Lineare Abbildungen

Die wichtigste Klasse von Funktionen zwischen Vektorräumen sind die *linearen Abbildungen*.

8.1 Definition: Lineare Abbildung

Eine Funktion $f : V \to W$ zwischen Vektorräumen V und W heißt *linear*, wenn für alle $v_1, v_2 \in V$ und alle Skalare α_1, α_2 gilt

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2).$$

8.2 Linearität und Basen

Gegeben seien Vektorräume V und W sowie eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V. Jede lineare Abbildung $f : V \to W$ ist durch die Bilder der Basiselemente $f(v_k) \in W$, $1 \leqslant k \leqslant n$, eindeutig festgelegt; denn für einen beliebigen Vektor $x \in V$ mit der eindeutigen Darstellung

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$$

gilt aufgrund der Linearität von f

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(v_k).$$

8.3 Matrixdarstellung linearer Abbildungen

Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W.
Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Für die Bilder $f(v_k)$ existiert eine eindeutige Darstellung

$$f(v_k) = \beta_{1,k} w_1 + \cdots + \beta_{m,k} w_m$$

mit Skalaren $\beta_{i,k}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

- Die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m,1} & \cdots & \beta_{m,n} \end{pmatrix}$$
heißt die *Darstellungsmatrix* der linearen Abbildung f bzgl. der gegebenen Basen von V und W.

- Besitzt $x \in V$ den Koordinatenvektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) bzgl. der Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V, so ist $\vec{b} = A\vec{a}$ der Koordinatenvektor von $f(x)$ bzgl. der Basis $w_1, \ldots, w_m$ von W.

Wie lassen sich Eigenschaften von f durch Eigenschaften der Darstellungsmatrix ausdrücken?

8.4 Eigenschaften der Darstellungsmatrix

Gegeben seien Vektorräume V und W der Dimensionen $\dim V = n$, $\dim W = m$. Die lineare Abbildung $f : V \to W$ habe die Darstellungsmatrix $A \in \mathrm{Mat}(m, n)$ bzgl. gegebener Basen von V und W. Dann gilt:

- Der Bildraum $\mathrm{Bild}(f) = \{f(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\}$ ist ein Unter-Vektorraum von W der Dimension $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = \mathrm{Rang}\, A$.
- f ist genau dann surjektiv, wenn $\mathrm{Rang}\, A = m$ gilt.
- f ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Rang}\, A = n$ gilt.
- f ist genau dann bijektiv, wenn $m = n$ und $\mathrm{Rang}\, A = n$ gilt. (Dies ist äquivalent zu $\det A \neq 0$.)

Wir betrachten ab jetzt lineare Abbildungen $f : V \to V$ und $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$. Im Definitions- und im Wertebereich verwenden wir die gleiche Basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ zur Bestimmung der Matrixdarstellung von f.

8.5 Basiswechsel

Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : V \to V$ (mit $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$) sowie die Darstellungsmatrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ von f bzgl. der Basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ (sowohl im Definitions- als auch im Wertebereich).
Dann ist die Darstellungsmatrix von f bzgl. einer weiteren Basis $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ von V gegeben durch

$$B = S^{-1} A S.$$

Hierbei ist $S \in \mathrm{Mat}(n, n)$ die reguläre Matrix, deren Spaltenvektor $\vec{s}_k = (s_{1,k}, \dots, s_{n,k})^\top$ der Koordinatenvektor von $\vec{w}_k$ bzgl. der Basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ ist, also

$$\vec{w}_k = s_{1,k} \vec{v}_1 + \cdots + s_{n,k} \vec{v}_n, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

erfüllt.
Die Darstellungsmatrizen A und $B = S^{-1} A S$ heißen *ähnlich*.

Bemerkung: Ähnliche Matrizen haben den gleichen Rang und dieselbe Determinante:

$$\operatorname{Rang}(S^{-1}AS) = \operatorname{Rang}(AS) = \operatorname{Rang} A,$$

weil die Multiplikation mit regulären Matrizen (hier S bzw. S^{-1}) den Rang nicht verändert. Mit dem Multiplikationssatz (Bemerkung vor 5.33) folgt

$$\det(S^{-1}AS) = \det S^{-1} \ \det A \ \det S = \frac{1}{\det S} \ \det A \ \det S = \det A.$$

Motivation für die Eigenvektoren

Eine schöne Interpretation vieler linearer Abbildungen f erhält man dadurch, dass man durch geschickte Wahl der Basis eine *Diagonalmatrix*

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \quad b_{i,k} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k,$$

als Darstellungsmatrix erhält. Dann lässt f die Richtung der Basisvektoren $\vec{v}_k$ (bis auf Umkehrung für $\lambda_k < 0$) unverändert. Dadurch erhält man eine schöne geometrische Interpretation von f.

