22: Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung

22.1 Einleitung: elektrischer Schwingkreis

Im elektrischen Reihen-Schwingkreis mit Kondensator (Kapazität C), Spule (Induktivität L) und ohmschem Widerstand (R) erfüllt die Ladungsmenge Q des Kondensators die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{1}{C}Q + RQ' + LQ'' = 0. \tag{$*$}$$

Anfangswerte sind $Q(0) = Q_0$ und $Q'(0) = -\frac{Q_0}{RC}$.

Herleitung: Ladung Q und Stromstärke I erfüllen $I = Q'$. Die Kirchhoff'sche Maschenregel besagt, dass die Gesamt-Spannung in der Reihenschaltung Null ist. Wären nur der Kondensator und der ohmsche Widerstand vorhanden, so müsste gelten $U_C + U_R = \frac{1}{C}Q + RQ' = 0$. Zum Anfangswert $Q(0) = Q_0$ lautet die Lösung $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$.

Bei Hinzunahme der Spule in die Reihenschaltung erhalten wir die Spannungsbilanz

$$U_{\mathrm{ges}} = U_C + U_R + U_L = \frac{1}{C}Q + RQ' + LQ'' = 0.$$

Lösung I: Umschreiben in ein lineares System 1. Ordnung

Mit Konstanten $b_1 := \frac{R}{L}$ und $b_0 := \frac{1}{LC}$ ist zu lösen

$$Q'' + b_1 Q' + b_0 Q = 0.$$

Wir definieren $y_1 := Q$ und $y_2 := Q'$ und erhalten das System

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -b_0 y_1 - b_1 y_2. \end{cases}$$

Die Matrixform mit $Y = (y_1, y_2)^\top$ lautet

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_0 & -b_1 \end{pmatrix} Y.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix ist $\lambda^2 + b_1\lambda + b_0$, seine Nullstellen sind

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b_1^2 - 4b_0},$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_j ist

$$v_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

Die spezielle Form des Lösungsvektors $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}$ erlaubt uns, nur die erste Komponente des Lösungsvektors anzugeben.

Wir setzen $\delta = \frac{R}{2L}$ und $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

(i) Für $0 \leq b_1 < 2\sqrt{b_0}$ (also $0 \leq \delta < \omega_0$) liegen komplex konjugierte Nullstellen vor:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Die 1. Komponente der Eigenvektoren ist 1 (rein reell), also erhalten wir als 1. Lösungskomponente im reellen Fundamentalsystem die Funktionen

$$\phi_1(t) = e^{-\delta t}\cos(\omega t), \qquad \phi_2(t) = e^{-\delta t}\sin(\omega t).$$

Man nennt δ *Dämpfungsfaktor* und $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} < \omega_0$ *Resonanzfrequenz*.

Fall $R > 0$: gedämpfte Schwingung mit $\lim_{t\to\infty} \phi_j(t) = 0$, $j = 1, 2$: Zu Anfangswerten

$Q(0) = Q_0$, $Q'(0) = -\frac{Q_0}{RC}$, ergibt sich die Lösung

$$Q(t) = Q_0 e^{-\delta t}\left(\cos(\omega t) + \left(\delta - \frac{1}{RC}\right)\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right).$$

Fall $R = 0$: ungedämpfte Schwingung mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$:

$$\phi_1(t) = \cos(\omega_0 t), \qquad \phi_2(t) = \sin(\omega_0 t)$$

Die Anfangswerte $Q(0) = Q_0$, $Q'(0) = -D$ (statt $-\infty$) ergeben die Lösung

$$Q(t) = Q_0\cos(\omega_0 t) - \frac{D}{\omega_0}\sin(\omega_0 t).$$

(ii) Für $b_1 = 2\sqrt{b_0}$ (also $\delta = \omega_0 = \frac{2}{RC}$) ist der Eigenwert $\lambda = -b_1/2$ doppelt, seine geometrische Vielfachheit ist aber 1. Wir haben den Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ und den verallgemeinerten Eigenvektor $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; als 1. Komponente der allg. Form des Fundamentalsystems in 21.15(iii) ergibt sich

$$\phi_1(t) = e^{-\delta t}, \qquad \phi_2(t) = te^{-\delta t}$$

mit Grenzwerten 0 für $t \to \infty$.

Zu Anfangswerten $Q(0) = Q_0$, $Q'(0) = -\frac{Q_0}{RC}$, ergibt sich die Lösung (beachte $\delta =$)

$$Q(t) = Q_0 e^{-\delta t}\left(1 + \frac{\delta}{2}t\right).$$

Dies ist (für festes t) tatsächlich der Grenzwert aus Fall (i) für $\omega \to 0$. Man vereinfacht noch $\delta - \frac{1}{RC} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$ und erkennt, dass $Q(t)$ streng monoton gegen Null fällt.

(iii) Für $b_1 > 2\sqrt{b_0}$ (also "großen Widerstand" $R > 2\sqrt{L/C}$) ist $\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} < 0$, das Fundamentalsystem

$$\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \qquad \phi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

hat Grenzwert 0 für $t \to \infty$.

