Kap. 5: Lineare Gleichungssysteme

Wir beginnen mit der Behandlung linearer Gleichungssysteme. Im $\mathbb{R}^2$ sind z.B. "2 Gleichungen mit 2 Unbekannten" gegeben durch

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 1 \\ -x & + & 2y & = & 0 \end{array}$$

Dieses System von 2 Gleichungen hat die eindeutige Lösung $(x,y)^\top = (2,1)^\top$. Es gibt aber Systeme, die keine Lösung besitzen, wie z.B.

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & 2 \\ -x & + & 2y & = & 0 \end{array}$$

und auch solche, die unendlich viele Lösungen besitzen:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & 2 \\ -x & + & 2y & = & -1 \end{array}$$

Hier sind alle Punkte der Geraden $G: \quad (x,y)^\top = (3+2t, 1+t)^\top,\ t \in \mathbb{R}$, Lösungen.

5.2 Definition

Ein *lineares Gleichungssystem* von m Gleichungen mit den n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ ist ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

Die $a_{i,k} \in \mathbb{R}$ heißen die Koeffizienten und die $b_i \in \mathbb{R}$ heißen die rechten Seiten des Gleichungssystems.

Eine *Lösung* des linearen Gleichungssystems ist ein Vektor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, dessen Komponenten x_k alle m Gleichungen erfüllen.

Das Gleichungssystem heißt

- *lösbar* (oder *konsistent*), wenn es mindestens eine Lösung besitzt,
- *eindeutig lösbar*, wenn es genau eine Lösung besitzt.

5.3 Definition: homogenes lineares Gleichungssystem

Das lineare Gleichungssystem (geschrieben in Kurzform)

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k = b_i \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{$*$}$$

heißt *homogen*, falls alle rechten Seiten b_i gleich 0 sind. Ansonsten heißt es *inhomogen*.

- Ein homogenes lineares Gleichungssystem ist stets lösbar: Es besitzt die *triviale* Lösung $\vec{x} = (0, 0, \ldots, 0)^\top$.
- Das “zum linearen Gleichungssystem (*) gehörende homogene System” lautet

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{$**$}$$

Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems (**) hat die Struktur eines Vektorraums: Summen und skalare Vielfache von Lösungen sind selbst wieder Lösungen. Genauer:

5.4 Satz

Die Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems bilden einen Unter-Vektorraum V von $\mathbb{R}^n$; das heißt, zu zwei Lösungen $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)^\top$ und $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)^\top$ ist auch der Vektor $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ mit beliebigen Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

Die Linearität ergibt ein einfaches “Superpositions-Prinzip”:

5.5 Satz

Gegeben sei ein lösbares inhomogenes lineares Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k = b_i \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{$*$}$$

a) Sind $\vec{p}$ und $\vec{q}$ Lösungen von (*), so ist $\vec{v} := \vec{p} - \vec{q}$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems (**).

b) Ist $\vec{p}$ eine (spezielle) Lösung von (*), so erhält man alle Lösungen, indem man zu $\vec{p}$ alle Lösungen des zugehörigen homogenen Systems (**) addiert. Aus der Lösungsmenge $\mathbb{L}_h$ des homogenen Systems und der speziellen Lösung $\vec{p}$ ergibt sich also die Lösungsmenge des inhomogenen Systems

$$\mathbb{L} = \vec{p} + \mathbb{L}_h = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{p} + \vec{v}, \ \vec{v} \in \mathbb{L}_h\}$$

Zur Lösung linearer Gleichungssysteme verwendet man einfache Äquivalenz-Umformungen des Gleichungssystems.

