12 Differenzierbare Funktionen

12.1 Physikalisches Experiment Eine Person wirft zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Ball senkrecht in die Höhe. Die Funktion $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}\, gt^2, \qquad t \geqslant 0,$$

beschreibt näherungsweise die Höhe (in Metern) des Balls zur Zeit $t \geqslant 0$ (in Sekunden). Dabei ist h_0 die Anfangshöhe (ca. die Körpergröße), v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und $g \approx 9.81\ m/s^2$ die Fallbeschleunigung. (Weitere Einflüsse wie der Luftwiderstand werden ignoriert.)

- Der *Differenzenquotient*

  $$\frac{h(t_1) - h(t_0)}{t_1 - t_0}$$

  gibt die *Durchschnitts-Geschwindigkeit* im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ an. Dies ist die konstante Geschwindigkeit, die ein Ball haben müsste, um die Weglänge $h(t_1) - h(t_0)$ im gleichen Zeitintervall zurückzulegen:

  $$S(t) = h(t_0) + \frac{h(t_1) - h(t_0)}{t_1 - t_0}\,(t - t_0). \qquad \text{(Sekanten-Gleichung)}$$

- Der *Differential-Quotient*

  $$\lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} =: h'(t_0) \qquad \text{(Ableitung)}$$

  gibt die *Momentan-Geschwindigkeit* im Zeitpunkt t_0 an. Ein Ball mit dieser konstanten Geschwindigkeit würde zur Zeit t die Höhe $T(t)$ erreichen.

  $$T(t) = h(t_0) + h'(t_0)(t - t_0) \qquad \text{(Tangenten-Gleichung)}$$

Festlegung wie im Abschnitt über Stetigkeit: Der Definitionsbereich D ist die endliche Vereinigung von Intervallen.

12.2 Definition: Ableitung

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar an der Stelle* $x_0 \in D$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt die *Ableitung* $f'(x_0)$ oder auch der *Differentialquotient* $\frac{df}{dx}(x_0)$ von f an der Stelle x_0.

f heißt *differenzierbar*, wenn f an jeder Stelle von D differenzierbar ist. Dann heißt die Funktion

$$f' : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

die *Ableitung* von f.

- *Einseitige Ableitungen:* (siehe einseitige Grenzwerte 11.5)

$$f'(x_0+) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \qquad \text{(rechtsseitige Ableitung)}$$

$$f'(x_0-) = \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \qquad \text{(linksseitige Ableitung)}$$

- Im Fall $D = [a, b]$ ist $f'(a) = f'(a+)$ als die rechtsseitige und $f'(b) = f'(b-)$ als die linksseitige Ableitung definiert.

12.3 Lemma

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.

(a) Es gelte $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D$ für ein $\delta > 0$.
f ist genau dann an der Stelle x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = c$, wenn beide einseitigen Ableitungen an dieser Stelle existieren und denselben Wert $f'(x_0+) = f'(x_0-) = c$ haben.

(b) f ist genau dann an der Stelle x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = c$, wenn die Funktion

$$\tilde{\Delta} : D \to \mathbb{R}, \quad \tilde{\Delta}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{für } x \neq x_0, \\ c & \text{für } x = x_0, \end{cases}$$

an der Stelle x_0 stetig ist.

12.4 Satz: Aus differenzierbar folgt stetig

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in D$, so ist f dort auch stetig.

12.5 Rechenregeln für die Ableitung

f und g seien differenzierbar an der Stelle x_0, α, β seien Skalare.
Dann existieren die folgenden Ableitungen und es gilt

$$\begin{aligned}
(\alpha f + \beta g)'(x_0) &= \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \\
(fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) && \text{(Produktregel)} \\
\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} && \text{(Quotientenregel)}
\end{aligned}$$

Bei den letzten beiden Regeln muss $g(x_0) \neq 0$ vorausgesetzt werden.