Zu Anfangswerten $Q(0) = Q_0$, $Q'(0) = -\frac{Q_0}{RC}$, ergibt sich die Lösung (beachte $\frac{1}{RC} = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$)

$$Q(t) = Q_0 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} e^{\lambda_2 t} \right).$$

Diese Funktion fällt streng monoton gegen Null.

Lösung II: Ansatz

$$Q(t) = Q_0 e^{\lambda t} \qquad (\text{mit } \lambda = -\delta + i\omega \in \mathbb{C}).$$

Einsetzen von $Q'(t) = \lambda Q_0 e^{\lambda t}$, $Q''(t) = \lambda^2 Q_0 e^{\lambda t}$ in die Dgl. und Division durch $e^{\lambda t}$ ergibt die quadratische Gleichung

$$\frac{1}{C} + R\lambda + L\lambda^2 = 0.$$

Die linke Seite nennt man das *charakteristische Polynom* der Dgl.

Wir setzen $\delta = \frac{R}{2L}$ und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Die möglichen Zahlenwerte für λ sind dann

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

- Für kleinen Widerstand R ist $0 \leq \delta < \omega_0$ und $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega$ mit dem *Dämpfungsfaktor* δ und der *Resonanzfrequenz* $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} < \omega_0$. Die Ladungsmenge des Kondensators (bei $Q(0) = Q_0$ und $Q'(0) = -\frac{Q_0}{RC} = -\frac{Q_0\omega_0^2}{2\delta}$) ist

$$Q(t) = Q_0 \ e^{-\delta t} \left(\cos \omega t + \frac{1}{\omega} \left(\delta - \frac{\omega_0^2}{2\delta} \right) \sin \omega t \right).$$

- Der ungedämpfte Fall $R = 0$ führt zur Resonanzfrequenz ω_0.

- Im Fall $R = 2\sqrt{L/C}$ ist $\delta = \omega_0$. Zur Lösung $e^{-\delta t}$ der Dgl. tritt noch eine weitere Lösung $te^{-\delta t}$ hinzu. Die Ladungsmenge des Kondensators (bei $Q(0) = Q_0$ und $Q'(0) = -\frac{Q_0}{RC} = -\frac{Q_0\delta}{2}$) ist dann

$$Q(t) = Q_0 \left(1 + \frac{\delta}{2} t \right) \ e^{-\delta t}.$$

- Für großen Widerstand $R > 2\sqrt{L/C}$ ist $\delta > \omega_0$. Mit $\gamma_{1,2} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ ist die Ladungsmenge (bei $Q(0) = Q_0$ und $Q'(0) = -\frac{Q_0}{RC} = -\frac{Q_0\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}$)

$$Q(t) = \frac{Q_0}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} \left(\gamma_1^2 e^{-\gamma_2 t} - \gamma_2^2 e^{-\gamma_1 t} \right).$$

  Ein großer Widerstand unterdrückt also die Oszillation, es findet ein einmaliges Entladen des Kondensators statt.

Wir betrachten im ganzen Kapitel lineare Dgl'n n-ter Ordnung.

22.2 Definition und Satz: Lineare Dgl. n-ter Ordnung

Die *lineare inhomogene Dgl. n-ter Ordnung* lautet

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x), \qquad (*_i)$$

mit stetigen Funktionen $b_0, \ldots, b_{n-1}, g : I \to \mathbb{R}$. Die zugehörige homogene lineare Dgl. ist

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0. \qquad (*_h)$$

Als Lösung bezeichnen wir alle Funktionen $y = y(x)$, die n-mal stetig differenzierbar sind und die entsprechende Gleichung erfüllen.

Sehr viele Eigenschaften der Lösungen lassen sich aus dem Abschnitt über Systeme übernehmen. Dazu wird die Dgl. n-ter Ordnung in ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung umgeschrieben.

22.3 Lineare Unabhängigkeit von Funktionen

Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : I \to \mathbb{R}$ sind *linear unabhängig*, wenn aus der Identität

$$c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in I$$

folgt, dass $c_1 = \cdots = c_n = 0$ gilt; d.h. wenn nur die triviale Linearkombination die konstante Nullfunktion liefert.
Anders ausgedrückt: Für jeden Vektor von Koeffizienten $(c_1, \ldots, c_n) \neq \vec{0}$ folgt, dass es mindestens ein $x \in I$ gibt, für das

$$c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) \neq 0$$

gilt.

22.4 Umschreiben einer Dgl. in ein System

Gegeben sei die inhomogene lineare Dgl. n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x). \qquad (*_i)$$

Wir setzen

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \ \ldots, \ y_{n-1} = y^{(n-2)}, \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

Dann ist die gegebene Dgl. n-ter Ordnung äquivalent zu dem System 1. Ordnung

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ & \vdots & \\ y_{n-1}' & = & y_n \\ y_n' & = & -b_0(x)y_1 - b_1(x)y_2 - \cdots - b_{n-1}(x)y_n + g(x). \end{array} \qquad (**)$$

Beachte: Die Lösungen von $(*)$ sind stets die ersten Komponenten der Lösungsvektoren von $(**)$.