5.6 Satz: Elementare Umformungen des LGS

Die Menge der Lösungen eines linearen Gleichungssystems bleibt unverändert, wenn man

- **E1** die Reihenfolge der Gleichungen vertauscht,
- **E2** beide Seiten einer Gleichung mit einer Zahl $\alpha \neq 0$ multipliziert,
- **E3** eine Gleichung ersetzt durch die Summe *dieser* Gleichung und dem Vielfachen einer *anderen* Gleichung.
- **E4** Vertauscht man die Reihenfolge der Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$, setzt also

$$(y_1, \ldots, y_n) := (x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n})$$

mit einer *Permutation* $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ der Zahlen $(1, \ldots, n)$, so erhält man die Lösungsmenge des neuen Systems (bzgl. $\vec{y}$) aus der Lösungsmenge des alten (bzgl. $\vec{x}$) durch entsprechende Vertauschung der Komponenten.

An drei Beispielen soll erklärt werden, wie man systematisch durch die Äquivalenz-Umformungen (E1)–(E3) sowie die Umformung (E4) eine *reduzierte Stufenform* des Gleichungssystems erhält, um die Lösungsmenge dann leicht zu bestimmen.

5.7 Drei Beispiele

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ -x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Kurzform}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	r.S.	
1	4	2	−1	2	
2	8	1	−1	3	Elimination mit E3
−1	2	1	0	2	Elimination mit E3
−1	−4	1	2	2	Elimination mit E3
1	4	2	−1	2	
0	0	−3	1	−1	Zeilentausch E1 (2 $\longrightarrow$ 3)
0	6	3	−1	4	und Skalierung E2
0	0	3	1	4	
1	4	2	−1	2	
0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	
0	0	−3	1	−1	Glück: keine Elim.
0	0	3	1	4	erforderlich, nur E2

$$\begin{array}{cccc|cl}
1 & 4 & 2 & -1 & 2 & \\
0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\
0 & 0 & 3 & 1 & 4 & \text{Elimination mit E3} \\
\hline
1 & 4 & 2 & -1 & 2 & \\
0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\
0 & 0 & 0 & 2 & 3 & \text{E2} \\
\hline
1 & 4 & 2 & -1 & 2 & \\
0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \\
\hline
\end{array}$$

Auflösen durch "Rücksubstitution" (von unten nach oben):

$$\begin{array}{lrcccl}
\text{Gl. 4:} & x_4 & = & \frac{3}{2} & & \\
\text{Gl. 3:} & x_3 - \frac{1}{3}x_4 & = & \frac{1}{3} & \Longrightarrow & x_3 = \frac{5}{6} \\
\text{Gl. 2:} & x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{6}x_4 & = & \frac{2}{3} & \Longrightarrow & x_2 = \frac{1}{2} \\
\text{Gl. 1:} & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 2 & \Longrightarrow & x_1 = -\frac{1}{6}, \qquad \text{Probe!}
\end{array}$$

Beispiel 2:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ -x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & & & = & -1 \\ -x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Kurzform}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	r.S.	
1	4	2	−1	2	
2	8	1	−1	3	Elimination mit E3
−1	−4	1	0	−1	Elimination mit E3
−1	−4	1	2	2	Elimination mit E3
1	4	2	−1	2	
0	0	−3	1	−1	
0	0	3	−1	1	
0	0	3	1	4	

Vertauschung von x_2 und x_3 (=Spaltentausch $(2 \leftrightarrow 3)$):

x_1	x_3	x_2	x_4	r.S.	
1	2	4	−1	2	
0	−3	0	1	−1	Skalierung E2
0	3	0	−1	1	
0	3	0	1	4	

x_1	x_3	x_2	x_4		
1	2	4	-1	2	
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
0	3	0	-1	1	Elimination mit E3
0	3	0	1	4	Elimination mit E3
1	2	4	-1	2	
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
0	0	0	0	0	
0	0	0	2	3	

Vertauschung von x_2 und x_4 (=Spaltentausch $(3 \leftrightarrow 4)$):

x_1	x_3	x_4	x_2	r.S.	
1	2	-1	4	2	
0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	
0	0	0	0	0	Zeilentausch E1 $(3 \leftrightarrow 4)$
0	0	2	0	3	und Skalierung E2
1	2	-1	4	2	
0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	
0	0	1	0	$\frac{3}{2}$	
0	0	0	0	0	

