3 Vektoren

3.1 Kartesische Koordinaten in Ebene und Raum

In der Ebene (mathematisch ist dies die Menge $\mathbb{R}^2$) ist ein *kartesisches Koordinatensystem* festgelegt durch den Nullpunkt $\mathbf{0}$ sowie zwei Zahlengeraden (die x- und die y-Achse), die sich senkrecht im Nullpunkt schneiden. Ein Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ hat als x- und y-Koordinate jeweils den Wert, der sich durch orthogonale Projektion auf die entsprechende Achse ergibt.

Im dreidimensionalen Raum (mathematisch ist dies die Menge $\mathbb{R}^3$) ist ein *kartesisches Koordinatensystem* festgelegt durch den Nullpunkt $\mathbf{0}$ sowie drei Zahlengeraden (die x-, y- und z-Achse), die sich im Nullpunkt schneiden, paarweise senkrecht stehen und ein *Rechtssystem* bilden. Ein Punkt $P \in \mathbb{R}^3$ hat als x-, y- und z-Koordinate jeweils den Wert, der sich durch orthogonale Projektion auf die entsprechende Achse ergibt.

3.2 Definition: Vektor

Ein *Vektor* $\vec{a}$ ist eine Größe, die sowohl durch den Betrag $|\vec{a}| \geqslant 0$ (=Länge des Vektors) als auch durch seine Richtung und den Richtungssinn festgelegt ist (z.B. Kraft, Geschwindigkeit).

Sonderfall: Der *Nullvektor* $\vec{0}$ hat den Betrag 0, seine Richtung ist nicht definiert.

3.3 Addition, Multiplikation mit einem Skalar

- Wird der Vektor $\vec{a}$ dargestellt durch die gerichtete Strecke von P nach Q, und der Vektor $\vec{b}$ durch die gerichtete Strecke von Q nach R, so ist die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ der Vektor, der durch die gerichtete Strecke von P nach R dargestellt wird. (*Diagonalregel*)

- Ist $\vec{a}$ ein Vektor und $\alpha > 0$, so ist $\alpha\vec{a}$ derjenige Vektor, der dieselbe Richtung und denselben Richtungssinn wie $\vec{a}$ hat und dessen Betrag $\alpha|\vec{a}|$ ist.

  - Für $\alpha < 0$ ist $\alpha\vec{a} = -|\alpha|\,\vec{a}$ derjenige Vektor, der dieselbe Richtung und den entgegengesetzten Richtungssinn wie $\vec{a}$ hat und dessen Betrag $|\alpha|\,|\vec{a}|$ ist.

  - Für $\alpha = 0$ ist $\alpha\vec{a}$ der Nullvektor.

- Es gelten die üblichen Rechengesetze: Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz. Hinzu kommt die Regel zur Multiplikation mit Skalaren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}.$$
- Die Summe von Vektoren erhält man durch Bilden einer "Vektorkette" und Verbinden des ersten Anfangspunktes mit dem letzten Endpunkt.

Wir benutzen die platzsparende Schreibweise

$$(a, b, c)^\top := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

3.4 Vektoren im kartesischen Koordinatensystem

In einem kartesischen Koordinatensystem wird jedem Vektor $\vec{a}$ ein fester *Ortsvektor* mit dem Anfangspunkt $\mathbf{0}$ zugeordnet. Ist $A = (a_1, a_2, a_3)^\top$ der Endpunkt dieses Ortsvektors, so nennt man $(a_1, a_2, a_3)^\top$ den *Koordinatenvektor* von $\vec{a}$ und schreibt $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^\top$.

- Die gewählten Koordinatenachsen definieren die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0)^\top, \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0)^\top, \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1)^\top$$

  mit Anfangspunkt $\mathbf{0}$ und Endpunkt bei der Längeneinheit auf der jeweiligen Koordinatenachse. Die "Kurzschreibweise" $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ wird mathematisch ausgedrückt durch die Vektorsumme