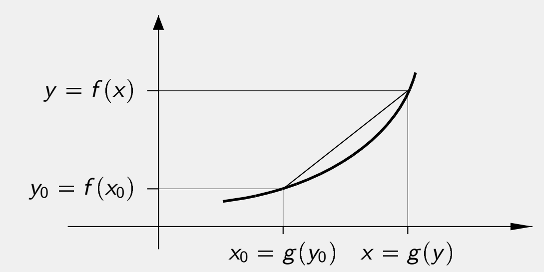
12.6 Kettenregel und Ableitung der Umkehrfunktion

(a) I und J seien Intervalle, $f : I \to J$ sei differenzierbar an der Stelle x_0 und $g : J \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar an der Stelle $y_0 = f(x_0)$. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle x_0 und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\ f'(x_0) = g'(y_0)\ f'(x_0). \qquad \text{(Kettenregel)}$$

(b) Ableitung der Umkehrfunktion:
I und J seien Intervalle, $f : I \to J$ sei bijektiv und $g := f^{-1} : J \to I$ sei die Umkehrfunktion.
Wenn f an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar ist und $f'(x_0) \neq 0$ gilt, dann ist die Umkehrfunktion g an der Stelle $y_0 = f(x_0) \in J$ ebenfalls differenzierbar und es gilt

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$


$y = f(x)$
$y_0 = f(x_0)$
$x_0 = g(y_0)$
$x = g(y)$

12.7 Beispiele

(a) Jedes Polynom ist differenzierbar.

(b) $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ über den Differentialquotienten

(c) Produktregel: $f(x) = x^2 \sin x$

(d) Quotientenregel: $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

(e) Quotientenregel: $\tan x$ und $\cot x$

(f) Kettenregel: $\sin(x^2 + 1)$, $\cos^5(\sqrt{x})$

(g) Umkehrfunktionen: $f(x) = x^2$ auf $(0, \infty)$, $g(x) = \sin x$ auf $(-\pi/2, \pi/2)$, $h(x) = \cos x$ auf $[0, \pi]$.

12.8 Definition: Landau-Symbole

Es seien f und g zwei in einer Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ definierte Funktionen, $g(x) > 0$ für alle $x \neq a$. Dann bedeutet

- $f(x) = O(g(x))$ für $x \to a$, dass in einer Umgebung von a der Quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ beschränkt ist
- $f(x) = o(g(x))$ für $x \to a$, dass $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ist.

Eine analoge Definition gilt für Folgen und für uneigentliche Grenzwerte.

12.9 Lineare Approximation

Das Polynom $T_1(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ vom Grad 1 heißt die *lineare Approximation* von f an der Stelle x_0. Der "Approximationsfehler"

$$R_1(x; x_0) = f(x) - T_1(x; x_0)$$

erfüllt die Beziehungen

$$R_1(x_0; x_0) = 0, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x; x_0)}{x - x_0} = 0, \quad \text{also} \quad R_1(x; x_0) = o(|x - x_0|) \text{ für } x \to x_0.$$

- Die Gerade mit der Gleichung

  $$y = T_1(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad x \in \mathbb{R},$$

  ist die *Tangente* an den Graphen von f in x_0.

12.10 Charakterisierung von Differenzierbarkeit

$f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0 \in D$ differenzierbar mit der Ableitung $f'(x_0)$, wenn gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad \text{für} \quad x \to x_0.$$

In Satz 11.13 haben wir das *absolute* (oder globale) Maximum bzw. Minimum einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ behandelt.

12.11 Definition: relative (oder lokale) Extrema

Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
f hat an der Stelle x_0 ein *relatives Maximum* (bzw. ein *relatives Minimum*) $f(x_0)$, wenn es ein Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$ gibt, so dass

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{bzw. } f(x) \geqslant f(x_0)\ ) \qquad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Ein relatives Maximum oder Minimum heißt auch ein *relativer Extremwert* von f.

Beachte: An einem Endpunkt des Intervalls $I = [a, b]$ kann laut der Definition kein *relativer* Extremwert vorliegen. Hier kann jedoch das *absolute* Maximum oder Minimum von f angenommen werden (Beispiele: monotone Funktionen)

Hauptsatz zur Kurvendiskussion:

12.12 Notwendiges Kriterium

Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar.
Wenn f an der Stelle x_0 einen relativen Extremwert hat, so gilt $f'(x_0) = 0$.

