Kap. 9: Spezielle Matrizen und Abbildungen

Interessant sind lineare Abbildungen, die die Länge von Vektoren nicht verändern. Wichtige Beispiele sind Drehungen und Spiegelungen.

9.1 Definition: orthogonale und unitäre Matrizen

- Eine (quadratische) relle Matrix heißt *orthogonal*, falls $A^\top = A^{-1}$ ist.
- Eine (quadratische) komplexe Matrix heißt *unitär*, falls $A^* = A^{-1}$ ist.

Äquivalent ist

9.2 Eigenschaften orthogonaler Matrizen

(i) A ist orthogonal.

(ii) $A^\top = A^{-1}$.

(iii) Die Spalten von A bilden eine ONB.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine ONB.

(v) Für $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt $< \vec{v}, \vec{w} >=< A\vec{v}, A\vec{w} >$.

(vi) Für $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|A\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$.

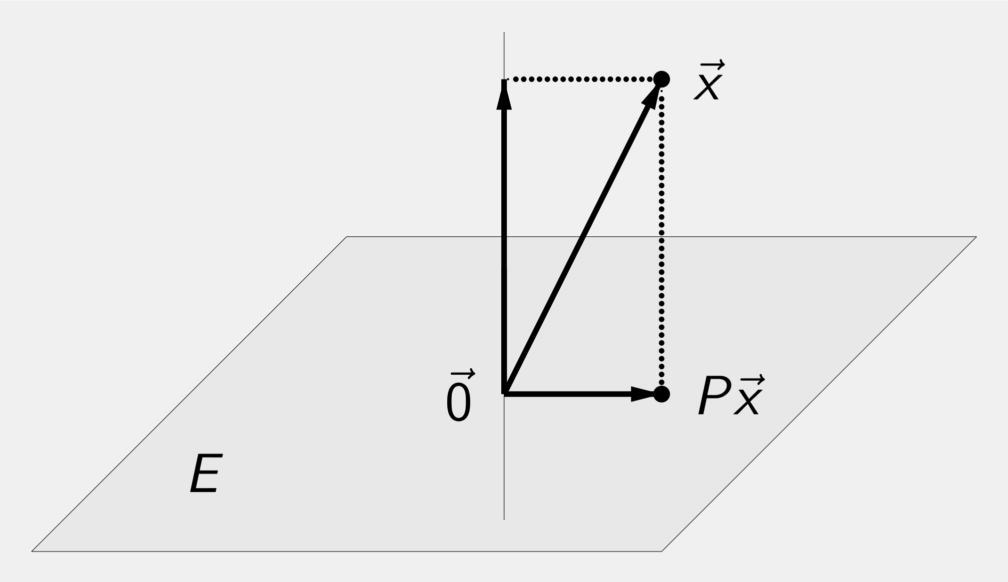
9.3 Weitere Eigenschaften

Sei A orthogonal.

- Für $\vec{v}, \vec{w}$ gilt $\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}) = \sphericalangle(A\vec{v}, A\vec{w})$
- Die Determinante von A ist ± 1

9.4 Orthogonale Projektionen

Eine *orthogonale Projektion* P ist dadurch gekennzeichnet, dass gilt $P^2 = P$ und $P = P^\top$

