Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl.-Math. T. Kloos

Dortmund, 14.01.2015

Höhere Mathematik III (P/MP/ET/IT/IKT/I-I)

13. Übungsblatt

Abgabetermin: 22.01.2015, 12:00

Aufgabe 1

(i) Es sei f differenzierbar und es gelte $f, f' \in L^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \omega^2 \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 \, d\omega = \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 \, dt$$

gilt.

(ii) Verwenden Sie Teil (i) und berechnen Sie damit das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2} \, d\omega.$$

Aufgabe 2

Welcher Vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^6$ der Form $\vec{y} = (m, m, m, m, m, m)^T$, $m \in \mathbb{R}$, hat von dem Vektor $\vec{x} = (0, 1, 1, 4, 4, 8)^T$ den geringsten Abstand, wenn man als Norm

(i) $\|\cdot\|_1$ (ii) $\|\cdot\|_2$ (iii) $\|\cdot\|_\infty$

zu Grunde legt?

Aufgabe 3

Es sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)$. Berechnen Sie $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ und $\|f\|_\infty$.

Aufgabe 4

Es sei $r : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, strikt positive Funktion, es gilt also $r(x) > 0$. Für stetige (komplexwertige) Funktionen $f, g : [a.b] \to \mathbb{C}$ definiert man

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}r(x) \, dx.$$

Zeigen Sie, dass $\langle f, g \rangle$ die Eigenschaften eines (komplexen) Skalarproduktes hat:

(i) $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$

(ii) Für $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt $\langle \alpha f, g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle$

(iii) $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$

(iv) $\langle f, f\rangle \geq 0$ und $\langle f, f\rangle = 0$ genau dann, wenn $f = 0$.

Was ergibt sich daraus für $\langle f, \alpha g\rangle$?

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter
  `http://www.mathematik.tu-dortmund.de/hm/`