Die Matrix-Form des Dgl.-Systems $(**)$ lautet

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -b_0(x) & -b_1(x) & \cdots & -b_{n-2}(x) & -b_{n-1}(x) \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Ist

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_1' \\ \vdots \\ \phi_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_2' \\ \vdots \\ \phi_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \Phi_n = \begin{pmatrix} \phi_n \\ \phi_n' \\ \vdots \\ \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem des Dgl.-Systems, so sind

$$\phi_1, \ldots, \phi_n : I \to \mathbb{R}$$

linear unabhängige Lösungen der homogenen Dgl. n-ter Ordnung,

22.5 Lösung homogener Dgl.: Fundamentalsystem

(i) Die Lösungen der homogenen Dgl. $(*_h)$ sind auf I definiert. Sie bilden einen Vektorraum der Dimension n.
Linear unabhängige Lösungen $\phi_1, \ldots, \phi_n : I \to \mathbb{R}$ bilden eine Basis dieses Vektorraums und heißen *Fundamentalsystem* der Dgl. $(*_h)$.

(ii) Die entsprechende *Fundamentalmatrix* der Lösungen von $(**)$ $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x))$ heißt *Wronskimatrix*.

(iii) Die Determinate der Wronskimatrix heißt *Wronskideterminante* $\mathcal{W}(x)$.

(iv) Es gilt das *Superpositionsprinzip*:
Ist y_s eine (spezielle) Lösung der inhomogenen Dgl. $(*_i)$, so erhält man **alle** Lösungen der inhomogenen Dgl. als

$$y(x) = y_s(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x)$$

mit beliebigen reellen Konstanten $c_1, \ldots, c_n$, wobei die Funktionen $\phi_1, \ldots, \phi_n$ ein Fundamentalsystem der homogenen Dgl. $(*_h)$ sind.

"Fundamentalmatrix", "-system" und "Wronskimatrix" beziehen sich immer auf die homogene Dgl!

Bemerkung: Die *Linearität* der Differentialgleichung bedeutet folgendes: Durch

$$L(y) = y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + b_1(x)y' + b_0(x)y$$

ist eine Abbildung auf dem Vektorraum der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen $C^n(I)$ gegeben. Diese Abbildung erfüllt die Linearität

$$L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2).$$

Man nennt L deshalb einen *linearen Differentialoperator*.

Die Funktionen $\phi_1, \ldots, \phi_n$ eines Fundamentalsystems bilden eine Basis des Kerns von L, also des Vektorraums der Lösungen von $L(y) = 0$.

Inhomogene Dgl. kann man wie in 21.12 durch *Variation der Konstanten* lösen.

22.6 Lösung inhomogener Dgl.

Sei $\phi_1, \ldots, \phi_n$ ein Fundamentalsystem von

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x).$$

Eine spezielle Lösung hiervon erhält man durch

$$y_s(x) = \Phi(x)C(x) = c_1(x)\phi_1(x) + \cdots + c_n(x)\phi_n(x),$$

wobei der Vektor $C'(x) = (c_1'(x), \ldots, c_n'(x))^\top$ Lösung des Gleichungssystems

$$\Phi(x)C'(x) = c_1'(x)\Phi_1(x) + \cdots + c_n'(x)\Phi_n(x) = (0, \ldots, 0, g(x))^\top$$

ist.

Spezialfall $n = 2$: Ist ϕ_1, ϕ_2 Fundamentalsystem der Dgl. so ergibt $y_s(x) = c_1(x)\phi_1(x) + c_2(x)\phi_2(x)$ eine partikuläre Lösung.
Dabei ist $c_1'(x) = -\dfrac{g(x)\phi_2(x)}{\mathcal{W}(x)}$ und $c_2'(x) = \dfrac{g(x)\phi_1(x)}{\mathcal{W}(x)}$.

Eindeutigkeit der Lösung wird durch Vorgabe von Anfangswerten erzielt.

22.7 Anfangswertproblem (AWP)

Die Funktionen $b_0, \ldots, b_{n-1}, g : I \to \mathbb{R}$ seien stetig.
Ist $x_0 \in I$ und sind $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ gegeben, so hat das AWP

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x), \qquad (*_i)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = a_0 \\ y'(x_0) = a_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung $y : I \to \mathbb{R}$.

22.8 Lösung des Anfangswertproblems

Es sei $\phi_1, \dots, \phi_n$ ein Fundamentalsystem der linearen Dgl.

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x),$$

y_s eine Lösung der inhomogenen Dgl.
Die Koeffizienten $c_1, \dots, c_n$ der Lösung

$$y(x) = c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) + y_s(x)$$

zu den Anfangswerten

$$y(x_0) = a_0, \quad y'(x_0) = a_1, \ \dots \ , \quad y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1},$$

bestimmt man aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \cdots & \phi_n(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) & \cdots & \phi_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x_0) & \phi_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - y_s(x_0) \\ a_1 - y_s'(x_0) \\ \vdots \\ a_{n-1} - y_s^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix des Gleichungssystems im AWP ist die *Wronskimatrix*.