1. Feststellung: Das Gleichungssystem ist lösbar (konsistent), weil die letzte Gleichung (Nullzeile) lösbar ist.

2. Auflösen durch "Rücksubstitution" der Gleichungen 1–3, wobei die Komponente x_2 (aus Spalte 4) als freie Variable verwendet wird:

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Gl. 3:} & x_4 & = & \frac{3}{2} & \\
\text{Gl. 2:} & x_3 - \frac{1}{3}x_4 & = & \frac{1}{3} & \Longrightarrow \quad x_3 = \frac{5}{6} \\
\text{Gl. 1:} & x_1 + 2x_3 - x_4 + 4x_2 & = & 2 & \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{11}{6} - 4x_2,
\end{array}
$$

Probe!

Die Lösungsmenge ist eine Gerade im $\mathbb{R}^4$, weil ein "freier" Parameter $t = x_2$ vorliegt:

$$\mathbb{L} = \{\vec{x} = (\frac{11}{6} - 4t, t, \frac{5}{6}, \frac{3}{2}) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Eine spezielle Lösung ist $\vec{v} = (\frac{11}{6}, 0, \frac{5}{6}, \frac{3}{2})$.

- Die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems ist der Unter-Vektorraum

$$\mathbb{L}_h = \{\vec{x} = t(-4, 1, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Beispiel 3: Abändern der rechten Seite des Gleichungssystems

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ -x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & & & = & \color{red}{2} \\ -x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Kurzform}$$

führt zu der Stufenform

x_1	x_3	x_4	x_2	r.S.
1	2	-1	4	2
0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
0	0	1	0	$\frac{3}{2}$
0	0	0	0	$\color{red}{3}$

- Feststellung: Das Gleichungssystem ist nicht lösbar (inkonsistent), weil die letzte Gleichung der Stufenform nicht lösbar ist: Nullkoeffizienten von $x_1, \ldots, x_4$ treffen auf eine rechte Seite ungleich 0.

Die systematische Vorgehensweise führt zu folgendem Resultat:

5.8 Gauß-Algorithmus

Jedes lineare Gleichungssystem von m Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ kann durch endlich viele Umformungen der Form (E1)–(E4) auf die *reduzierte Stufenform* gebracht werden:

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_r & y_{r+1} & \cdots & y_n & \text{r.S.} \\
\hline
1 & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,r} & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1,n} & c_1 \\
0 & 1 & b_{2,3} & \cdots & b_{2,r} & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2,n} & c_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & b_{r-1,r} & b_{r-1,r+1} & \cdots & b_{r-1,n} & c_{r-1} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{r,n} & c_r \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+1} \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_m
\end{array}
$$

Dabei ist $(y_1, \ldots, y_n)$ eine Permutation der Komponenten des Vektors $(x_1, \ldots, x_n)$.

Die Zahl $r \leqslant \min\{m, n\}$ heißt der *Rang* des linearen Gleichungssystems.

5.8 Gauß-Algorithmus (forts.)

- Das Gleichungssystem ist lösbar (konsistent) genau dann, wenn $c_{r+1} = \cdots = c_m = 0$ gilt; dann wählt man $y_{r+1}, \ldots, y_n$ als "freie Variable" und bestimmt $y_1, \ldots, y_r$ aus den ersten r Gleichungen der reduzierten Stufenform.
- Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar genau dann, wenn $r = n$ und $c_{r+1} = \cdots = c_m = 0$ gilt.

Bemerkungen:

- Die entscheidende Zahl ist der Rang r des Gleichungssystems. Von vornherein kennt man nur die Abschätzungen $r \leqslant m$ und $r \leqslant n$.

- Wenn $r = m$ gilt ("voller Zeilenrang"), so ist das Gleichungssystem lösbar; denn es gibt keine Gleichungen (Zeilen) mit lauter Null-Koeffizienten in der reduzierten Stufenform.

- Wenn $r = n$ gilt ("voller Spaltenrang"), so existiert höchstens eine Lösung; denn alle Komponenten x_k sind durch die ersten n Gleichungen bereits eindeutig festgelegt. Die weiteren Gleichungen (für $m > n$) entscheiden dann darüber, ob dieser Vektor $\vec{x}$ eine Lösung ist oder nicht.