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

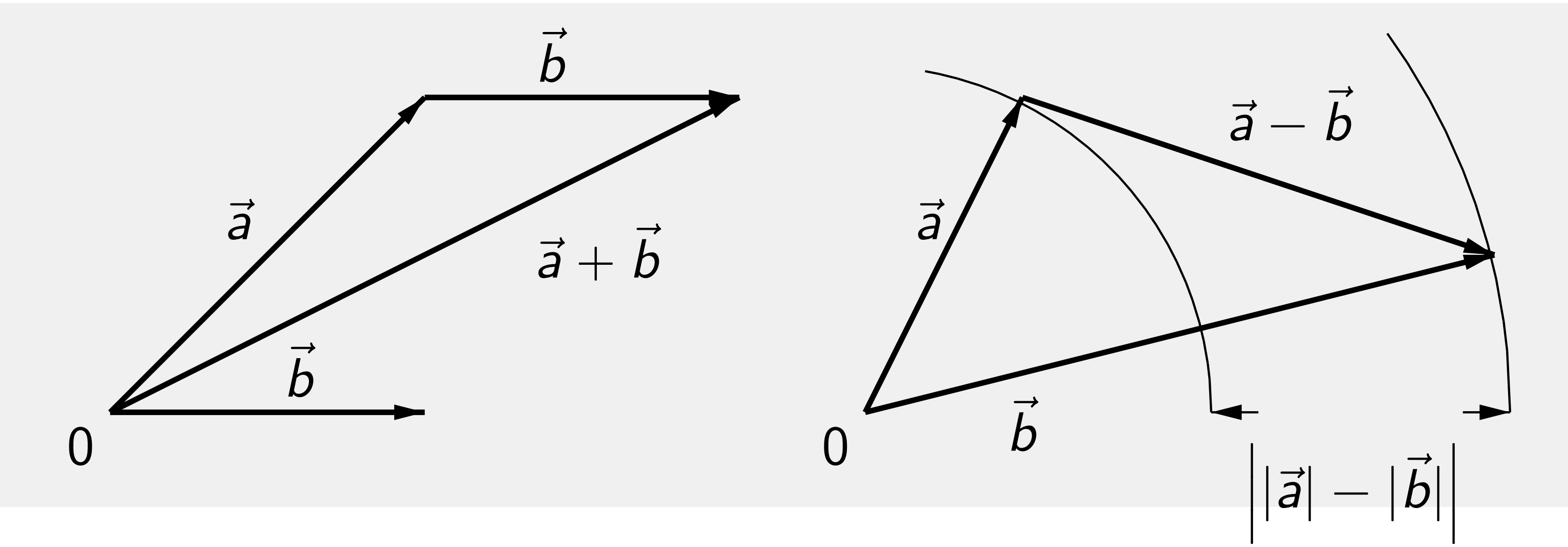
- Summe und Multiplikation mit Skalaren:
  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^\top$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^\top$ $\alpha \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)^\top, \ \alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)^\top$$

- Ebenso einfach ergibt sich der Betrag:
  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^\top \implies |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

- Es gilt die Betragsformel $|\alpha\vec{a}| = |\alpha|\,|\vec{a}|$, sowie
  - $\alpha\vec{a} = \vec{0} \iff \alpha = 0 \vee \vec{a} = \vec{0}$.
  - $|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (1. Dreiecksungleichung)
    $\Big||\vec{a}| - |\vec{b}|\Big| \leqslant |\vec{a} - \vec{b}|$ (2. Dreiecksungleichung)

- Vektoren der Länge $|\vec{a}| = 1$ heißen *Einheitsvektoren*. Zu beliebigem $\vec{a} \neq \vec{0}$ erhält man durch "Normierung" den Einheitsvektor $\vec{b} = \frac{1}{|\vec{a}|}\,\vec{a}$.



3.5 Winkel und Skalarprodukt

Stellen wir beide Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ mit dem gemeinsamen Anfangspunkt P dar, so ist

$$0 \leqslant \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant \pi$$

der hierdurch definierte Winkel im Punkt P. Mit

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := |a|\,|b|\,\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$$

wird das *Skalarprodukt* der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definiert. Zusätzlich setzen wir $\vec{0} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{0} = 0$.

3.6 Berechnungsformel für das Skalarprodukt mit Koordinatenvektoren

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^\top, \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^\top \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

- Kommutativgesetz und Distributivgesetz(e)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

- Assoziativität bezüglich der Multiplikation mit Skalaren

$$(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b}),$$

Aber Vorsicht: $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ ist ein skalares Vielfaches des Vektors $\vec{c}$, während $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$ ein skalares Vielfaches des Vektors $\vec{a}$, also im Allgemeinen verschieden davon ist.