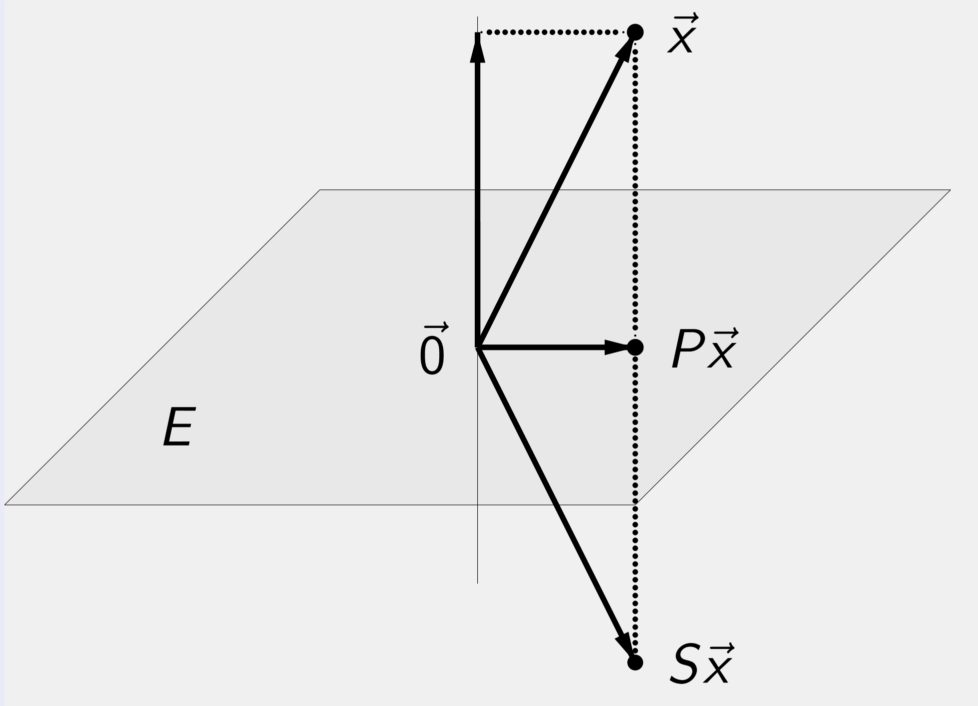


Spezialfall:
Projektion auf eine Hyperebene.
$\vec{n}$ ist eine Vektor mit $\|\vec{n}\| = 1$, der senkrecht auf der Hyperebene steht.
$P\vec{x} = \vec{x} - < \vec{x}, \vec{n} > \vec{n} = (E - \vec{n}\vec{n}^\top)\vec{x}$.
Die Matrix ist also $A = E - \vec{n}\vec{n}^\top$.

Die allgemeine Form einer orthogonalen Projektion ist so :
Sei $\vec{v}_1$ bis $\vec{v}_n$ eine ONB, so dass $\vec{v}_1$ bis $\vec{v}_k$ Basis eines Unterraums U ist.
Dann ist die orthogonale Projektion auf U gegeben durch

$$P_U\vec{x} = \sum_{j=1}^{k} < \vec{x}, \vec{v}_j > \vec{v}_j$$

9.5 Spiegelungen



Verdoppelt man die Strecke auf den Projektionspunkt, so sieht man die Form der Spiegelungsmatrix an einer Hyperebene:

