7.1 Matrizen

Die Kurzschreibweise von LGS führt zum Begriff der Matrix.

7.1 Matrizen

Eine (m,n)-*Matrix* ist ein mn-Tupel von Zahlen, die zu einem rechteckigen Schema aus m Zeilen und n Spalten angeordnet sind:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = (a_{i,k})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n}}$$

Die $a_{i,k}$ heißen die *Koeffizienten* (oder *Einträge*) der Matrix A.

$$0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} \quad \text{Nullmatrix} \qquad E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \quad \text{Einheitsmatrix}$$

Spaltenvektoren können als Matrizen mit einer Spalte, Zeilenvektoren als Matrizen mit einer Zeile betrachtet werden.

7.2 Matrizen - Addition und Skalarmultiplikation

Die Menge aller (m, n)-Matrizen mit reellen Koeffizienten wird mit $\mathrm{Mat}(m, n)$ oder $\mathbb{R}^{m \times n}$ bzw. $\mathbb{C}^{m \times n}$ bezeichnet. Diese Menge ist ein Vektorraum mit den Operationen

$$(a_{i,k})_{m \times n} + (b_{i,k})_{m \times n} = (a_{i,k} + b_{i,k})_{m \times n}, \qquad \alpha (a_{i,k})_{m \times n} = (\alpha a_{i,k})_{m \times n}$$

- Man kann nur Matrizen gleicher Dimensionen addieren.
- Die Nullmatrix $(\mathbf{0})_{m \times n}$ ist das neutrale Element der Addition.
- Für Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(m, n)$ bedeutet $A = B$, dass $a_{i,k} = b_{i,k}$ für alle $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$ gilt.

Wir schreiben eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m, n)$ häufig mit Hilfe ihrer Spaltenvektoren

$$A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n), \qquad \vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{m,k} \end{pmatrix}.$$

7.3 Produkte von Matrizen und Vektoren

- Die Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m, n)$ habe die Spalten $\vec{a}_1$ bis $\vec{a}_n$. Das Produkt von A wird mit dem Vektor $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ ist die Linearkombination der $\vec{a}_i$ mit den x_i als Koeffizienten, also

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n.$$

- Hat die Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n, p)$ die Spalten $\vec{b}_1$ bis $\vec{b}_p$, so hat das Matrizenprodukt AB die Spalten $A\vec{b}_1$ bis $A\vec{b}_p$.

Für die einzelnen Einträge bedeutet dies:

7.4 Matrizenprodukt

Es seien $m, n, p \in \mathbb{N}$ sowie $A = (a_{i,k})_{m\times n} \in \mathrm{Mat}(m, n)$ und $B = (b_{k,j})_{n\times p} \in \mathrm{Mat}(n, p)$.

Dann ist das Matrixprodukt $C := AB \in \mathrm{Mat}(m, p)$ definiert mit den Komponenten

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \qquad \text{“Zeile } i \text{ mal Spalte } j\text{”}$$

$$\begin{array}{cc}
B \;\rightarrow & \begin{pmatrix} * & b_{1,j} & * \\ * & b_{2,j} & * \\ * & b_{3,j} & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots \\ * & * & * & \cdots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & \\ & c_{i,j} & \\ & & \end{pmatrix} \\
A & C = AB
\end{array}$$

Bemerkung: Die Merkregel “Zeile mal Spalte” ergibt:

- Die i-te Zeile des Produkts AB hängt nur von der i-ten Zeile von A ab. Insbesondere gilt:
- Ist in $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ die 1 an der i-ten Stelle, so ergibt $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)B$ die i-te Zeile von B
- $A\vec{e}_j$ ergibt die j-te Spalte von A.
- Mit den obigen Beobachtungen ergibt sich: Die Einheitsmatrizen sind die neutralen Elemente des Matrixprodukts, d.h. für $A \in \mathrm{Mat}(m, n)$ gilt

$$E_m A = A E_n = A.$$

7.5 Rechenregeln

Gegeben seien Matrizen A, B, C so, dass die entsprechenden Produkte definiert sind.

a) Es gelten das Assoziativ- und das Distributiv-Gesetz:

$$A(BC) = (AB)C, \quad (A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC.$$

b) Das Matrixprodukt ist nicht kommutativ.

Bemerkung: zu (b):

- Wenn $A \in \mathrm{Mat}(m,n)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n,p)$, so ist AB definiert, jedoch ist BA nur im Fall $p = m$ definiert.
- Selbst wenn beide Produkte AB und BA definiert sind, so sind die Matrizen oft verschieden.