22.9 Definition und Satz: Wronski-Determinante

Es sei $\phi_1, \dots, \phi_n$ ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Dgl. $(*_h)$.
Die Determinante der Fundamentalmatrix Φ

$$\mathcal{W}(x) = \det \begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \cdots & \phi_n(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) & \cdots & \phi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

heißt die *Wronski-Determinante* des Fundamentalsystems $\phi_1, \dots, \phi_n$.

Direkt aus der Umschreibung auf ein System (22.4) folgt: Die Wronski-Determinante ist auf I differenzierbar und erfüllt die homogene lineare Dgl. 1. Ordnung

$$\mathcal{W}'(x) = -b_{n-1}(x)\mathcal{W}(x), \qquad x \in I.$$

Daher ist $\mathcal{W}(x) = Ce^{-B_{n-1}(x)}$ mit einer Stammfunktion B_{n-1} von b_{n-1} und einer Konstanten $C \neq 0$.

22.10 Folgerung

Die Funktionen $\phi_1, \ldots, \phi_n : I \to \mathbb{R}$ seien Lösungen der homogenen linearen Dgl. $(*_h)$. Dann sind äquivalent:

(i) $\phi_1, \ldots, \phi_n$ ist ein Fundamentalsystem der Dgl., d.h. die Funktionen sind linear unabhängig.

(ii) Die Wronski-Determinante $\mathcal{W}(x)$ ist ungleich Null für alle $x \in I$.

(iii) Die Wronski-Determinante $\mathcal{W}(x)$ in (ii) ist ungleich Null für mindestens ein $x \in I$.

Schon für lineare Dgl. 2. Ordnung gibt es kein allgemeines Lösungsverfahren. Hat man aber eine Lösung, so kann man die Ordnung einer linearen Dgl. n- ter Ordnung um eins reduzieren:

22.11 Reduktion der Ordnung (d'Alembert)

Ist y_0 eine nichttriviale Lösung der Dgl.

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0,$$

so erfüllt $d(x) := c'(x)$ im Ansatz $y(x) = y_0(x)c(x)$ eine lineare Dgl. $(n-1)$ster Ordnung für die Funktion c'.

Wichtige Teilklasse von linearen Dgl.:

22.12 Lineare Dgl. mit konstanten Koeffizienten

Zur homogenen linearen Dgl. *n*-ter Ordnung

$$y^{(n)} + b_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + b_1 y' + b_0 y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ definieren wir das *charakteristische Polynom*

$$p(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Die reellen und komplexen Nullstellen von p liefern dann das folgende Fundamentalsystem von Lösungen der Dgl.:

(r_1) Ist λ_0 eine einfache reelle Nullstelle von p, so ist $\phi(x) = e^{\lambda_0 x}$ Lösung der Dgl.

(r_k) Ist λ_0 eine k-fache reelle Nullstelle von p (mit $k \geq 2$), so sind

$$\phi_1(x) = e^{\lambda_0 x}, \quad \phi_2(x) = xe^{\lambda_0 x}, \ \ldots\ , \ \phi_k(x) = x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$$

linear unabhängige Lösungen der Dgl.

(c_1) Sind $\lambda = \delta + i\omega$ (mit $\omega \neq 0$) und die komplex konjugierte Zahl $\overline{\lambda} = \delta - i\omega$ einfache komplexe Nullstellen von p, so sind

$$\phi_1(x) = e^{\delta x} \sin(\omega x), \qquad \phi_2(x) = e^{\delta x} \cos(\omega x)$$

linear unabhängige Lösungen der Dgl.

(c_k) Sind $\lambda = \delta + i\omega$ und $\overline{\lambda} = \delta - i\omega$ (mit $\omega \neq 0$) jeweils k-fache komplexe Nullstellen von p, so sind

$$\phi_{2\ell+1}(x) = x^{\ell} e^{\delta x} \sin(\omega x), \qquad \phi_{2\ell+2}(x) = x^{\ell} e^{\delta x} \cos(\omega x)$$

mit $0 \leq \ell \leq k-1$ linear unabhängige Lösungen der Dgl.

Die Gesamtheit der n hierdurch bestimmten Lösungen der Dgl. ist linear unabhängig.

22.13 Beweisidee

- Das charakteristische Polynom ist mit dem charakteristischen Polynom des zugehörigen Systems (ev. bis auf das Vorzeichen) identisch.
- Stets ist die geometrische Vielfachheit eins. Es gibt immer einen Eigenvektor, dessen erste Komponente ungleich Null ist.
- Bei mehrfachen Eigenwerten (mit algebraischer Vielfachheit k) muss man Fall 2 von 21.15 bis zur $(k-1)$sten Potenz gehen. Da es ein F.S. geben muss, kann keiner der iterierten Vektoren in der ersten Komponente Null sein.
  In diesem Fall kommen also in der ersten Komponente Funktionen mit Linearkombinationen von $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$ bis $x^{k-1}e^{\lambda x}$ vor.
  Eine Basis des aufgespannten Raums sind genau die angegebenen Funktionen.
- Da bei einer reellen Matrix mit jedem komplexen EW die konjugiert komplexe Zahl EW gleicher Vielfachheit (und konjugiertem EV) ist, folgt (c) durch Aufteilen in Real- und Imaginärteil wie in 21.16.