12.13 Beispiele

(a) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ (“es geht auch ohne Differenzierbarkeit”)

(b) $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$ mit relativem Maximum bei $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ und relativem Minimum bei $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ und absolutem Maximum bei $x = 2$ sowie absolutem Minimum bei $x = -2$.

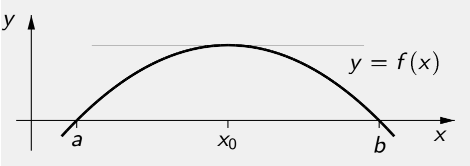
(c) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Der einzige Kandidat für einen relativen Extremwert ist $x_0 = 0$. Wegen

$$f(x_1) < f(0) < f(x_2) \qquad \text{für alle} \quad x_1 < 0 < x_2$$

hat f jedoch keinen relativen Extremwert an der Stelle $x_0 = 0$.

12.14 Satz von Rolle

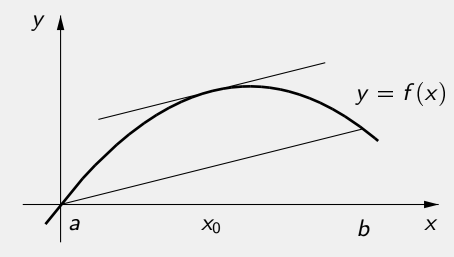
Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall, $a < b$. Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig in I und differenzierbar in (a, b).
Falls $f(a) = f(b)$ gilt, so gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.



12.15 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall, $a < b$. Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig in I und differenzierbar in (a, b).

Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Geometrisch: Es existiert eine Stelle $x_0 \in (a, b)$, an der die Steigung $f'(x_0)$ der Tangente gleich der Steigung der Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

Direkte Folgerungen aus dem Mittelwertsatz:

12.16 Satz von der konstanten Funktion, Monotonie

Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall, $a < b$. Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig in I und differenzierbar in (a, b).

(a) Wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt, so ist f konstant.

(b) Wenn $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) für alle $x \in (a, b)$ gilt, so ist f streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).

Wir betrachten nun Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, die (auf ganz D) differenzierbar sind. In 12.2 wurde dann die Ableitung, also die Funktion

$$f' : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

definiert.

12.17 Definition: höhere Ableitungen

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar.

- Falls f' differenzierbar ist, nennen wir $f'' := (f')'$ die 2. Ableitung von f, und f heißt *zweimal differenzierbar*.
  (Andere Schreibweisen: $f^{(2)}$ oder $\frac{d^2 f}{dx^2}$)

- Analog erhält man die höheren Ableitungen $f''' = f^{(3)}, f^{(4)}, \ldots$, und allgemein für ein $n \in \mathbb{N}$ die *n-te Ableitung*

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n},$$

  falls $f^{(n-1)}$ weiterhin differenzierbar ist. Die Funktion f heißt dann *n-mal differenzierbar*.

Zusatz:

- Falls die Ableitung f' stetig ist, heißt f *stetig differenzierbar*.
- Falls f n-mal differenzierbar ist und die n-te Ableitung $f^{(n)}$ stetig ist, so heißt f *n-mal stetig differenzierbar*. (Siehe hierzu Satz 12.4)
- Die Menge aller n-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ ist ein Vektorraum, den wir mit $C^n(D)$ bezeichnen. Zur Vollständigkeit setzen wir $C^0(D) := C(D)$.

n-mal differenzierbare Funktionen erlauben eine bessere Approximation als durch lineare Polynome in 12.9:

12.18 Definition: Taylor-Polynom

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $I = (a, b)$ ein Intervall, $a < x_0 < b$ und $f \in C^n(I)$. Dann heißt das Polynom

$$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

das n-te *Taylor-Polynom* von f im Entwicklungspunkt x_0.

T_n ist durch $T_n^{(k)}(x_0; x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für $k = 0, \ldots, n$ charakterisiert.