$$S\vec{x} = (E - 2\vec{n}\vec{n}^\top)\vec{x}$$

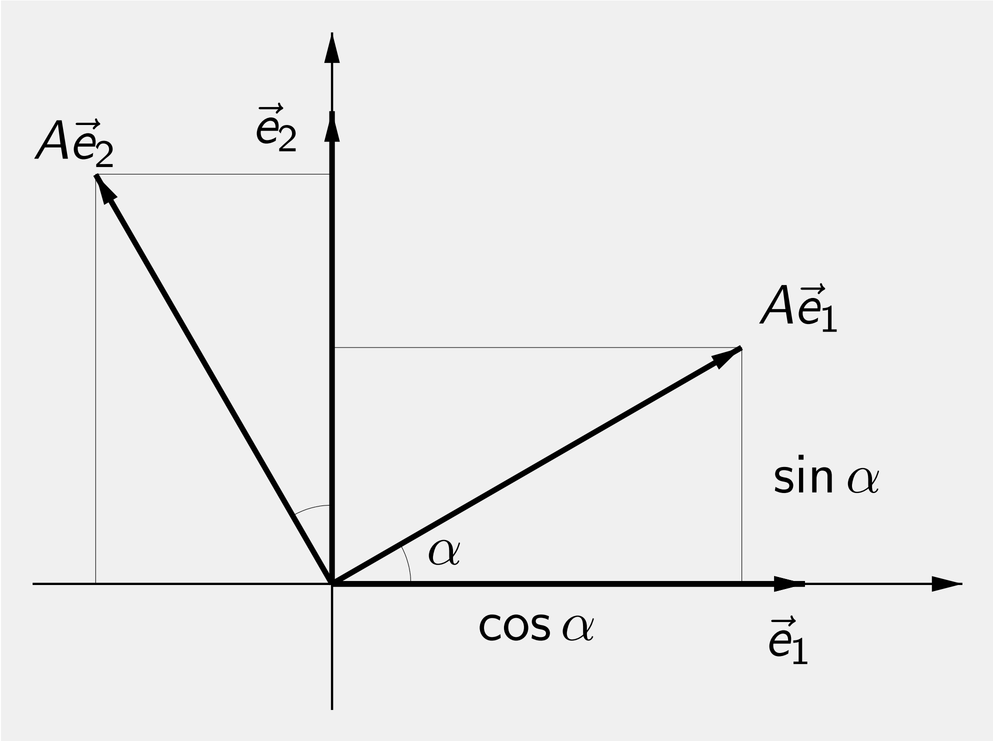
$$S = E - 2\vec{n}\vec{n}^\top$$

Mit denselben Voraussetzungen wie bei der Projektion ist die allgemeine Form

$$S_U\vec{x} = \sum_{j=1}^{k} < \vec{x}, \vec{v}_j > \vec{v}_j - \sum_{j=k+1}^{n} < \vec{x}, \vec{v}_j > \vec{v}_j$$

9.6 Drehungen

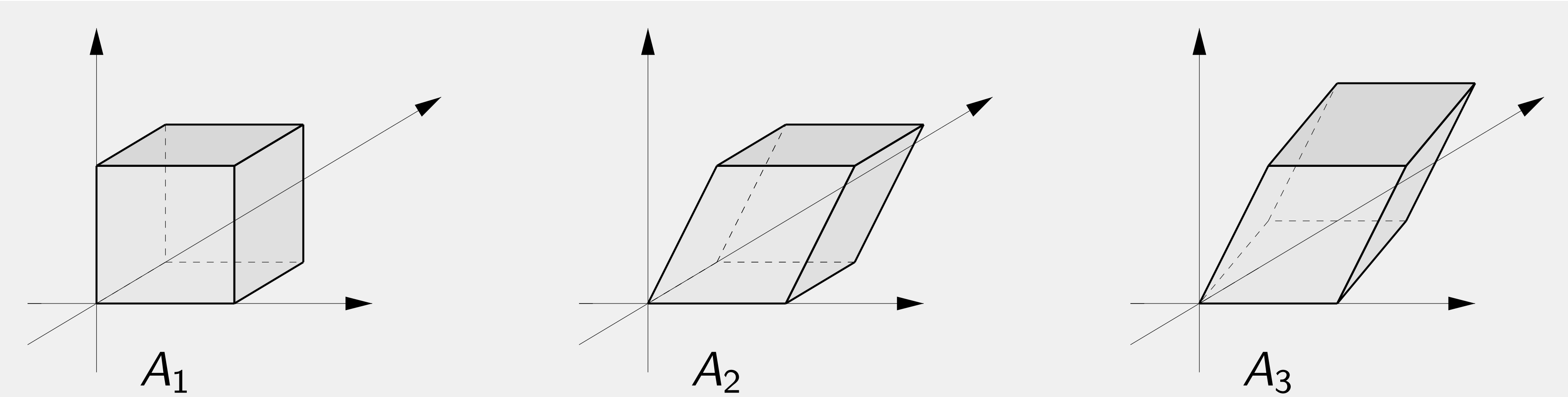
Drehungen um den Winkel α im $\mathbb{R}^2$ haben die Matrixdarstellung
$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
Drehmatrizen sind orthogonal.



9.7 Scherungen

Lineare Abbildungen, bei denen die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts kleiner als die algebraische ist, sind *Scherungen*.

Beispiele für Scherungen:



$$A_1 = E_3 \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Skizzen wurden mit der Projektionsmatrix $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ erstellt.

9.8 Homogene Koordinaten im $\mathbb{R}^3$

- Jedem Vektor $v = (x, y, z)^\top$ des $\mathbb{R}^3$ werden alle Vektoren des $\mathbb{R}^4$ der Form $(tx, ty, tz, t)^\top$ mit $t \neq 0$ zugeordnet. Insbesondere wird v durch $\tilde{v} = (x, y, z, 1)^\top$ repräsentiert.
- Einer durch A gegebenen linearen Abbildung wird die Matrix
$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
zugeordnet
- Dem Vektor $w = (w_1, w_2, w_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ wird die Matrix
$$S_w = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 & w_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
zugeordnet.
- Dem Vektor Av entspricht $\tilde{A}\tilde{v}$
- Dem Vektor $v + w$ entspricht $S_w v$