- Wenn $r < n$ gilt und das Gleichungssystem lösbar ist, gibt es unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge enthält $n - r$ freie Parameter $y_{r+1}, \ldots, y_n$. Sie ist eine Gerade im Fall $n - r = 1$, Ebene im Fall $n - r = 2$, etc.

Der Spezialfall $m = n$ (Anzahl der Gleichungen ist gleich der Anzahl der Unbekannten) tritt besonders häufig auf.

5.9 Alternativsatz

Für ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Unbekannten sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- Das Gleichungssystem ist für beliebige rechte Seiten eindeutig lösbar (also *universell eindeutig lösbar*).
- Das zugehörige homogene System hat nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.
- Das Gleichungssystem hat den Rang $r = n$.

Beweis: durch Kombination der Aussagen in der vorherigen Bemerkung.

Ein konstruktiver Beweis zur Existenz der reduzierten Stufenform wird durch die Beschreibung des Gauß-Algorithmus angegeben:

Man führt (maximal) n *Schritte* zur Elimination nach folgenden Regeln durch (erklärt anhand der Kurzform mit Zeilen und Spalten):
Im k-ten Schritt $(1 \leqslant k \leqslant n)$

k_1: betrachte die k-te Spalte ab dem Diagonalelement $b_{k,k}$ nach unten (also Zeilen $k \leqslant i \leqslant m$). Stehen hier nur Nullen (incl. $b_{k,k}$), so können zwei Fälle auftreten:

- 1. Fall: es gibt eine weitere Spalte mit Index $k+1 \leqslant \ell \leqslant n$, die ein von Null verschiedenes Element in mindestens einer Zeile $k \leqslant i \leqslant m$ enthält. Dann tausche die beiden Spalten und nummeriere die Unbekannten um (E4).
- 2. Fall: alle weiteren Spalten mit Index $k+1 \leqslant \ell \leqslant n$ enthalten nur Nullen in den Zeilen $k \leqslant i \leqslant m$. Dann ist die reduzierte Stufenform erreicht und der Algorithmus beendet.

k_2 falls das (neue) Diagonalelement $b_{k,k}$ Null ist, dann tausche Zeile k mit einer Zeile i unterhalb (also $k+1 \leqslant i \leqslant m$), deren Element $b_{i,k}$ derselben Spalte ungleich Null ist (E1).

k_3: dividiere die k-te Zeile (incl. der k-ten Komponente der rechten Seite) durch das (neue) Diagonalelement $b_{k,k} \neq 0$ (E2). Dadurch entsteht das neue Diagonalelement $b_{k,k} = 1$.

k_4: subtrahiere das $b_{i,k}$-fache der Zeile k von Zeile i für $k+1 \leqslant i \leqslant m$ (E3). Dadurch entstehen Nullen unterhalb des Diagonalelements $b_{k,k} = 1$.

5.10 Komplexe Gleichungssysteme

Alles gilt analog für komplexe Gleichungssysteme.

Kap. 6: Vektorräume

Als Verallgemeinerung des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ betrachten wir allgemeine Vektorräume und Skalarprodukte.
Da die Vektoren in allgemeinen Vektorräumen nicht mehr nur Zahlentupel sein müssen, schreiben wir sie ohne den Vektorpfeil.

6.1 Definition: Vektorraum

Eine nichtleere Menge V, auf der eine Addition

$$v + w \in V \quad \text{für alle} \quad v, w \in V$$

sowie eine Multiplikation mit Skalaren

$$\alpha v \in V \quad \text{für alle} \quad v \in V,\ \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{bzw. } \alpha \in \mathbb{C}),$$

definiert ist, heißt *reeller* (bzw. *komplexer*) *Vektorraum*, wenn die folgenden Gesetze erfüllt sind:

Für alle $u, v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ gelte

(a) $u + v = v + u$ (Kommutativgesetz)

(b) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Assoziativgesetz)