- Es gilt $|a| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$, und

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leqslant |\vec{a}|\ |\vec{b}| \qquad \text{(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)}$$

  Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn die Vektoren *kollinear* sind, also einer der beiden Vektoren ein Vielfaches des anderen ist; d.h. wenn eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\vec{b} = \alpha \vec{a} \quad \vee \quad \vec{a} = \alpha \vec{b}.$$

- Aufgrund der Orthogonalität der Koordinatenachsen gilt

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

- Die Dreiecksungleichung in 3.4 folgt direkt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 \leqslant |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\ |\vec{b}| + |\vec{b}|^2 \\ &= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2. \end{aligned}$$

3.7 Orthogonalität von Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ sind zueinander *orthogonal*, wenn

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$$

gilt. Der Nullvektor $\vec{0}$ ist per Definition orthogonal zu jedem Vektor $\vec{a}$. Damit sind äquivalent:

$$\vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ orthogonal} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

3.8 Beispiel

Die Diagonalen eines Parallelogramms sind genau dann zueinander orthogonal, wenn alle vier Seiten die gleiche Länge haben.

Die Distributivgesetze ergeben zwei wichtige Rechenregeln:

3.9 Satz des Pythagoras, Parallelogrammgesetz

a) Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{a} \perp \vec{b}$ gilt

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2.$$

b) Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}\left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2\right).$$

Bemerkungen:

- Die “algebraische” Berechnung des Skalarprodukts dient oft der Winkelberechnung:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

  Der Bruch $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}$ liegt im Intervall $[-1, 1]$ (siehe Cauchy-Schwarz-Ungl. in 3.6 oder 1.20). Daher ist der Winkel $0 \leqslant \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant \pi$ eindeutig bestimmt.

- Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leqslant |\vec{a}|\ |\vec{b}|$ in 3.6 lautet in Koordinatenschreibweise genau wie in 1.20. Die geometrische Definition in 3.5 liefert sogar die genaue Charakterisierung, wann das Gleichheitszeichen gilt.

Zwei weitere Produkte für Vektoren werden definiert.
Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$ möchte man das *Vektorprodukt* $\vec{a} \times \vec{b}$ als denjenigen Vektor im $\mathbb{R}^3$ definieren, dessen Betrag

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

ist, dessen Richtung senkrecht zu der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene ist und dessen Richtungssinn so gewählt ist, dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem bilden.
Zusätzlich setzt man $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}$.

3.10 Definition: Vektorprodukt

Dieses kann man (eindeutig) durch folgende Bedingungen festlegen:

1. Stets sei $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ und $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$
3. Es gelten Distributiv- and Assoziativgesetze analog zu 3.6

Bemerkungen:

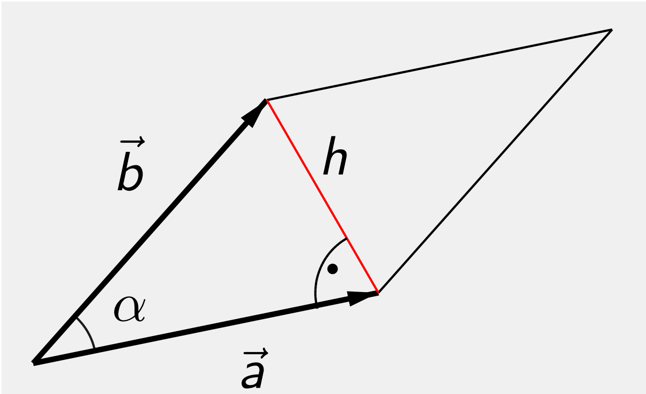
- Es ist $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- Für $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^\top$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^\top$ erhält man

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)^\top$$

- Einfaches Nachrechnen ergibt

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$$

- Der Betrag $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist der Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten $\vec{a}$ und $\vec{b}$, und die Richtung ist senkrecht (orthogonal) zu diesem Parallelogramm; der Vektor $\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b}$ erfüllt also die Orthogonalitätsbedingungen