Eine alternative Beweismethode geht auf die *Laplacetransformation* ($\to$ HM 3) zurück.

Bemerkung: Die Lösungen

$$y(x) = c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x)$$

der homogenen linearen Dgl. n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Häufig interessiert man sich für das Langzeitverhalten $\lim_{x\to\infty} y(x)$ bei gegebenen Anfangswerten $y(x_0) = a_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$.

- Ist der Realteil aller Nullstellen des charakteristischen Polynoms negativ, so gilt $\lim_{x\to\infty} \phi_k(x) = 0$ für alle $1 \le k \le n$, also auch $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ für beliebige Anfangswerte.

- Ist der Realteil aller Nullstellen negativ oder Null, so können mehrere Fälle auftreten, z.B.
  - $y(x) = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$ (zu einfachen Nullstellen $0, 2i, -2i$) hat einen Grenzwert c_1 nur dann, wenn $c_2 = c_3 = 0$ gilt. Ansonsten oszilliert die Lösung zwischen $c_1 \pm \sqrt{c_2^2 + c_3^2}$.
  - $y(x) = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x$ (zu doppelten Nullstellen $i, -i$) ist nur dann beschränkt, wenn $c_2 = c_4 = 0$ gilt, ansonsten tritt eine Oszillation mit linear wachsender Amplitude ein.

- Für reelles $\lambda > 0$ treten Lösungen mit exponentiell wachsendem Betrag auf und für komplexes $\lambda = \delta + i\omega$ mit Realteil $\delta > 0$ treten oszillierende Lösungen mit exponentiell wachsender Amplitude auf.

22.14 Spezielle Lösungen für inhomogene Dgl.

Wir betrachten einige Beispiele von rechten Seiten $g(x)$ in

$$y^{(n)} + b_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + b_1 y' + b_0 y = g(x).$$

Das charakteristische Polynom der homogenen linearen Dgl. ist

$$p(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0.$$

Die spezielle Lösung $y_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird durch das Einsetzen des “Ansatzes” in die Dgl. und Koeffizienten-Vergleich berechnet.

(a) g ist ein Polynom vom Grad $M \geq 0$.

- $\to$ Ansatz $y_s(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_M x^M$, falls $p(0) \neq 0$,
- $\to$ Ansatz $y_s(x) = x^k(A_0 + A_1 x + \cdots + A_M x^M)$ mit $k \geq 1$, wenn $p(0) = 0$ und k die exakte Ordnung der Nullstelle $\lambda_0 = 0$ ist.

(b) $g(x) = Q(x)e^{\alpha x}$ mit einem Polynom Q vom Grad $M \geq 0$.

- $\to$ Ansatz $y_s(x) = (A_0 + A_1 x + \cdots + A_M x^M)e^{\alpha x}$, falls $p(\alpha) \neq 0$,
- $\to$ Ansatz $y_s(x) = x^k(A_0 + A_1 x + \cdots + A_M x^M)e^{\alpha x}$ mit $k \geq 1$, wenn $p(\alpha) = 0$ und k die exakte Ordnung dieser Nullstelle ist.

(c) $g(x) = Q(x)e^{\alpha x}\sin(\omega x)$ oder $g(x) = Q(x)e^{\alpha x}\cos(\omega x)$ mit einem Polynom Q vom Grad $M \geq 0$.

$\rightarrow$ Ansatz $y_s(x) = (A_0 + A_1 x + \cdots + A_M x^M)e^{\alpha x}\sin(\omega x) +$
$(B_0 + B_1 x + \cdots + B_M x^M)e^{\alpha x}\cos(\omega x)$ (BEIDE!),
wenn $p(\alpha \pm i\omega) \neq 0$ gilt,

$\rightarrow$ Ansatz $y_s(x) = x^k(A_0 + A_1 x + \cdots + A_M x^M)e^{\alpha x}\sin(\omega x) +$
$x^k(B_0 + B_1 x + \cdots + B_M x^M)e^{\alpha x}\cos(\omega x)$
mit $k \geq 1$, wenn $p(\alpha \pm i\omega) = 0$ und k die exakte Ordnung dieser komplexen Nullstelle ist.

(e) Linearkombinationen dieser speziellen rechten Seiten werden durch Superposition behandelt (siehe 22.5(iv)).

(f) Die allgemeine Lösung der Dgl. erhält man wie in 22.5.

Wir behandeln im Folgenden lineare Dgl. 2. Ordnung, deren Lösungen $y_I \to \mathbb{R}$ eine Darstellung als Potenzreihe besitzen:

22.15 Potenzreihenansatz

In der homogenen linearen Dgl. 2. Ordnung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

sollen die Funktionen p, q im Intervall $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ die Darstellung durch Potenzreihen besitzen, also

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \qquad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k.$$

Dann ist jede Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und besitzt die in I konvergente Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k. \qquad (*)$$

Bemerkung: Fundamentallösungen ϕ_1, ϕ_2 erhält man, indem man die Koeffizienten $(a_0, a_1) = (1, 0)$ für ϕ_1 bzw. $(a_0, a_1) = (0, 1)$ für ϕ_2 in (*) vorgibt und dann die Koeffizienten $a_2, a_3, \ldots$ durch Einsetzen in die Dgl. und Koeffizientenvergleich bestimmt.