(c) Es gibt einen Nullvektor 0 mit der Eigenschaft $u + 0 = 0 + u = u$ für alle $u \in V$

(d) Zu jedem Vektor u gibt es einen Vektor $-u$ mit der Eigenschaft $u + (-u) = (-u) + u = 0.$

(e) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u \quad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (Distributivgesetze)

(f) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ $1u = u$

6.2 Satz: $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$

Der n-dimensionale *euklidische Raum* ist die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Ein Element $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ heißt ein *Vektor*, und für $1 \leqslant k \leqslant n$ heißt x_k die k-te *Koordinate* oder *Komponente* von $\vec{x}$.
Der Vektor $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$ heißt *Nullvektor*.

In einem kartesischen Koordinatensystem aus n paarweise senkrechten Koordinatenachsen definiert der Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit Anfangspunkt $(0, \ldots, 0)$ (=Koordinatenursprung) und Endpunkt $P = (x_1, \ldots, x_n)$ den *Ortsvektor* von P.
Analog wird $\mathbb{C}^n$ definiert.

Summe und Multiplikation mit Skalaren wird definiert durch

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

Wichtigste Beispiele

$\mathbb{R}^n$ ist ein reeller und $\mathbb{C}^n$ ein komplexer Vektorraum.

6.3 Unterraum

Eine Teilmenge U eines Vektorraums V heißt *Unterraum*, wenn U mit den Verknüpfungen von V selbst ein Vektorraum ist.
Dazu reicht es aus, dass mit u und v stets αu und $u - v$ wieder in U sind.

6.4 Definition: Skalarprodukt

Sei V ein Vektorraum. Ein reelles (komplexes) Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung

$$< .,. >: V \times V \to \mathbb{R} \quad (\mathbb{C})$$

mit den Eigenschaften

(a) $< v, v > \geqslant 0$ und $< v, v >= 0 \iff v = 0$ — Definitheit

(b) $< \alpha v + \beta u, w >= \alpha < v, w > + \beta < u, w >$ — Linearität im ersten Faktor

(c) $< u, v >=< v, u > \quad (< u, v >= \overline{< v, u >})$ — Symmetrie (Hermitizität)

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt heißt *Skalarproduktraum*.

Aus (b) und (c) folgt unmittelbar

$$< u, \alpha v + \beta w >= \overline{\alpha} < u, v > + \overline{\beta} < u, w >$$

Im reellen Fall tritt die Konjugation natürlich nicht auf.

6.5 Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$

Für Vektoren $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ des $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ wird das *Skalarprodukt* auch mit dem Punkt geschrieben, und ist definiert als

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = < \vec{x}, \vec{y} > = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \qquad (\vec{x} \cdot \vec{y} = < \vec{x}, \vec{y} > = x_1 \overline{y_1} + \ldots + x_n \overline{y_n})$$

6.6 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Ist V ein Skalarproduktraum, so gilt

$$| < u, v > | \leqslant \sqrt{< u, u >}\sqrt{< v, v >}$$

6.7 Definition: Norm

Eine Norm $\|.\|$ auf einem Vektorraum V ist eine Abbildung von V in die reellen Zahlen mit den Eigenschaften

(a) $\|v\| \geqslant 0$ und $\|v\| = 0 \iff v = 0$ Definitheit

(b) $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$ Homogenität

(c) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ Dreiecksungleichung

Satz

Ist $< .,. >$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V, so ist durch $\|v\| = \sqrt{< v, v >}$ eine Norm definiert.

6.8 Definition: Winkel

Der *Winkel* $\alpha = \angle(\vec{x}, \vec{y}) \in [0, \pi]$ zwischen Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ wird definiert durch die Festlegung

$$\cos \alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|}.$$

Ist $\alpha = \pi/2$, so heißen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ *orthogonal*, und wir schreiben $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Beachte: Nach der Cauchy-Schwarz Ungleichung gilt

$$-1 \leqslant \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|} \leqslant 1,$$

also ist der Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Ob im folgenden die Skalare $\alpha, \beta, \ldots \in \mathbb{R}$ oder $\alpha, \beta, \ldots \in \mathbb{C}$ gewählt werden, hängt davon ab, ob wir einen reellen oder einen komplexen Vektorraum betrachten.