7.6 Bemerkung zum Matrixprodukt

- Das Produkt mit der Nullmatrix ergibt die Nullmatrix. Aber: Aus $AB = (\mathbf{0})_{m \times p}$ folgt nicht, dass A oder B eine Nullmatrix ist.

- Ebenso gilt im allgemeinen nicht die Kürzungsregel: aus $AB = AC$ folgt i.a. nicht die Gleichheit von B und C. Hierzu muss A eine Zusatzbedingung erfüllen (siehe invertierbare Matrizen, reguläre Matrizen).

- Wenn man das Produkt eines Vektors mit einer Zahl als Matrizenprodukt auffassen will, muss die Zahl rechts vom Vektor stehen. Mehrere Vektoren multipliziert man mit Zahlen, indem man sie zu einer Matrix zusammenfasst und mit einer Diagonalmatrix multipliziert.

7.7 Matrix-Form des linearen Gleichungssystems

Für $A \in \mathrm{Mat}(m, n)$, einen Spaltenvektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ sowie einen Spaltenvektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ lässt sich das inhomogene Gleichungssystem (*) in 5.3 schreiben als

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

A heißt die *Koeffizientenmatrix* des linearen Gleichungssystems und $\vec{b}$ die *rechte Seite*.

- Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann lösbar, wenn die rechte Seite $\vec{b}$ eine Linearkombination der Spaltenvektoren von A ist.
- Die elementaren Umformungen (E1)–(E4) lassen sich auf die Zeilen und Spalten der Matrix A anwenden, um eine *reduzierte Stufenform* von A zu erhalten.
  Der *Rang* der Matrix A ist dasselbe wie der Rang r der reduzierten Stufenform von A.

- Die Matrix $\tilde{A} = (A, \vec{b})_{m\times(n+1)}$ in der Kurzform des Gleichungssystems heißt die *erweiterte Koeffizientenmatrix*. Wir haben in 5.8 festgestellt, dass das inhomogene lineare Gleichungssystem genau dann lösbar ist, wenn

$$\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} \tilde{A}$$

gilt.

Weitere Aussagen in 5.8 erhalten nun die folgende Form:

- $\operatorname{Rang} A = m \quad\Longrightarrow\quad$ das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar
- $\operatorname{Rang} A = n \quad\Longrightarrow\quad$ das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ hat höchstens eine Lösung
- $\operatorname{Rang} A = m = n \quad\Longrightarrow\quad$ das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist für jede rechte Seite $\vec{b}$ eindeutig lösbar (universell eindeutig lösbar)

7.8 Definition und Satz: Kern und Bildraum

Die Lösungsmenge des *homogenen* LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ zur reellen Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m, n)$ ist ein Vektorraum. Dieser Vektorraum ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ und wird wie in 6.13 mit *Kern* bezeichnet.

$$\mathrm{Kern}\, A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

Für eine Matrix $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \in \mathrm{Mat}(m, n)$ mit Spaltenvektoren $\vec{a}_k$ heißt der Unter-Vektorraum

$$\mathrm{Bild}\, A = \mathrm{Span}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$$

der *Bildraum* von A. Es gilt $\mathrm{Rang}\, A = \dim(\mathrm{Bild}\, A)$, also mit der Dimensionsformel

$$\dim(\mathrm{Kern}\, A) + \dim(\mathrm{Bild}\, A) = n. \qquad (*)$$

Bemerkung: Hieraus folgt, dass sich der Rang einer Matrix auf zwei verschiedene Weisen darstellen lässt:

- $r = \operatorname{Rang} A$ ist die maximale Anzahl von linear unabhängigen Zeilen von A; das bedeutet $\dim(\operatorname{Kern} A) = n - r$.

- $r = \operatorname{Rang} A$ ist die maximale Anzahl von linear unabhängigen Spalten von A; das bedeutet $\dim(\operatorname{Bild} A) = r$.

Weiter gilt: es gibt eine Basis $\vec{v}_1$ bis $\vec{v}_n$ des $\mathbb{R}^n$ mit:

- $A\vec{v}_1$ bis $A\vec{v}_r$ ist eine Basis des Bildes von A
- $\vec{v}_{r+1}$ bis $\vec{v}_n$ ist eine Basis des Kerns von A

Eine weitere Operation für Matrizen:

7.9 Definition: Transponierte

Die zu

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m,n)$$

transponierte Matrix ist

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n,m).$$

Die *Adjungierte* A^* einer komplexen Matrix ist definiert durch

$$A^* = \overline{A^\top} = \overline{A}^\top$$

7.10 Transponierte, Adjungierte und Skalarprodukt

Sei $A \in \mathrm{Mat}(m, n)$. Dann gibt es genau eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n, m)$, so dass für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$< A\vec{x}, \vec{y} >=< \vec{x}, B\vec{y} > .$$

Es ist $B = A^\top$.
Eine entsprechende Aussage gilt für komplexe Vektorräume und $B = A^*$.