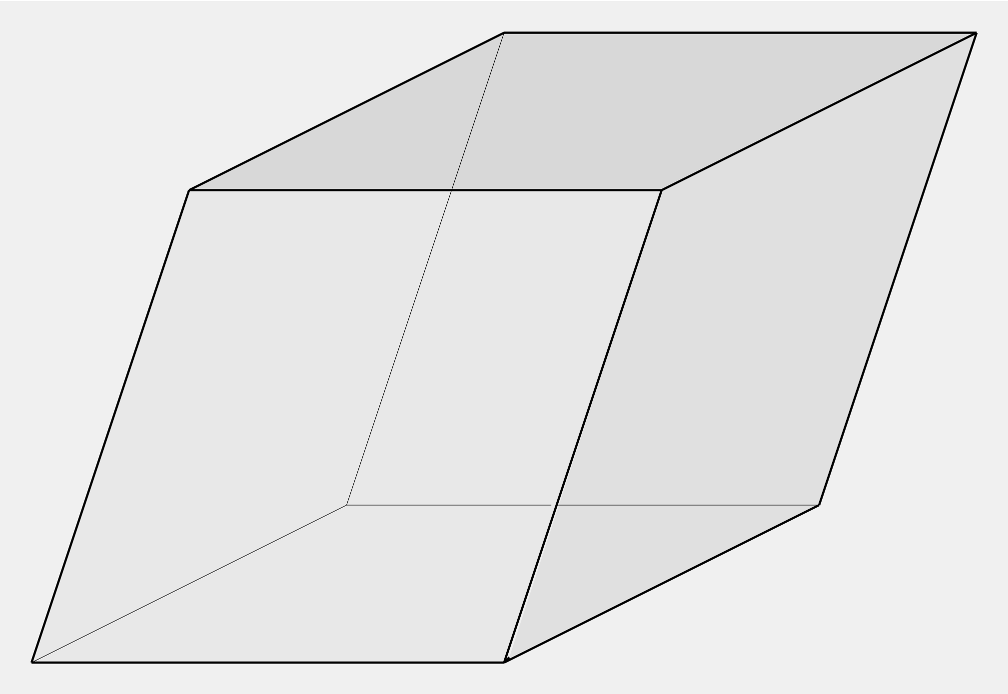
$$\vec{w} \perp \vec{a}, \qquad \vec{w} \perp \vec{b}.$$

- Merkregel von Sarrus $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$
- oder für $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ mit

$$\begin{array}{ccl}
a_1 & b_1 & \\
 & & \\
a_2 & b_2 & \\
 & & c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \\
a_3 & b_3 & \\
 & & c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \\
a_1 & b_1 & \\
 & & c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \\
a_2 & b_2 &
\end{array}$$

3.11 Definition: Spatprodukt

Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ definiert man das *Spatprodukt* $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.
Dies ist ein Skalar, dessen Absolutbetrag das Volumen des von den drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten *Spates* (auch *Parallelepiped genannt*) angibt.



Kap. 4: Geraden und Ebenen

Wir behandeln zunächst Geraden im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$. Sei also $n = 2$ oder 3.

4.1 Parameterdarstellung von Geraden

Die *Gerade* durch den Punkt $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ mit dem *Richtungsvektor* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$, ist gegeben durch die Menge

$$G = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{p} + t\vec{v},\ \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Das Skalar t zum Punkt $\vec{x} = \vec{x}(t) = \vec{p} + t\vec{v} \in G$ heißt der Parameterwert von $\vec{x}$.

- Um die Parameterdarstellung der Geraden G durch die Punkte $\vec{p}$ und $\vec{q}$ (mit $\vec{p} \neq \vec{q}$) zu bestimmen, berechnet man den Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{q} - \vec{p}$.

4.2 Lot auf eine Gerade, Abstand Punkt-Gerade

Die Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^n$ sei gegeben durch ihre Parameterdarstellung $\vec{x}(t) = \vec{p} + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$ (beachte $\vec{v} \neq \vec{0}$).

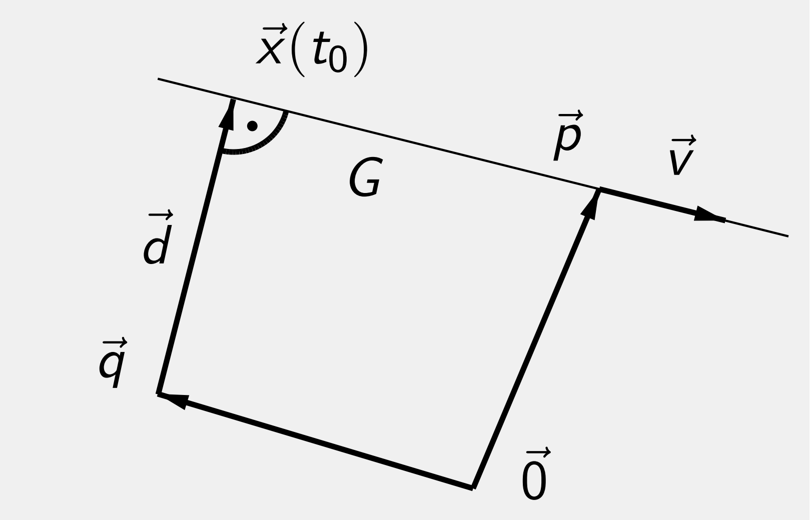
Zu einem weiteren Punkt $\vec{q} \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau einen Punkt $\vec{x}(t_0) \in G$, so dass