6.9 Definition: Linearkombination, Aufspann

Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum.

a) Ein Vektor $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \in V$ mit Skalaren $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (aus $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) heißt eine *Linearkombination* der Vektoren $v_1, \ldots, v_k$.

b) Die Menge aller Linearkombinationen

$$\text{Span}\,(v_1, \ldots, v_k) := \left\{ x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \;\text{ Skalare} \right\}$$

heißt der *Spann* oder *Aufspann* der Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ (oder der von $v_1, \ldots, v_k$ aufgespannte Unter-Vektorraum von V).

6.10 Definition: Basis

Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heißen eine *Basis* von V, wenn jeder Vektor $x \in V$ eine eindeutige Darstellung

$$x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

besitzt. Dann heißt

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (\mathbb{C}^n)$$

der *Koordinatenvektor* von x zur Basis $v_1, \ldots, v_n$.

Wichtiges Beispiel: Basen des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$

6.11 Basen im $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$

Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) bilden genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$), wenn für jeden Vektor $\vec{x}$ das Gleichungssystem

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{x}$$

eine eindeutige Lösung hat.

In diesem Fall ist der Koordinatenvektor von $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) gegeben durch $\vec{a} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^\top$.

- Wir sehen also, dass jede Basis von $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) aus genau n Vektoren besteht.

6.12 Definition und Satz Dimension

Hat der Vektorraum V eine Basis aus n Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$, so besteht jede andere Basis von V ebenfalls aus n Vektoren.

Die Zahl n heißt dann die *Dimension* von V, geschrieben $\dim V = n$.

- Besitzt der Vektorraum V keine endliche Basis, so heißt V *unendlich-dimensional*, geschrieben $\dim V = \infty$.

Definition: Kern

Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems wird mit *Kern* bezeichnet.

6.13 Satz: Dimensionsformel

Für ein lineares homogenes Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Variablen gelte $\text{Rang}\, A = r$. Dann ist die Lösungsmenge des LGS ein Unter-Vektorraum des $\mathbb{R}^n$ mit der Dimension $n - r$, d.h.

$$\dim(\text{Kern}\, A) = n - \text{Rang}\, A \qquad \text{(Dimensionsformel)}$$

Beweis: Wir verwenden die spezielle reduzierte Stufenform des homogenen LGS

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_r & y_{r+1} & \cdots & y_n & \text{r.S.} \\
\hline
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1,n} & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2,n} & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & b_{r-1,r+1} & \cdots & b_{r-1,n} & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{r,n} & 0 \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m-r \text{ Gl.}
$$

Dabei ist $(y_1, \ldots, y_n)$ eine Umnummerierung der Komponenten des Vektors $(x_1, \ldots, x_n)$, je nach durchgeführten Spaltenvertauschungen.

Falls $r = n$ ist, so ist die Lösungsmenge der Nullraum Kern $A = \{\vec{0}\}$.

Falls $r < n$ ist, so erhält man eine Basis von Kern A durch Einsetzen von Nullen und jeweils einer 1 für die freien Variablen $y_{r+1}, \ldots, y_n$:

$$\vec{w}_{r+1} = \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_{r+2} = \begin{pmatrix} -b_{1,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{w}_n = \begin{pmatrix} -b_{1,n} \\ \vdots \\ -b_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Basis der Vektoren $\vec{v}_j \in \mathbb{R}^n$ von Kern A ergibt sich dann durch Umnummerierung (Zeilentausch) der Komponenten der Vektoren $\vec{w}_j$, $1 \leqslant j \leqslant n - r$.

6.14 Definition: lineare Abhängigkeit

Die Elemente $v_1, \ldots, v_k \in V$ eines Vektorraums V heißen *linear abhängig*, wenn es eine Linearkombination

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j = \vec{0}$$

mit $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_k| \neq 0$ gibt (das ist eine Linearkombination, in der nicht alle Skalare Null sind).