8.6 Definition: Eigenwert, Eigenvektor

Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : V \to V$. Ein Vektor $\vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ heißt *Eigenvektor* (kurz: *EV*) von f, wenn es ein Skalar λ gibt mit

$$\boxed{f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}.}$$

Das Skalar λ heißt dann der *Eigenwert* (kurz *EW*) zum Eigenvektor $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren erfolgt über eine Matrix-Darstellung von f in zwei Schritten.

8.7 Satz: Berechnung von EW und EV

Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : V \to V$ sowie eine Basis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ von V (also $\dim V = n$).

- Das Skalar λ ist genau dann ein Eigenwert von f, wenn für die Darstellungsmatrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ von f gilt

$$\det(A - \lambda E_n) = 0. \qquad (*)$$

- Zu einem Eigenwert λ ist $\mathrm{Kern}(A - \lambda E_n)$ der Unter-Vektorraum der Koordinatenvektoren aller Eigenvektoren von f zum Eigenwert λ (sowie zusätzlich $\vec{0}$):

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\} \\ &= \left\{ \vec{x} \in V \mid \vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{v}_k,\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^\top \in \mathrm{Kern}(A - \lambda E_n) \right\}. \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Im ersten Schritt bestimmt man alle Eigenwerte von f, indem man alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$

  der Darstellungsmatrix A berechnet. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gibt es (in $\mathbb{C}$) genau n Eigenwerte unter Berücksichtigung der Vielfachheit m_λ der Nullstelle λ. Die Zahl m_λ heißt die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwerts λ.

- Im zweiten Schritt berechnet man zu jedem Eigenwert λ eine Basis von $\text{Kern}(A - \lambda E_n)$ durch Lösen des homogenen LGS

$$(A - \lambda E_n)\vec{x} = \vec{0}.$$

  Wegen $\det(A - \lambda E_n) = 0$ gibt es nicht-triviale Lösungen. Die Zahl

$$\widetilde{m}_\lambda = \dim(\text{Kern}(A - \lambda E_n)) = n - \text{Rang}(A - \lambda E_n)$$

  nennt man die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts λ.

- Es gilt stets $\widetilde{m}_\lambda \leqslant m_\lambda$. (o.B.)

Weitere Eigenschaften des charakteristschen Polynoms

- Die Summe der Eigenwerte ist die *Spur* der Matrix A: der Koeffizient von $(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}$ ist gleich $\operatorname{spur} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
- Für eine 2×2-Matrix ist stets $p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{spur} A \cdot \lambda + \det A$.

8.8 Lemma

Die Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung $f : V \to V$ hängen nicht von der gewählten Basis von V ab; insbesondere gilt für zwei ähnliche Matrizen A und $B = S^{-1}AS$ (mit regulärer Matrix S) die Identität

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda).$$

Für die Koordinatenvektoren gilt: Ist $\vec{a}$ der Koordinatenvektor des Eigenvektors $\vec{v}$ zu der Basis, die die Darstellungsmatrix A von f definiert, so ist $\vec{b} = S^{-1}\vec{a}$ der Koordinatenvektor desselben Eigenvektors $\vec{v}$ zu der Basis, die die Darstellungsmatrix $B = S^{-1}AS$ definiert (siehe Basiswechsel 8.5).

Die anfangs erwähnte “schöne” Darstellung einer linearen Abbildung durch eine Diagonalmatrix kann nur dann erzielt werden, wenn die folgende Eigenschaft gilt.

8.9 Definition: diagonalisierbar

Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ (mit $\dim V = n$) heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine Basis von Eigenvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ von f gibt.

Dann gilt:

- Die Darstellungsmatrix bzgl. der Basis der Eigenvektoren ist die Diagonalmatrix der Eigenwerte
$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
- Die Darstellungsmatrix A bzgl. irgendeiner Basis $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ ist ähnlich zu dieser Diagonalmatrix, d.h. es gibt eine reguläre Matrix S mit $S^{-1}AS = J$.
- Die hierzu äquivalente Beziehung $AS = SJ$ drückt aus, dass die Spalten von S die *Eigenvektoren der Matrix* A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind.

Wir behandeln zwei Fälle, in denen die Diagonalisierbarkeit vorliegt.

8.10 Kriterien für Diagonalisierbarkeit

Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : V \to V$ mit $\dim V = n$. Besitzt f paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so ist f diagonalisierbar.

Als Beweis dient die folgende Aussage:

8.11 Satz: lineare Unabhängigkeit der Eigenvektoren

Eigenvektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ einer linearen Abbildung $f : V \to V$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sind linear unabhängig.