$$\vec{q} - \vec{x}(t_0) \perp \vec{v}$$

gilt. Dieser Punkt $\vec{x}(t_0)$ heißt der *Fußpunkt des Lots* von $\vec{q}$ auf die Gerade G.

Weiter gilt: $|\vec{q} - \vec{x}(t_0)|$ ist der *Abstand* des Punktes $\vec{q}$ von G, d.h.

$$\operatorname{dist}(\vec{q}, G) = |\vec{q} - \vec{x}(t_0)| < |\vec{q} - \vec{x}(t)| \quad \text{für alle} \quad t \neq t_0$$



4.3 Beispiel:

Gerade G durch die Punkte $(5, 1, -1)^\top$ und $(3, -3, 3)^\top$; Lot vom Punkt $\vec{q} = (0, 0, 0)^\top$ auf G (ergibt den Abstand von G zum Nullpunkt)

Spezielle Darstellung von Geraden im $\mathbb{R}^2$

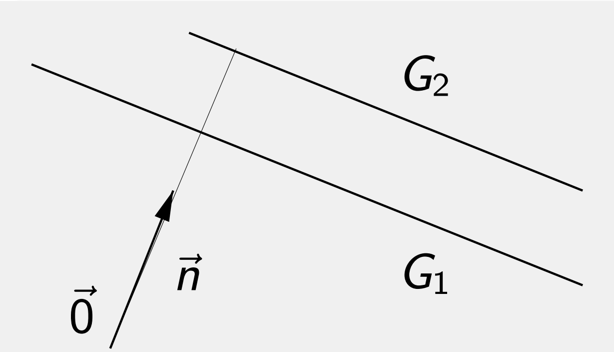
4.4 Normalenform, Hesse-Normalform

Zu gegebenen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ definiert die Menge

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = c\}$$

eine Gerade; der Vektor $(a, b)^\top$ steht senkrecht auf jedem Richtungsvektor $\vec{v}$ von G und heißt *Normalenvektor* von G.

Für $|(a, b)^\top| = 1$ und $c \geqslant 0$ heißt die gegebene Form die *Hesse-Normalform* von G. Die Zahl c ist dabei der Abstand von G zum Nullpunkt des $\mathbb{R}^2$. Der *Normalen-Einheitsvektor* $(a, b)^\top$ steht senkrecht auf G und zeigt vom Nullpunkt weg.



$G_1 : \vec{x} \cdot \vec{n} = c,\ G_2 : \vec{x} \cdot \vec{n} = d$
Für $|\vec{n}| = 1$ sind dann c und d die Abstände der Geraden vom Ursprung, $|c - d|$ ist der Abstand der Geraden.

Die Hesse-Normalform wird bei Abstandsberechnungen eingesetzt:

4.5 Beispiel:

Die Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^2$ durch die Punkte $\vec{p} = (4, -1)$ und $\vec{q} = (3, 1)$

Ebenen im $\mathbb{R}^3$

4.6 Parameterdarstellung von Ebenen

Die *Ebene* durch den Punkt $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ mit den nicht-kollinearen *Richtungsvektoren* $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch die Menge

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \vec{p} + s\vec{v} + t\vec{w},\ \ s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Das Paar (s, t) zum Punkt $\vec{x} = \vec{x}(s, t) = \vec{p} + s\vec{v} + t\vec{w} \in E$ heißt das Parameterpaar zum Punkt $\vec{x}$.

