

Höhere Mathematik II (P/MP/ET/IT/IKT/I-I)

5. Übungsblatt

Abgabetermin: 13.11.2014, 12:00

Aufgabe 1

Überprüfen Sie, wo die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind:

(i) $f_1(z) = \operatorname{Im} z$

(ii) $f_2(z) = 3\bar{z} + 5z^2$

(iii) $f_3(z) = f_3(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

(iv) $f_4(z) = f_4(x + iy) = \cos x \sin y - i \sin x \cos y$

Aufgabe 2

Es sei $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $u(x, y) := (e^{-y} + e^y) \cos x$.

- (i) Zeigen Sie, dass u harmonisch ist.
- (ii) Bestimmen Sie eine zu u konjugiert harmonische Funktion $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.
- (iii) Schreiben Sie $f = u + iv$ als komplexe Funktion von z .

Aufgabe 3

Gegeben sei die analytische Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

- (i) Zeigen Sie, dass f nicht injektiv ist und überprüfen Sie, wo f konform ist.
- (ii) Beweisen Sie, dass das Bild einer Kreislinie $C_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$, $r > 1$, unter f eine Ellipse mit

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

ist, mit $a = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$ und $b = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})$.

Aufgabe 4

Betrachten Sie in dieser Aufgabe den Zweig der Wurzelfunktion

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i\phi/2}, \quad \text{für } z = |z| e^{i\phi}, \quad -\pi < \phi < \pi,$$

zum Schnitt $\Gamma_{-\pi}$.

- (i) Bestimmen Sie das maximale Definitionsgebiet $M \subset \mathbb{C}$, auf welchem die Funktion

$$g : M \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = z + \sqrt{z^2 + 1}$$

wohldefiniert ist.

- (ii) Zeigen Sie, dass g injektiv ist.
(iii) Bestimmen Sie die Ableitung von g .

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter <http://www.mathematik.tu-dortmund.de/hm/>