Beispiele:

$$\begin{aligned}
T_0(x; x_0) &= f(x_0), \\
T_1(x; x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \\
T_2(x; x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2, \\
T_3(x; x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6} (x - x_0)^3, etc.
\end{aligned}$$

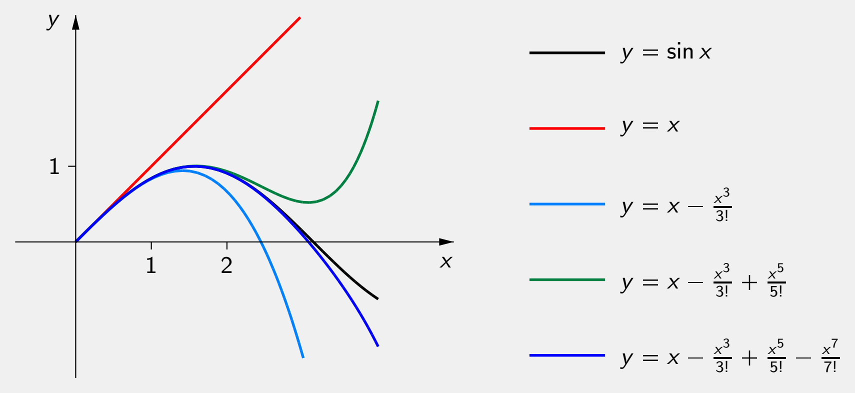
Die Abweichung $f(x) - T_n(x; x_0)$ lässt sich folgendermaßen ausdrücken:

12.19 Satz: Taylorsche Formel

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $I = (a, b)$ ein Intervall, $a < x_0 < b$ und $f \in C^{n+1}(I)$.
Dann gilt für alle $x \in I$

$$f(x) - T_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}$$

mit einer Stelle $\xi = x_0 + \alpha(x - x_0)$ und $0 < \alpha < 1$. (*Restglied von Lagrange*)


y
x
1
1
2
$y = \sin x$
$y = x$
$y = x - \frac{x^3}{3!}$
$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$
$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$

Wir benötigen noch:

12.20 Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall, $a < b$, und die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien stetig und in (a, b) differenzierbar; weiter sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$.
Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

13: Anwendungen der Differentialrechnung

1. Grenzwert-Berechnung mit den Regeln von de l'Hospital
2. Kurvendiskussion: Monotonie, Konvexität und Konkavität, Charakterisierung relativer Extremwerte durch höhere Ableitungen
3. Extremwert-Aufgaben
4. Die Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel
5. Polynom-Interpolation: Der Interpolations-Fehler
6. Berechnung von Nullstellen: Das Newton-Verfahren

Grenzwertberechnung mit den Regeln von de l'Hospital

13.1 Satz: Regeln von de l'Hospital

Die Funktionen $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Falls eine der Voraussetzungen

$$(\mathrm{V}_0)\ \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0 \text{ oder}$$

$$(\mathrm{V}_\infty)\ \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = \infty$$

erfüllt ist UND falls

$$(\mathrm{K})\ \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \text{ existiert (auch als uneigentlicher Grenzwert),}$$

so gilt auch

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Mit den entsprechenden Modifikationen ist die Aussage für $x \to b-$, $x \to \infty$ im Fall $D = (a, \infty)$, $x \to -\infty$ im Fall $D = (-\infty, b)$ sowie für den beidseitigen Grenzwert $x \to x_0$ im Fall $D = (a, b)\setminus\{x_0\}$ gültig.

Beispiele

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{\cos^2 x}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \dfrac{1}{x}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Kurvendiskussion

13.2 Kriterien für Extrema

Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei n-mal stetig differenzierbar, und für ein $x_0 \in (a,b)$ gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann folgt:

- Ist n gerade, so hat f in x_0 ein relatives Extremum. Im Fall $f^{(n)}(x_0) > 0$ handelt es sich dabei um ein relatives Minimum, und im Fall $f^{(n)}(x_0) < 0$ handelt es sich um ein relatives Maximum.
- Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein relatives Extremum, sondern einen sog. *Sattelpunkt*. Dann ändert sich das Monotonieverhalten von f an der Stelle x_0 nicht.