- Um die Parameterdarstellung der Ebene E durch drei Punkte $\vec{p}$, $\vec{q}$ und $\vec{r}$ zu bestimmen, die nicht alle auf einer Geraden liegen, berechnet man die Richtungsvektoren $\vec{v} = \vec{q} - \vec{p}$ und $\vec{w} = \vec{r} - \vec{p}$. Diese sind dann nicht-kollinear.
- Die Richtungsvektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann nicht-kollinear, wenn $\vec{n} := \vec{v} \times \vec{w} \neq \vec{0}$ gilt. $\vec{n}$ ist Normalenvektor der Ebene (d.h. $\vec{n}$ steht senkrecht auf E).

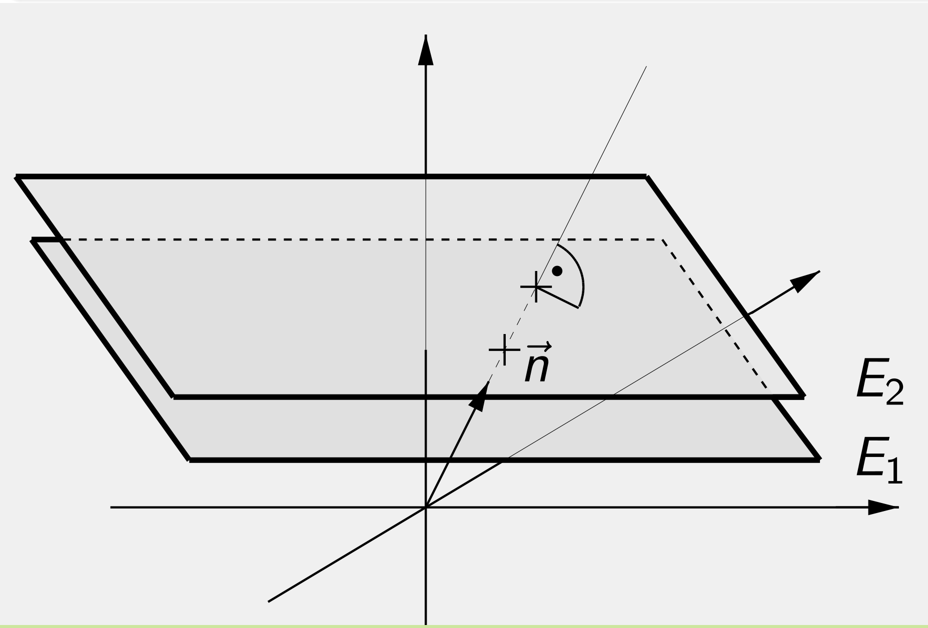
4.7 Normalenform, Hesse-Normalform von Ebenen im $\mathbb{R}^3$

Zu Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $\vec{n}^\top = (a, b, c)^\top \neq (0, 0, 0)^\top$ definiert die Menge

$$E = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\} = \{\vec{x} \mid \vec{x} \cdot \vec{n} = d\}$$

eine Ebene; der Vektor $(a, b, c)^\top$ steht senkrecht auf allen Richtungsvektoren $\vec{v}$ von E und heißt *Normalenvektor* von E.

Für $|\vec{n}| = 1$ und $d \geqslant 0$ heißt die gegebene Form die *Hesse-Normalform* von E. Die Zahl d ist dabei der Abstand von E zum Nullpunkt des $\mathbb{R}^3$. Der *Normalen-Einheitsvektor* $\vec{n}$ steht senkrecht auf E und zeigt vom Nullpunkt weg.



Sei $|\vec{n}| = 1$.

$$E_1 : \vec{x} \cdot \vec{n} = d_1, \quad E_2 : \vec{x} \cdot \vec{n} = d_2$$

Dann ist der Abstand der Ebene E_i zum Ursprung gerade $|d_i|$. Der Abstand der Ebenen ist $|d_1 - d_2|$.

- Die Umwandlung von der Parameterdarstellung in die Hesse-Normalform erfolgt so:
  - Mit dem Normalenvektor $\vec{n} = (a, b, c)^\top = \vec{v} \times \vec{w}$ (beachte $\vec{n} \neq \vec{0}$) und $d := \vec{p} \cdot \vec{n}$ ergibt sich die Normalenform $\vec{x} \cdot \vec{n} = ax + by + cz = d$.
  - Falls $d < 0$, ersetze $\vec{n}$ durch $-\vec{n}$ (und d durch $-d$).
  - Für die Hesse-Normalform ersetzt man $\vec{n}$ durch $\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}$.
- Die Umwandlung der Hesse-Normalform in die Parameterform erfolgt durch Bestimmung dreier Punkte $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in E$ (Einsetzen von x-, y- und z-Werten), die nicht auf einer Geraden liegen.
  Alternativ bestimmt man einen Punkt $\vec{p}$ und bestimmt zwei nicht kollineare Richtungsvektoren, die beide auf $\vec{n}$ senkrecht stehen.

