Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl.-Math. T. Kloos

Dortmund, 22.10.2014

Höhere Mathematik III (P/MP/ET/IT/I-I)

3. Übungsblatt

Abgabetermin: 30.10.2014, 12:00

Aufgabe 1

Es sei

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} : G \to \mathbb{R}^3$$

ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$. Beweisen Sie die Identität

$$\text{rot rot}\,\vec{w} = (\text{grad div}\,\vec{w})^T - \begin{pmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \\ \Delta w_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Seien $R = \{(x_1, x_2) \,\big|\, 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$, $\vec{f}(x_1, x_2) = (x_1^3 + x_2, x_2^3 - x_1)$ und ∂R der Rand von R. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\partial R} \vec{f} \cdot d\vec{x}$ einmal direkt und einmal mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes.

Aufgabe 3

Gegeben sei der durch $x^2 + y^2 < (z-1)^2$, $0 < z < 1$, beschriebene Kegel und das Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z) = (y, -x, z^2)^T$. Berechnen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch die Oberfläche des Kegels (Mantel & Boden) mit dem Gaußschen Integralsatz. Der Normalenvektor der Oberfläche sei nach außen gerichtet.

Aufgabe 4

Die Kurve C sei gegeben durch die Parameterdarstellung

$$\vec{\phi} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \vec{\phi}(t) = (r \cdot \cos^3 t, r \cdot \sin^3 t)^T, \quad \text{mit festem } r > 0.$$

Berechnen Sie die Fläche des von C begrenzten Gebietes.

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter
  `http://www.mathematik.tu-dortmund.de/hm/`