7.11 Rechenregeln

- Addition: Für $A, B \in \mathrm{Mat}(m, n)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$(A+B)^\top = A^\top + B^\top, \qquad (\alpha A)^\top = \alpha A^\top.$$

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \qquad (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*.$$

- Matrixprodukt: Für $A \in \mathrm{Mat}(m, n)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n, p)$ gilt

$$(AB)^\top = B^\top A^\top \qquad \text{und} \qquad (AB)^* = B^* A^*$$

- Für jede Matrix A gilt $(A^\top)^\top = A$ und $(A^*)^* = A$.
- Es gilt $\mathrm{Rang}\, A = \mathrm{Rang}\, A^\top$ und $\mathrm{Rang}\, A = \mathrm{Rang}\, A^*$.
- Es ist $<\vec{x}, \vec{y}> = \vec{y}^\top \vec{x}$ bzw. $<\vec{x}, \vec{y}> = \vec{y}^* \vec{x}$ (Skalarprodukt als Matrizenprodukt).

7.12 Rang von Produkten

Für alle $A \in \mathrm{Mat}(m, n)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n, p)$ gilt

$$\mathrm{Rang}(AB) \leqslant \min\{\mathrm{Rang}\, A, \mathrm{Rang}\, B\}.$$

Wir betrachten ab jetzt **quadratische** Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ (Zeilenzahl = Spaltenzahl)

7.13 Definition und Satz: Inverse

Gegeben sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$. Falls es eine Matrix $X \in \mathrm{Mat}(n, n)$ mit $AX = XA = E_n$ gibt, so heißt A *invertierbar* (oder *regulär*) und $X = A^{-1}$ heißt die *Inverse* von A.

Satz:

a) Die Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ besitzt genau dann eine Inverse A^{-1}, wenn $\operatorname{Rang} A = n$ gilt.

b) Falls A invertierbar ist, so ist die Inverse A^{-1} eindeutig bestimmt.

Bemerkung; Es gibt viele Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$, die keine Inverse besitzen (nämlich alle Matrizen vom Rang $r < n$). Wir werden später sehen, dass die Bedingung $\det A \neq 0$ notwendig und hinreichend für die Invertierbarkeit von A ist.

7.14 Beispiel

Bestimme die Inverse (falls möglich) zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7.15 Zwei nützliche Hilfsaussagen

- Die Umformungen (E1) - (E3) des Gauß-Algorithmus lassen sich durch Multiplikation der (erweiterten) Matrix von links mit invertierbaren Matrizen darstellen.

- Wichtige Konsequenz aus 7.12
  Falls $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ regulär ist, so gilt

$$\mathrm{Rang}(AB) = \mathrm{Rang}\, B \qquad \text{für alle} \quad B \in \mathrm{Mat}(n, p),$$

$$\mathrm{Rang}(CA) = \mathrm{Rang}\, C \qquad \text{für alle} \quad C \in \mathrm{Mat}(p, n).$$

7.16 Satz: Lösbarkeit von LGS

a) Falls $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ regulär ist, so ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ *universell eindeutig lösbar* und die Lösung lautet $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

b) Falls $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ regulär ist, so gilt für Matrizen $B, C \in \mathrm{Mat}(n, p)$ die Kürzungsregel

$$AB = AC \quad \Longleftrightarrow \quad B = C.$$

c) Falls $A, B \in \mathrm{Mat}(n, n)$ beide regulär sind, so ist auch $C = AB$ regulär und es gilt

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

d) Für reguläre Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ gilt $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

- Die Kürzungsregel besagt: Multiplikation beider Seiten eines linearen Gleichungssystems mit einer regulären Matrix ist eine *Äquivalenzumformung*:

$$A\vec{x} = \vec{b} \iff MA\vec{x} = M\vec{b}, \qquad \text{falls } M \in \mathrm{Mat}(m, m) \text{ regulär}$$

7.17 Satz: Die Gruppe der regulären Matrizen

Die regulären (n, n)-Matrizen bilden mit der Multiplikation die *Gruppe* $\mathrm{Gl}(n)$: das heißt:

(G1) das Produkt $C = AB$ zweier regulärer (n, n)-Matrizen ist eine reguläre (n, n)-Matrix,

(G2) es gilt das Assoziativgesetz der Matrix-Multiplikation,

(G3) die Einheitsmatrix E_n ist das eindeutige "neutrale" Element der Multiplikation, also $AE_n = E_nA = A$ für jede reguläre (n, n)-Matrix,

(G4) zu jeder regulären (n, n)-Matrix A gibt es genau eine reguläre (n, n)-Matrix X mit $AX = XA = E_n$, nämlich $X = A^{-1}$.