13.3 Konvexität, Konkavität, Wendepunkt

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und ein Teilintervall $J \subseteq (a, b)$.

(a) f heißt *konvex* in J, wenn für je zwei Punkte $c, d \in J$, $c < d$, die Sekante

$$S(x; c, d) = f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}\,(x - c), \qquad x \in [c, d]$$

oberhalb des Graphen von f liegt, also

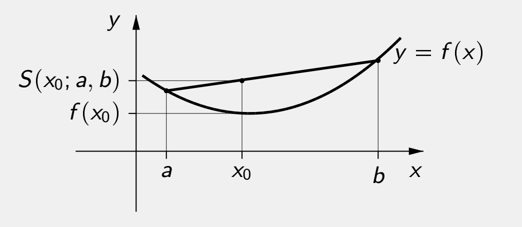
$$f(x) \leqslant S(x; c, d) \quad \text{für} \quad x \in [c, d] \quad \text{gilt.}$$

(b) f heißt *konkav* auf dem Intervall J, wenn für je zwei Punkte $c, d \in J$, $c < d$, die Sekante $S(x; c, d)$ unterhalb des Graphen von f liegt, also

$$f(x) \geqslant S(x; c, d) \quad \text{für} \quad x \in [c, d] \quad \text{gilt.}$$

(c) f hat an der Stelle $x_1 \in (a, b)$ einen *Wendepunkt*, wenn f in x_1 stetig ist und hier ein Konvexitäts- und ein Konkavitätsintervall von f aneinanderstoßen.

f konvex $\iff -f$ konkav.



13.4 Kriterium für Konvexität

Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei 2-mal stetig differenzierbar, $J \subseteq (a, b)$ sei ein Intervall. Dann gilt:

- f ist konvex (linksgekrümmt) in $J \iff f''(x) \geqslant 0$ für alle $x \in J$
- f ist konkav (rechtsgekrümmt) in $J \iff f''(x) \leqslant 0$ für alle $x \in J$
- f hat einen Wendepunkt an der Stelle $x_1 \implies f''(x_1) = 0$.

Insbesondere ist eine differenzierbare Funktion genau dann konvex, wenn f' monoton wachsend ist.

Die Differentialrechnung ermöglicht eine genaue Beschreibung der Graphen von Funktionen. Meist ist nur die Abbildungsvorschrift $y = f(x)$ gegeben. Dann gehört zur Kurvendiskussion:

- Definitionsbereich bestimmen (d.h. alle $x \in \mathbb{R}$, für die $f(x)$ erklärt ist, z.B. bei Brüchen auf Nullstellen des Nenners achten, bei Wurzeln und Logarithmen aufpassen)

- einseitige Grenzwerte am Rand und in den Lücken des Definitionsbereichs (auch uneigentliche Grenzwerte, "Polstellen");
Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ ("horizontale Asymptoten")

- Nullstellen von f (d.h. die Schnittpunkte mit der x-Achse) und evtl. den Schnittpunkt $(0, f(0))$ mit der y-Achse

- Berechnen der 1. und 2. Ableitungen, dabei auf Ausnahmestellen achten, an denen die Ableitung nicht existiert (z.B. bei $f(x) = \sqrt[3]{x}$ bei $x_0 = 0$). Falls f dort einen endlichen Grenzwert besitzt, sind die einseitigen Grenzwerte von f' wichtig (welche Steigung, incl. $\pm\infty$, hat der Graph hier?).

- relative Extremwerte und Monotoniebereiche:
  - Zuerst berechnet man alle Nullstellen von f' als mögliche Kandidaten für die relativen Extremwerte von f. Die Monotoniebereiche sind dann die Intervalle zwischen den Nullstellen von f' und den evtl. vorhandenen Lücken im Definitionsbereich von f'.
  - Durch Einsetzen je eines x-Werts aus jedem Monotonie-Intervall in die 1. Ableitung kann man das Vorzeichen von f' im gesamten Monotonie-Intervall (und damit die Art der Monotonie, also $f' \geqslant 0$ für monoton wachsendes f und $f' \leqslant 0$ für monoton fallendes f) bestimmen. Wechselt das Monotonie-Verhalten an der Nullstelle x' von f', so hat f dort einen relativen Extremwert (relatives Maximum oder Minimum).
  - Manchmal ist auch Satz 13.2 nützlich zur Bestimmung, ob es sich bei x' um ein relatives Minimum, relatives Maximum oder gar kein relatives Extremum (sondern einen Sattelpunkt) handelt. Dann folgt für die gesamten Monotonie-Intervalle links und rechts von x' das entsprechende Monotonieverhalten.

