zahl $c \in \mathbb{R}$. Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass

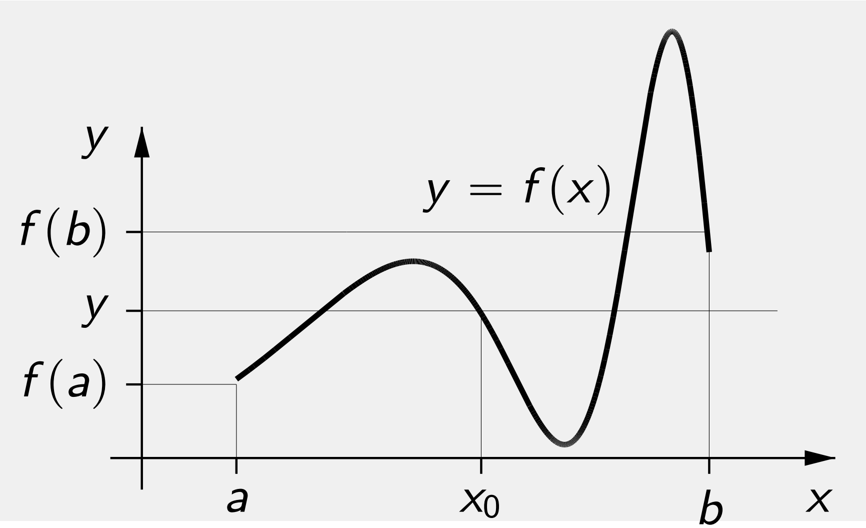
$$f(x) > c \quad \text{für alle} \quad x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

gilt. (Entsprechende Aussagen gelten für $f(x_0) < c$ bzw. $f(x_0) \neq c$.)

Bemerkung: Ist z.B. $f(x_0) \neq 0$, so gibt es sogar eine *offene Umgebung* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$ von x_0, in der keine Nullstelle von f liegt.

11.12 Zwischenwertsatz

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $[a, b] \subseteq D$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall. Dann nimmt f auf dem Intervall $[a, b]$ jeden Wert $y \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.



Anwendung: Der Nullstellensatz von Bolzano

Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und es gelte $f(a)f(b) < 0$ (d.h. $f(a)$ und $f(b)$ haben unterschiedliches Vorzeichen).

Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$.

Bemerkung: Der Zwischenwertsatz lässt sich auch so formulieren, dass unbeschränkte Intervalle zugelassen sind:

Es sei D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden reellen Wert y mit

$$\inf_{x \in D} f(x) < y < \sup_{x \in D} f(x)$$

an. Insbesondere ist der Bildbereich $f(D)$ ebenfalls ein Intervall.

Beispiel hierzu:

- Ist $D = (a, \infty)$ und gilt $\lim\limits_{x \longrightarrow a+} f(x) = c$ sowie $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = d$(incl. der uneigentlichen Grenzwerte für c und d), so nimmt f jeden Wert des offenen Intervalls (c, d) bzw. (d, c) an.

Ein abgeschlossenes beschränktes Intervall $[a, b]$ nennt man *kompakt*.

11.13 Satz vom Maximum

$D = [a, b]$ sei ein kompaktes Intervall und die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann nimmt f auf $[a, b]$ sein Maximum und sein Minimum an; d.h. der Bildbereich $f(D)$ ist das kompakte Intervall

$$f(D) = [c, d]$$

mit

$$c = \min_{x \in D} f(x), \qquad d = \max_{x \in D} f(x).$$

D sei ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig. Der Bildbereich $J = f(D)$ ist wiederum ein Intervall (siehe 8.12). Wir setzen $\tilde{f} : D \to J$ mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ und erhalten so eine surjektive Funktion.

11.14 Satz zur Umkehrfunktion

D sei ein Intervall und $f : D \to J$ mit $J = f(D)$ sei stetig. Dann gilt:

a) Die Funktion f ist genau dann bijektiv, wenn sie streng monoton ist.

b) Ist f streng monoton wachsend (also auch bijektiv), so ist die Umkehrfunktion f^{-1} ebenfalls streng monoton wachsend und stetig.

   Die entsprechende Aussage gilt für streng monoton fallendes f.

11.15 Komplexe Grenzwerte

Die Aussagen über Grenzwerte und Stetigkeit gelten analog für Funktionen, die auf geeigneten Teilmengen der komplexen Ebene definiert sind und oder komplexe Werte haben.
Im Gegensatz zum reellen Fall gibt es aber keine einseitigen Grenzwerte bei Funktionen, die auf Teilmengen von $\mathbb{C}$ definiert sind.
In $\mathbb{C}$ gibt es nur einen einzigen Grenzwert für unendlich:

$$z_n \to \infty :\Longleftrightarrow |z_n| \to \infty$$