Andernfalls heißen die Elemente $v_1, \ldots, v_k \in V$ *linear unabhängig*.

Die folgenden allgemeinen Aussagen helfen beim Umgang mit Vektorräumen und Unter-Vektorräumen.

6.15 Existenz von Basen

- Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
- Jede Familie $v_1, \ldots, v_k \in V$ von linear unabhängigen Vektoren lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.

6.16 Beispiel: Polynome $\mathcal{P}_n$

Der Vektorraum $\mathcal{P}_n$ der Polynome vom Grad $\leqslant n$ mit komplexen Koeffizienten ist ein komplexer Vektorraum der Dimension $n+1$.

a) Die Basis der Monome ist

$$m_0(x) = 1, \quad m_1(x) = x, \quad \dots, \quad m_n(x) = x^n,$$

und der Koeffizientenvektor von $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ist $(a_0, \dots, a_n)^\top \in \mathbb{C}^{n+1}$.

b) Es seien $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Eine andere Basis von $\mathcal{P}_n$ ist die Basis der *Lagrange-Grundpolynome*

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - z_k}{z_j - z_k}.$$

Beachte: L_j ist das eindeutige Polynom in $\mathcal{P}_n$ mit den Nullstellen z_k, $k \neq j$, und dem Wert $L_j(z_j) = 1$. Deshalb gilt für jedes $p \in \mathcal{P}_n$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p(z_k) L_k(x).$$

Der Koeffizientenvektor von p zur Basis $L_0, \dots, L_n$ ist der Vektor $(p(z_0), \dots, p(z_n))^\top \in \mathbb{C}^{n+1}$.

6.17 Der Vektorraum der reellen Funktionen

Der Vektorraum $V = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist eine Funktion}\}$ ist unendlich-dimensional.

In Vektorräumen mit Skalarprodukt sind Basen mit einer Orthogonalitätsrelation besonders interessant:

6.18 Orthonormalsysteme und -basen

Die Vektoren v_1 bis v_n bilden ein *Orthonormalsystem (ONS)*, wenn gilt

- Für $i \neq j$ ist $< v_i, v_j >= 0$
- Stets ist $\|v_i\| =< v_i, v_i >= 1$.

Mit dem *Kroneckersymbol* $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ schreibt sich das als $< v_i, v_j >= \delta_{ij}$.

Eine *Orthonormalbasis (ONB)* ist eine Basis, die ein ONS ist.

Die Vektoren eines ONS stehen also paarweise senkrecht aufeinander und haben die Länge 1.

Aus linear unabhängigen Vektoren $u_1, \ldots, u_k \in V$ erhält man mit dem folgenden Algorithmus eine Orthonormalbasis

$$w_1, \ldots, w_k \quad \text{von} \quad \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_k)$$

6.19 Gram-Schmidt Orthogonalisierung

1. Setze $v_1 = u_1$ (Initialisierung)
2. Für $\ell = 2, 3, \ldots, k$ setze (Iteration)

$$v_\ell = u_\ell - \frac{< u_\ell, v_1 >}{< v_1, v_1 >}\, v_1 - \cdots - \frac{< u_\ell, v_{\ell-1} >}{< v_{\ell-1}, v_{\ell-1} >}\, v_{\ell-1}$$

3. Für $\ell = 1, 2, \ldots, k$ setze (Normierung)

$$w_\ell = \frac{1}{\|v_\ell\|}\, v_\ell$$

Der Hauptvorteil bei ONB liegt daran, dass man Koeffizienten in Linearkombinationen berechnen kann, ohne ein Gleichungssystem zu lösen.

6.20 Besonderheiten bei ONS und ONB

- Die Elemente eines ONS sind stets linear unabhängig.
- Sei $v_1, \ldots, v_k$ eine ONB, $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$. Dann ist $\alpha_j =< w, v_j >$.
- Ist $v_1, \ldots, v_k$ eine ONB und $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$. Dann ist $\|w\|^2 = \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|^2$.