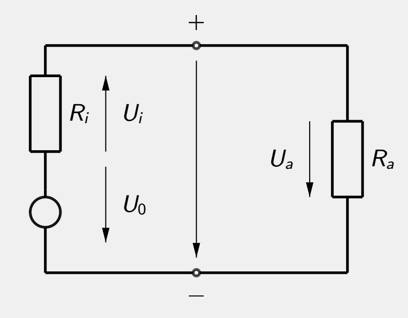
- Wendepunkte und Konvexität bzw. Konkavität (siehe Definition 13.3):
    - Berechne alle Nullstellen von f'' als mögliche Kandidaten für die Wendepunkte von f (siehe Satz 13.4). Die Bereiche von Konvexität (Linkskrümmung) und Konkavität (Rechtskrümmung) sind dann die Intervalle zwischen den Nullstellen von f'' und den evtl. vorhandenen Lücken im Definitionsbereich von f''. Das Vorzeichen von f'' in diesen Intervallen kann wieder durch Einsetzen je eines x-Wertes in f'' festgestellt werden. Die Konvexität bzw. Konkavität folgt daraus mit Satz 13.4
- "schräge" Asymptoten: insbesondere bei rationalen Funktionen hilft die Polynomdivision, auch Asymptoten der Form $g(x) = ax + b$ für $x \to \pm\infty$ zu bestimmen.

Extremwertaufgaben

Die Suche nach dem **absoluten** Maximum oder Minimum einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ erfordert die Bestimmung aller relativen Extremwerte sowie der Grenzwerte (bzw. Funktionswerte) von f am Rand und in den Lücken des Definitionsbereichs D. (Meistens ist D ein kompaktes Intervall $D = [a, b]$.)

13.5 Beispiel: Leistungsanpassung am Widerstand

Eine elektrische Reihenschaltung bestehe aus einer Spannungsquelle U_0 mit dem Innenwiderstand R_i sowie einem regelbaren Außenwiderstand R_a. Wie groß muss R_a gewählt werden, damit bei vorgegebenem U_0 und R_i die Leistung P_a des Außenwiderstandes maximal wird?



Rechnung:

- Zielfunktion ist die Leistung $P_a = R_a \cdot I^2$
- Variable ist $x = R_a$
- Die Stromstärke I ergibt sich aus $I = \frac{U_0}{R_a + R_i} = \frac{U_0}{x + R_i}$

Wir müssen also das absolute Maximum der Zielfunktion

$$P_a(x) = x \cdot \left(\frac{U_0}{x + R_i}\right)^2 = \frac{xU_0^2}{(x + R_i)^2}, \qquad x \geqslant 0,$$

bestimmen. Mit

$$P_a'(x) = \frac{(R_i - x)U_0^2}{(x + R_i)^3}$$

finden wir die einzige Nullstelle von P_a' bei $x_0 = R_i$. Monotonie-Untersuchung ergibt, dass hier ein relatives und sogar absolutes Maximum vorliegt.

Also wird die Leistung am Widerstand R_a genau für $R_a = R_i$ maximal.

Wichtige Ungleichungen der Analysis

Die Konkavität einiger Funktionen führt zu schönen Ungleichungen.

13.6 Ungleichung zwischen gewichteten Mitteln

Für alle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ mit Summe $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ und alle Zahlen $a_1, \ldots, a_n > 0$ gilt die *Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel*

$$a_1^{\lambda_1}\, a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n.$$

Beispiel: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ ergibt die übliche Ungleichung $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ für alle $a, b > 0$.