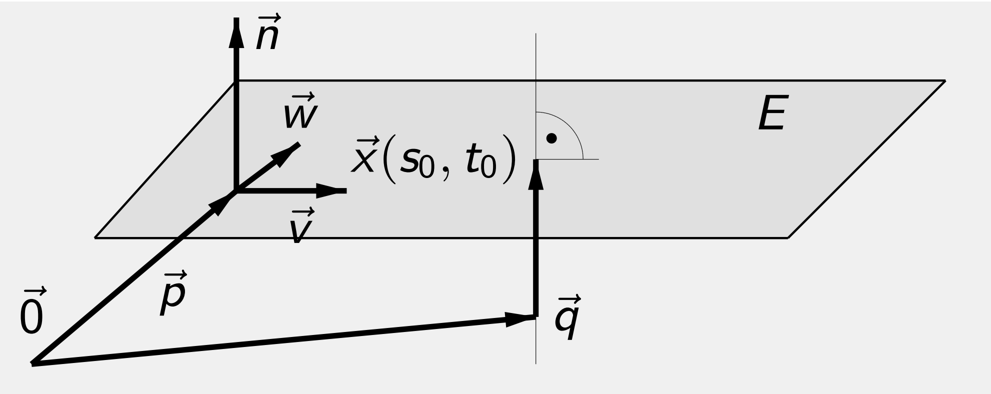
4.8 Lot auf eine Ebene, Abstand Punkt-Ebene

Die Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch ihre Parameterdarstellung $\vec{x}(s,t) = \vec{p} + s\vec{v} + t\vec{w}$, $s, t \in \mathbb{R}$. (beachte: $\vec{v} \times \vec{w} \neq \vec{0}$).
Zu einem weiteren Punkt $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$ gibt es genau einen Punkt $\vec{x}(s_0, t_0) \in E$, so dass

$$(\vec{q} - \vec{x}(s_0, t_0)) \perp \vec{v} \quad \wedge \quad (\vec{q} - \vec{x}(s_0, t_0)) \perp \vec{w}$$

gilt. Dieser Punkt $\vec{x}(s_0, t_0)$ heißt der *Fußpunkt des Lots* von $\vec{q}$ auf die Ebene E.
Weiter gilt: $|\vec{q} - \vec{x}(s_0, t_0)|$ ist der *Abstand* des Punktes $\vec{q}$ von E, d.h.

$$\operatorname{dist}(\vec{q}, E) = |\vec{q} - \vec{x}(s_0, t_0)| < |\vec{q} - \vec{x}(s,t)| \quad \text{für alle} \quad (s,t) \neq (s_0, t_0).$$



4.9 Definition: windschief

Zwei Geraden G_1 und G_2 im $\mathbb{R}^3$ heißen *windschief*, wenn sie sich weder schneiden noch parallel sind.

Die Geraden seien in Parameterform gegeben:

$$\begin{aligned} G_1 : \quad \vec{x}(t) &= \vec{p} + t\vec{v}, \qquad && t \in \mathbb{R}, \\ G_2 : \quad \vec{x}(u) &= \vec{q} + u\vec{w}, \qquad && u \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dann erfolgt die Berechnung des Abstands durch

- Bestimmung der Lot-Richtung $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ zwischen beiden Geraden
- Bestimmung des Lot-Fußpunkts auf G_2: Schnittpunkt von G_2 mit der Ebene durch $\vec{p}$ mit den Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{n}$.
- Bestimmung des Lot-Fußpunkts auf G_1: Schnittpunkt von G_1 mit der Ebene durch $\vec{q}$ mit den Richtungsvektoren $\vec{w}$ und $\vec{n}$.

Die Schnittmenge zweier Ebenen E_1 und E_2 ist häufig eine Gerade im $\mathbb{R}^3$. Ihre Parameterdarstellung erhält man, indem man die Parameterdarstellung der einen Ebene in die Normalenform der anderen Ebene “einsetzt” und damit einen der Parameter eliminiert.