Hilfreich: mit $a_{-1} = a_{-2} := 0$ ist

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$$

$$xy = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} x^n \qquad xy' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n \qquad xy'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n$$

$$x^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-2} x^n \qquad x^2 y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n \qquad x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n$$

Erweiterung auf Dgl.'s, deren Koeffizienten-Funktionen eine Polstelle niedriger Ordnung besitzen:

22.16 Schwach singuläre Dgl. 2. Ordnung

In der homogenen linearen Dgl. 2. Ordnung

$$y'' + \frac{p(x)}{x - x_0} y' + \frac{q(x)}{(x - x_0)^2} y = 0,$$

sollen die Funktionen p, q im Intervall $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ die Darstellung durch Potenzreihen besitzen, also

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \qquad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k.$$

x_0 heißt dann *schwach singuläre Stelle* der Dgl.

Der Ansatz

$$y(x) = (x - x_0)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \qquad (x > x_0,\ \rho, a_k \in \mathbb{C},\ a_0 \neq 0)$$

mit in $(x_0 - r, x_0 + r)$ konvergenter Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ liefert mindestens eine nicht-triviale Lösung der Dgl. Der Exponent ρ erfüllt dabei die Indexgleichung

$$\boxed{\rho(\rho - 1) + p(x_0)\rho + q(x_0) = 0.}$$

Bemerkung: Falls zwei Lösungen $\rho_1 \neq \rho_2$ der Indexgleichung existieren, so liefert der Ansatz zwei Lösungen ϕ_1, ϕ_2.

(a) Falls $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}$ gilt, so sind ϕ_1, ϕ_2 linear unabhängig, also ein Fundamentalsystem der Dgl.

(b) Falls $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}$ gilt, muss die lineare Unabhängigkeit geprüft werden (es kann sich bei den Darstellungen von ϕ_1, ϕ_2 um reine Verschiebungen des Summations-Index der Potenzreihe handeln!)

Falls die Indexgleichung eine doppelte Nullstelle hat, macht man den zusätzlichen Ansatz

$$y_2(x) = (x - x_0)^\rho \ln(x - x_0) \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k.$$

Dies entspricht dem Auffinden einer zweiten Lösung durch das d'Alembertsche Reduktionsverfahren.

Praktische Vorgehensweise: Man findet ρ_1, ρ_2 aus der Indexgleichung, macht den obigen Ansatz und findet die Koeffizienten der Potenzreihe durch Einsetzen in die Dgl.

Wichtige Potenzreihen (mit $a_{-1} := a_{-2} := 0$)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\rho} \qquad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho+1) a_{n+1} x^{n+\rho} + \rho a_0 x^{\rho-1}$$

$$xy = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} x^{n+\rho} \qquad xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho) a_n x^{n+\rho}$$

$$x^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-2} x^{n+\rho} \qquad x^2 y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho-1) a_{n-1} x^{n+\rho}$$

$$xy'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho+1)(n+\rho) a_{n+1} x^{n+\rho} + \rho(\rho-1) a_0 x^{\rho-1}$$

$$x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho)(n+\rho-1) a_n x^{n+\rho}$$

22.17 Euler-Dgl.: Für die schwach singuläre Dgl. mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{b}{x^2}y = 0$$

seien ρ_1, ρ_2 die Lösungen der Indexgleichung

$$\boxed{\rho(\rho - 1) + a\rho + b = 0.}$$

Dann ist ein Fundamentalsystem gegeben durch

- $\phi_1(x) = x^{\rho_1}, \quad \phi_2(x) = x^{\rho_2}$, falls $\rho_1 \neq \rho_2$, (diese sind auch im Fall $\rho_2 - \rho_1 \in \mathbb{Z}$ lin. unabh.)
- $\phi_1(x) = x^{\rho_1}, \quad \phi_2(x) = x^{\rho_1} \ln x, \quad$ falls $\rho_1 = \rho_2$.

23 Numerische Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen

Frage: Was ist zu tun, wenn das AWP

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

keinem der behandelten Typen entspricht?

Antwort: Verwendung eines numerischen Verfahrens, ähnlich wie die Quadraturformeln zur näherungsweisen Integration

Die Idee der Methode wird vom Richtungsfeld der Dgl. motiviert:

- Vom Anfangswert $y(x_0) = y_0$ gehe einen kurzen "Schritt" bis zu

  $$x_1 = x_0 + h, \qquad y_1 = y_0 + hK_0$$

  mit der Steigung K_0 eines kurzen Geradenstücks.

- Die Steigung K_0 wird anhand des Richtungsfelds der Dgl. $y' = f(x, y)$ in der Nähe von (x_0, y_0) berechnet.