- **Beachte:** Das Kommutativgesetz der Multiplikation gilt in $\mathrm{Mat}(n, n)$ **nicht** (für $n \geqslant 1$).
- $E_n^{-1} = E_n$, denn $E_nE_n = E_n$

7.18 Definition der Determinante

Die Determinante im $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion, die n Vektoren (bzw. einer $n \times n$-Matrix) eine reelle Zahl zuordnet. Sie lässt sich durch diese Bedingungen charakterisieren:

- $\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ Faktoren}} \to \mathbb{R}$ ist linear in jedem Faktor, d.h.
  $\det(\vec{v}_1, \ldots, (\alpha\vec{u} + \beta\vec{w}), \ldots, \vec{v}_n) =$
  $\alpha \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{u}, \ldots, \vec{v}_n) + \beta \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{w}, \ldots, \vec{v}_n)$
- Die Determinante ist alternierend, d.h.
  $\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n) = -\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_n)$
- Die Determinante ist normiert: $\det(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = 1$.

Diese Bedingungen legen die Determinante eindeutig fest (ohne Beweis).

Der zweite Punkt ergibt sofort $\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{u}, \ldots, \vec{u}, \ldots, \vec{v}_n) = 0$, mit der ersten Bedingung erhält man
$\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i + \alpha\vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n) = \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n)$.
Dies gilt im $\mathbb{C}^n$ analog.
Alternative Schreibweise: $|A|$ statt $\det A$

7.19 Berechnung von Determinanten

- Für eine $(1,1)$-Matrix $A = (a)$ ist $\det A = a$.
- Für eine $(2,2)$-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ wird $\det A = ad - bc$.
- Für eine (n,n)-Matrix $A = (a_{i,k})_{n\times n}$ wird $\det A$ berechnet durch die Rekursion ("Entwicklung nach der ersten Spalte")

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k,1} \det(A_{k,1}),$$

wobei die $(n-1, n-1)$-Matrix $A_{k,m}$ aus A durch Streichen der k-ten Zeile und der m-ten Spalte hervorgeht.

Bemerkung: Die Rekursion kann nach jeder Zeile und jeder Spalte gebildet werden und führt zum gleichen Wert:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{j,k} \det(A_{j,k}), \qquad \text{Entwicklung nach der } j\text{-ten Zeile}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+\ell} a_{i,\ell} \det(A_{i,\ell}), \qquad \text{Entwicklung nach der } \ell\text{-ten Spalte}$$

Man beachte das Schachbrettmuster des Vorzeichenfaktors $(-1)^{i+j}$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Beispiele:

- Für $(3,3)$-Matrizen ergibt sich die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

auch mit der *Merkregel von Sarrus*

$$\begin{array}{cccccc} & a & b & c & a & b \\ & d & e & f & d & e \\ & g & h & i & g & h \\ -ceg & -afh & -bdi & +aei & +bfg & +cdh \end{array}$$

Achtung! Die Sarrus-Regel kann nur bei 3×3-Matrizen angewendet werden!

- Für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 6 & 7 & -2 & 6 \end{pmatrix} \longleftarrow$ Entw. n. d. 2. Zeile

  ist $\det A = -5 \det A_{2,1} + 2 \det A_{2,2} = -5 \cdot 30 + 2 \cdot 2 = -146.$

Die Berechnung von $\det A$ erfolgt bei größeren Matrizen mit dem Gauß-Algorithmus:

7.21 Determinantenberechnung mit dem Gauß-Algorithmus

Gegeben sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$.

a) Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten von A (Umformungen E1 und E4) ändert $\det A$ um den Faktor -1.

b) Addition eines Vielfachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile (mit $i \neq j$) **ändert** $\det A$ **nicht** (Umformung E3). Dasselbe gilt für die entsprechende Umformung für die Spalten.

c) Multiplikation **einer** Zeile (oder Spalte) von A mit einer Zahl α ändert die Determinante um diesen Faktor α (Umformung E2).

Vorgehen

Bestimmung von $\det A$: Man bringt A auf reduzierte Stufenform und merkt sich in jedem Schritt, wie sich die Determinante ändert.

Wir müssen also nur noch die Determinante einer reduzierten Stufenform bestimmen. Man nennt eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \quad a_{i,k} = 0 \quad \text{für} \quad i > k,$$

eine *obere Dreiecksmatrix*.