8.12 Bemerkung: Weiteres Kriterium Eine Erweiterung von 8.11 ergibt die folgende Aussage: Die lineare Abbildung $f : V \to V$ (mit $\dim V = n$) ist genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert λ von f die algebraische Vielfachheit und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen, wenn also $m_\lambda = \tilde{m}_\lambda$ gilt.

Eine Basis von Eigenvektoren von f erhält man, indem man für jeden Eigenraum V_λ eine Basis aus m_λ Vektoren bestimmt. Die Gesamtheit dieser Vektoren ist dann eine Basis des Vektorraums V.

Die zweite Klasse diagonalisierbarer Matrizen tritt in vielen Anwendungen auf.

8.13 Definition: symmetrische und hermitesche Matrizen

- Eine reelle $n \times n$-Matrix A heißt *symmetrisch*, wenn $A^\top = A$ gilt.
- Eine komplexe $n \times n$-Matrix A heißt *hermitesch*, wenn $A^* = A$ gilt.

8.14 Diagonalisierbarkeit symmetrischer und hermitescher Matrizen

Alle Eigenwerte einer reell-symmetrischen oder einer komplex-hermiteschen $n \times n$-Matrix A sind reell, und A ist diagonalisierbar: es existiert sogar eine *Orthonormalbasis* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ von Eigenvektoren von A.
Das bedeutet, dass A eine Darstellung

$$A = UDU^\top \qquad \text{bzw.} \qquad A = UDU^*$$

mit einer reellen Diagonalmatrix D und einer orthogonalen bzw. unitären Matrix U hat.

Orthogonal bzw. unitär nennt man Matrizen U, deren Spalten eine ONB bilden. Dann gilt, dass $U^\top = U^{-1}$ bzw. $U^* = U^{-1}$ ist. Dieses wird in 9.1 genauer behandelt.

Zur Berechnung der Eigenvektoren und zur Probe sind die folgenden Aussagen hilfreich, die eine Verschärfung von Satz 8.14 darstellen:

8.15 Weitere Eigenschaften

(a) Eigenvektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ einer reell-symmetrischen (oder hermiteschen) Matrix zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal.

(b) Für einen Eigenwert λ einer reell-symmetrischen (oder hermiteschen) Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ bezeichne m_λ die algebraische Vielfachheit (als Nullstelle des charakteristischen Polynoms). Dann gilt

$$\dim(\mathrm{Kern}(A - \lambda E_n)) = m_\lambda,$$

d.h. die algebraische und die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts stimmen überein. (o.B.)

Zusammenfassend erhalten wir

8.16 Entwicklungssatz

Sei A eine symmetrische oder hermitesche Matrix.
Dann lässt sich jeder Vektor des $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) nach den Eigenvektoren $\vec{v}_1$ bis $\vec{v}_n$ von A *entwicken*:

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} < \vec{x}, \vec{v_k} > \vec{v}_k .$$

Weiter ist dann mit den Eigenwerten λ_1 bis λ_n

$$A\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k < \vec{x}, \vec{v_k} > \vec{v}_k .$$

Es folgen ergänzende Aussagen zu linearen Abbildungen.

8.17 Der Vektorraum der linearen Abbildungen

Gegeben seien Vektorräume V und W. Die Menge aller linearen Abbildungen

$$\mathcal{L}(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ ist linear}\}$$

ist ein Vektorraum. (Die Addition $f + g$ und die Multiplikation mit Skalaren αf ist wie üblich bei Funktionen definiert.)

8.18 Verkettung linearer Abbildungen

Es seien U, V, W Vektorräume und $f : U \to V$ sowie $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist auch die Hintereinanderausführung

$$g \circ f : U \to W, \quad g \circ f(\vec{u}) = g(f(\vec{u}))$$

linear.

Weiterhin sei $\mathcal{U} = \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ eine Basis von U, $\mathcal{V} = \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ eine Basis von V sowie $\mathcal{W} = \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_p$ eine Basis von W. Mit den Darstellungsmatrizen $A \in \mathrm{Mat}(m, n)$ von f (bzgl. $\mathcal{U}, \mathcal{V}$) und $B \in \mathrm{Mat}(p, m)$ von g (bzgl. $\mathcal{V}, \mathcal{W}$) ist dann

$$C = BA$$

die Darstellungsmatrix von $g \circ f$ bzgl. der Basen $\mathcal{U}, \mathcal{W}$.

Als "Multiplikation" auf dem Vektorraum $\mathcal{L}(V, V)$ der Endomorphismen (=lineare Abbildungen von V nach V) verwenden wir die Hintereinanderausführung. Dann gilt:

8.19 Der Ring der linearen Abbildungen

Der Vektorraum $\mathcal{L}(V, V)$ ist ein *Ring*, d.h. die Hintereinanderausführung erfüllt das Assoziativ- und Distributivgesetz.
Das neutrale Element dieser Multiplikation ist die Einheitsmatrix E_n.