Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl.-Math. T. Kloos

Dortmund, 29.10.2014

Höhere Mathematik II (P/MP/ET/IT/IKT/I-I)

4. Übungsblatt

Abgabetermin: 06.11.2014, 12:00

Aufgabe 1

Gilt der Satz von Gauß auch für ein Vektorfeld mit Singularität, wenn man an dieser Stelle das Volumenintegral als uneigentliches Integral interpretiert? Man berechne dazu explizit für die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$

$$\iint_{|\vec{x}|=1} \vec{v} \cdot \vec{n}\; dS \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint_{\varepsilon < |\vec{x}| < 1} \operatorname{div} \vec{v}\; d\vec{x}$$

für die Vektorfelder mit

(i) $\vec{v}(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$,

(ii) $\vec{v}(\vec{x}) = -\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) = g(|\vec{x}|)$ und $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. f heißt radial-symmetrisch.

(i) Berechnen Sie ∇f und Δf.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\int_{B_R(0)} \Delta f\; d\vec{x} = 4\pi R^2 g'(R)$$

für alle $R > 0$ gilt.

Aufgabe 3

Es seien $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v}(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)^T$ und P der folgende Teil des Paraboloids

$$P := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 2z,\; 0 \le z \le 2\}.$$

Γ_D sei dabei der Deckel und Γ_M der Mantel von P, $\vec{n}$ sei der äußere Normalenvektor auf Γ_D bzw. Γ_M. Berechnen Sie

$$\int_{\Gamma_D} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma_M} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$

sowohl direkt als auch mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Aufgabe 4

Gegeben seien die Menge $G = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v \geq 0, u + v \leq 1\}$ und die Fläche F durch ihre Parametrisierung

$$\vec{\phi} : G \to \mathbb{R}^3, \ \vec{\phi}(u, v) = (u, v, 1 - u - v)^T.$$

Berechnen Sie den Fluss der Rotation des Vektorfeldes $\vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, mit $\vec{w}(x, y, z) = (x, y, z)$ durch die Fläche F.

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter
  `http://www.mathematik.tu-dortmund.de/hm/`