- Für den nächsten Schritt verwende eine neu zu berechnende Steigung K_1 und erhalte

  $$x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \qquad y_2 = y_1 + hK_1.$$

  etc.

"Gute" Verfahren ergeben Werte y_k, $1 \leq k \leq N$, die von den wahren Werten $y(x_k)$ der Lösung des AWP nur wenig abweichen:

$$|y(x_0 + kh) - y_k| \leq Ch^\ell, \qquad 1 \leq k \leq N.$$

Der Exponent $\ell \in \mathbb{N}$ beschreibt (bei gewissen Voraussetzungen an die Funktion f in der Dgl.) die "Konvergenz-Ordnung" des Verfahrens.

Wir beschreiben zwei sog. Einschrittverfahren, die von (x_k, y_k) *ohne Gedächtnis* den nächsten Punkt $(x_{k+1} = x_k + h, y_{k+1} = y_k + hK_k)$ berechnen.

23.1 Eulersches Polygonzugverfahren

Die einfachste Methode zur numerischen Lösung des AWP

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

verwendet die Steigung $K_k = f(x_k, y_k)$, also

$$x_{k+1} = x_k + h = x_0 + kh, \qquad y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Falls f stetig partiell differenzierbar ist und $|f_y(x, y)|$ beschränkt ist, so gibt es Konstanten $L, M > 0$ mit

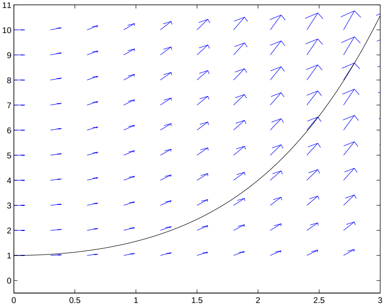
$$|y(x_0 + kh) - y_k| \leq Lh \, \frac{e^{kMh} - 1}{M}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

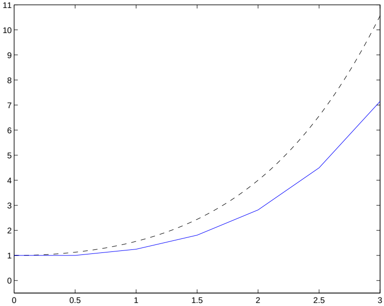
Das Verfahren hat also die Konvergenz-Ordnung 1.

23.2 Beispiel Die AWA $y' = x\sqrt{y}$, $y(0) = 1$, hat die Lösung

$$y(x) = (1 + x^2/4)^2,$$

die wir im Richtungsfeld darstellen.
6 Schritte des Eulerschen Polygonzug-Verfahrens zur Schrittweite $h = 0.5$ liefern eine Näherung des Graphen von f im Intervall $[0, 3]$ (s. Tabelle).

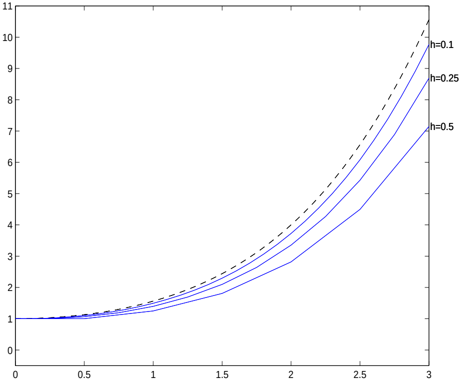




k	x_k	y_k	$y(x_k)$
0	0	1.0000	1.0000
1	0.5000	1.0000	1.1289
2	1.0000	1.2500	1.5625
3	1.5000	1.8090	2.4414

k	x_k	y_k	$y(x_k)$
4	2.0000	2.8178	4.0000
5	2.5000	4.4964	6.5664
6	3.0000	7.1470	10.5625

Verkleinern wir die Schrittweite auf $h = 0.25$ (12 Schritte) oder sogar $h = 0.125$ (24 Schritte) entstehen immer bessere Näherungen durch Polygonzüge für $x \in [0, 3]$:



Im nächsten Verfahren wird die "mittlere Steigung" für das Intervall $[x_k, x_k + h]$ deutlich besser geschätzt.

23.3 Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

Das klassische Runge-Kutta-Verfahren zur numerischen Lösung des AWP

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

verwendet die mittlere Steigung

$$K_k = \frac{1}{6}(\widetilde{K}_{k,1} + 2\widetilde{K}_{k,2} + 2\widetilde{K}_{k,3} + \widetilde{K}_{k,4}).$$

Dabei werden die EWerte folgendermaßen berechnet: (siehe Skizze)

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}_{k,1} &= f(x_k, y_k), \\
\widetilde{K}_{k,2} &= f\left(x_k + \tfrac{h}{2}, y_k + \tfrac{h}{2}\widetilde{K}_{k,1}\right), \\
\widetilde{K}_{k,3} &= f\left(x_k + \tfrac{h}{2}, y_k + \tfrac{h}{2}\widetilde{K}_{k,2}\right), \\
\widetilde{K}_{k,4} &= f(x_k + h, y_k + h\widetilde{K}_{k,3})
\end{aligned}$$