Polynom-Interpolation: Der Interpolations-Fehler

Vorbereitung: Der Satz von Rolle (12.14) hat als wichtige Konsequenz:

13.7 Hilfssatz

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, I ein Intervall. Wenn $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$ Nullstellen von f sind, so hat f' mindestens $r-1$ Nullstellen $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{r-1}$, und diese trennen die Nullstellen von f, d.h.

$$x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < \cdots < x_{r-1} < \xi_{r-1} < x_r.$$

Im Abschnitt über Vektorräume werden zu den Knoten

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n$$

die *Lagrange-Grundpolynome* des Grades n

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

definiert.

13.8 Polynom-Interpolation

Gegeben seien $n+1$ Punkte $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ im Intervall $[a, b]$ und eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann heißt das Polynom P vom Grad n,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x)$$

das *Interpolationspolynom* von f, weil $P(x_j) = f(x_j)$ für $j = 0, 1, \ldots, n$ erfüllt ist.

Wie gut ist die Näherung von $P(x)$ an $f(x)$ für $x \neq x_j$?

Satz: Interpolationsfehler

Die Funktion f sei $n+1$-mal differenzierbar. Dann gibt es für jedes $x \in [a, b]$ mit $x \neq x_j$ für alle $j = 0, 1, \ldots, n$ ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Hierbei ist P das Interpolationspolynom von f und ξ kann im Intervall $J_x := [\min(x, x_0), \max(x, x_n)]$ gewählt werden.

Verfahren zur Nullstellen-Berechnung

Gegeben: $f[a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a)f(b) < 0$ (es liegt ein Vorzeichenwechsel vor)

- gesucht: Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = z$, z Nullstelle von f (siehe Zwischenwertsatz 11.12)

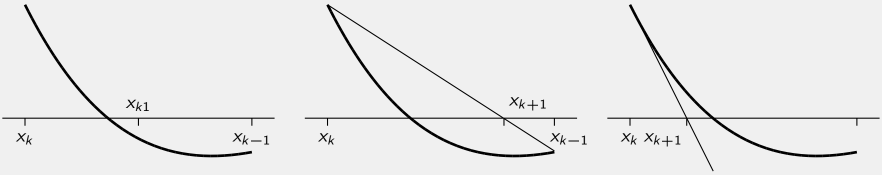
13.9 Nullstellenbestimmung

- Wahl von zwei Startwerten x_0 und x_1 mit $f(x_0)f(x_1) < 0$
- Berechne für $k = 1, 2, \ldots$

$$x_{k+1} = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \qquad \textit{Bisektionsverfahren}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\, f(x_k) \qquad \textit{Regula Falsi}$$

und verwerfe entweder x_{k-1} oder x_k je nach dem Vorzeichen von $f(x_{k+1})$



Bisektionsverfahren | Sekantenverfahren und Regula falsi | Newtonverfahren

13.10 Sekanten-Verfahren

- Wahl von zwei Startwerten x_0 und x_1
- Berechne für $k = 1, 2, \ldots$ die Nullstelle der Sekante zu x_{k-1} und x_k, also

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\, f(x_k)$$

13.11 Newton-Verfahren

Voraussetzung: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar, $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$

- Wahl eines Startwerts x_0
- Berechne für $k = 0, 1, \ldots$ die Nullstelle der Tangente zu x_k, also

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Konvergenzbetrachtungen: z sei die einzige Nullstelle von f in $[a, b]$

- Bisektionsverfahren: $|x_{k+1} - z| \leqslant 2^{-k}|x_1 - x_0|$
- Newton-Verfahren: $|x_{k+1} - z| \leqslant C|x_k - z|^2$,
  falls
  - $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar ist,
  - $f'(x) \neq 0$ in (a, b) gilt,
  - der Startwert x_0 nahe genug bei z gewählt wird.

  Das Quadrat in $|x_k - z|^2$ bewirkt, dass sich die Anzahl der exakten Dezimalstellen ungefähr in jedem Schritt verdoppelt. Man sagt, dass das Newton-Verfahren für hinreichend gut gewählte Startwerte x_0 quadratisch gegen die Nullstelle konvergiert.