7.22 Satz: Determinante oberer Dreiecksmatrizen

Für eine obere Dreiecksmatrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ ist $\det A$ das Produkt der Diagonal-Elemente, also

$$\det A = a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n}.$$

Beispiel: Erneute Berechnung der Determinante von $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 6 & 7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rrrrl}
1 & -1 & 2 & 3 & \text{tausche Gl.1 und Gl.2} \\
5 & 2 & 0 & 0 & \text{dividiere Gl.2 durch 5} \\
3 & 1 & 0 & 4 & \\
6 & 7 & -2 & 6 & \\
\hline
\boxed{1} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & \\
1 & -1 & 2 & 3 & \text{subtrahiere Gl.1} \\
3 & 1 & 0 & 4 & \text{subtrahiere 3*Gl.1} \\
6 & 7 & -2 & 6 & \text{subtrahiere 6*Gl.1} \\
\hline
1 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & \\
0 & -\frac{7}{5} & 2 & 3 & \text{tausche Gl.2 und Gl.3} \\
0 & -\frac{1}{5} & 0 & 4 & \text{multipliziere Gl.3 mit -5} \\
0 & \frac{23}{5} & -2 & 6 & \\
\hline
\end{array}$$

1	$\frac{2}{5}$	0	0	
0	$\boxed{1}$	0	-20	
0	$-\frac{7}{5}$	2	3	addiere $\frac{7}{5}$*Gl.2
0	$\frac{23}{5}$	-2	6	subtrahiere $\frac{23}{5}$*Gl.2
1	$\frac{2}{5}$	0	0	
0	1	0	-20	
0	0	$\boxed{2}$	-25	
0	0	-2	98	addiere Gl.3
1	$\frac{2}{5}$	0	0	
0	1	0	-20	
0	0	2	-25	
0	0	0	73	

Mit 2 Vertauschungen und den Multiplikationen ergibt sich

$$\det A = (-1)^2 \cdot 5 \cdot (-\frac{1}{5}) \cdot 146 = -146.$$

7.23 Weitere Regeln zur Determinatenberechnung

- Enthält A eine Nullzeile (oder Nullspalte), so ist $\det A = 0$ (klar durch reduzierte Stufenform in 7.21). Insbesondere gilt für eine (n, n)-Matrix A: $\det A \neq 0 \iff \operatorname{Rang} A = n$.
- Falls eine Zeile (oder Spalte) von A das Vielfache einer anderen Zeile (bzw. Spalte) ist, so ist $\det A = 0$.
- Es gelten die Rechenregeln

  $$\det A^\top = \det A, \qquad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad (\text{falls } \det A \neq 0),$$

  und der *Multiplikationssatz*

  $$\det(AB) = \det A \, \det B.$$

  $$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$$

  Es gibt *keine* Regel für $\det(A + B)$
- Geometrie: Für $n = 2$ und $n = 3$ gilt: Der Absolutbetrag von $\det A$ ist der Flächeninhalt des Parallelogramms bzw. das Volumen des Spats, das von den **Spaltenvektoren** von A aufgespannt wird. Dies besitzt eine Verallgemeinerung auf n-dimensionale Körper.

Wir können nun die folgenden Aussagen zur Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit einer (n, n)-Matrix A formulieren.

7.24 Charakterisierung regulärer Matrizen

Für $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist regulär.

(ii) $\mathrm{Rang}\, A = n$.

(iii) $\det A \neq 0$.

(iv) Das homogene LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ hat als einzige Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

(v) Das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ ist universell eindeutig lösbar.

Für kleine Matrizen und weitere Anwendungen ist die folgende Regel wichtig.

7.25 Cramersche Regel

Die Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ sei regulär. Die Komponenten des eindeutigen Lösungsvektors $\vec{x}$ von $A\vec{x} = \vec{b}$ haben die Darstellung

$$x_j = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Mit der Cramerschen Regel kann man auch eine Darstellung für die Inverse von A erhalten.

7.26 Satz: Adjunktenform der Inversen

Die Inverse einer regulären Matrix A hat die Form

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(\alpha_{j,k}\right)_{n\times n} \quad \text{mit} \quad \alpha_{j,k} = (-1)^{j+k} \det A_{k,j}.$$

Beispiel zur Cramerschen Regel:

Löse das LGS $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Es ist $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2$, also nach der Cramerschen Regel $x_1 = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}}{-2} = -6$

$x_2 = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}}{-2} = \dfrac{13}{2}$

Weiter: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Allgemein: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, falls $ad - bc \neq 0$; sonst ist die Matrix nicht invertierbar.