Die Iteration lautet dann wie üblich

$$x_{k+1} = x_k + h = x_0 + kh, \qquad y_{k+1} = y_k + hK_k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

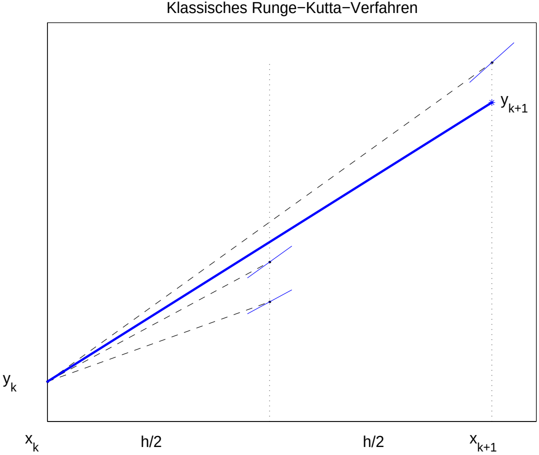
Falls f 4-mal stetig partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen beschränkt sind, so gibt es Konstanten $L, M > 0$ mit

$$|y(x_0 + kh) - y_k| \leq Lh^4 \, \frac{e^{kMh} - 1}{M}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

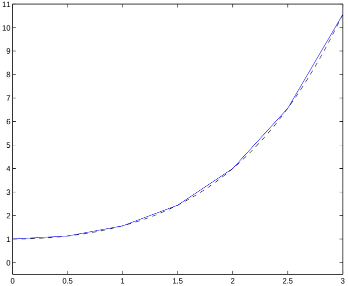
Das Verfahren hat also die Konvergenz-Ordnung 4.

Bemerkung: Bei der "Differentialgleichung" $y' = f(x)$ geht das Runge-Kutta-Verfahren in die Simpsonregel über.

Schema zur Berechnung der "mittleren Steigung":



23.4 Beispiel Wir betrachten die AWA $y' = x\sqrt{y}$, $y(0) = 1$, aus Beispiel 23.2 6 Schritte des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens zur Schrittweite $h = 0.5$ liefern eine sehr gute Näherung:



k	x_k	y_k	$y(x_k)$
0	0	1.0000	1.0000
1	0.5000	1.1289	1.1289
2	1.0000	1.5624	1.5625
3	1.5000	2.4412	2.4414

k	x_k	y_k	$y(x_k)$
4	2.0000	3.9995	4.0000
5	2.5000	6.5655	6.5664
6	3.0000	10.5610	10.5625

Bemerkung: Beide Verfahren lassen sich sofort auf Systeme von Differentialgleichungen anwenden, indem die Steigung jeweils als vektorwertige Funktion gebildet wird (ersetze $f(x, y)$ durch $F(x, Y)$ in den Algorithmen).

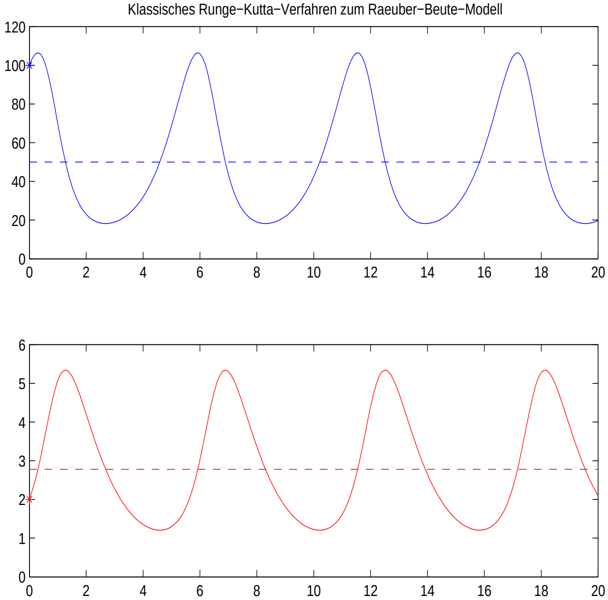
23.5 Beispiel: Das Räuber-Beute-Modell

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1(25/18 - \tfrac{1}{2}y_2) \\ y_2' &= y_2(\tfrac{1}{50}y_1 - 1) \end{aligned}$$

hat zum Anfangswert $y_1(0) = 100$ (Beutetiere), $y_2(0) = 2$ (Raubtiere) die Lösung im untenstehenden Bild. Der obere Graph zeigt y_1 und der untere zeigt y_2. Die Werte wurden mit dem Runge-Kutta-Verfahren zur Schrittweite $h = 0.1$ ermittelt. Die gestrichelten Hilfslinien geben den Gleichgewichts-Zustand

$$y_1 = 50, \qquad y_2 = \frac{25}{9}$$

an. Immer wenn die eine Funktion diesen Wert annimmt, hat die andere ein Maximum oder Minimum. Man erkennt sehr schön die Periodizität der Lösung (Periodenlänge ≈ 5.5).


Klassisches Runge−Kutta−Verfahren zum Raeuber−Beute−Modell
0
20
40
60
80
100
120
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
0
1
2
3
4
5
6
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20