24: Vektoranalysis und die Integralsätze von Gauß, Green und Stokes

Zur Integration reeller Funktionen wurden folgende Regeln behandelt ($f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbar):

- Einsetzen der Intervall-Grenzen in die Stammfunktion:
$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a).$$
- Partielle Integration:
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$
- Substitutionsregel (mit $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig differenzierbar):
$$\int_\alpha^\beta f(h(t))h'(t)\,dt = \int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)\,dx.$$

Unser Ziel ist die Verallgemeinerung der ersten beiden Regeln auf Volumen- und Oberflächenintegrale.

24.1 Differentialoperatoren der Vektoranalysis

Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei offen.

(i) Für ein differenzierbares Skalarfeld $f : M \to \mathbb{R}$ ist

$$\nabla f = (\text{grad } f)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T .$$

Der Differentialoperator $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})^T$ (hebräisch "Nabla") bildet das Skalarfeld f in das Vektorfeld $\nabla f : M \to \mathbb{R}^n$ ab.

(ii) Für ein zweimal differenzierbares Skalarfeld $f : M \to \mathbb{R}$ ist

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Der Differentialoperator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ heißt *Laplace-Operator*. Man schreibt

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla$$

formal als Skalarprodukt des Differentialoperators ∇ mit sich selbst (Multiplikation ist hier die Hintereinanderausführung).

(iii) Für ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T : M \to \mathbb{R}^n$ ist

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

die *Divergenz* von $\vec{v}$. Man schreibt

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}$$

formal als das Skalarprodukt des Differentialoperators ∇ mit $\vec{v}$.
Der Differentialoperator div bildet das Vektorfeld $\vec{v}$ in ein Skalarfeld $\operatorname{div} \vec{v} : M \to \mathbb{R}$ ab.

(iv) (Nur für $n = 3$) Für ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T : M \to \mathbb{R}^3$ ist

$$\operatorname{rot}\ \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

die *Rotation* von $\vec{v}$. Man schreibt

$$\operatorname{rot}\ \vec{v} = \nabla \times \vec{v}$$

formal als das Kreuzprodukt des Differentialoperators ∇ mit $\vec{v}$. Der Differentialoperator rot bildet das Vektorfeld $\vec{v}$ in ein Vektorfeld $\operatorname{rot}\ \vec{v} : M \to \mathbb{R}^3$ ab.

24.2 Rechenregeln

Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ sei offen.

(i) Für ein zweimal stetig differenzierbares Skalarfeld $f : M \to \mathbb{R}$ gilt

$$\text{rot}\,(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \vec{0}.$$

(ii) Für ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{v} : M \to \mathbb{R}^3$ gilt

$$\text{div}\,(\text{rot}\ \vec{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0.$$

(iii) Für differenzierbares $f : M \to \mathbb{R}$ und $\vec{v} : M \to \mathbb{R}^3$ gilt

$$\text{div}\,(f\,\vec{v}) = \nabla f \cdot \vec{v} + f\,\text{div}\ \vec{v}.$$

(iv) Für differenzierbares $f : M \to \mathbb{R}$ und $\vec{v} : M \to \mathbb{R}^3$ gilt

$$\text{rot}\,(f\,\vec{v}) = (\nabla f) \times \vec{v} + f\ \text{rot}\ \vec{v}.$$

24.3 harmonisch, quellenfrei, wirbelfrei

Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei offen.

(i) Ein zweimal differenzierbares Skalarfeld $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, wenn $\Delta f = 0$ in M gilt.

(ii) Ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{v} : M \to \mathbb{R}^n$ heißt *quellenfrei*, wenn $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ in M gilt. (engl. "divergence free")

(iii) Ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{v} : M \to \mathbb{R}^3$ (mit $M \subseteq \mathbb{R}^3$) heißt *wirbelfrei*, wenn $\operatorname{rot} \ \vec{v} = \vec{0}$ in M gilt. (engl. "rotation free")

Bemerkung: Aus den Rechenregeln folgt sofort

- Jedes differenzierbare Rotationsfeld $\vec{w} = \operatorname{rot} \ \vec{v}$ ist quellenfrei.
- Jedes differenzierbare Gradientenfeld $\vec{v} = \nabla f$ ist wirbelfrei.

24.4 Potentialfunktion und Vektorpotential

Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ sei ein Gebiet.

- In 19.9 wurde definiert: Eine skalare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt Potential des Vektorfeldes $\vec{v} : M \to \mathbb{R}^3$, wenn $\nabla f = \vec{v}$ gilt.

  Für stetig differenzierbare Vektorfelder $\vec{v}$ liefert Satz 19.11 bzw. Satz 24.2(i) die notwendige Bedingung
  $$\text{rot } \vec{v} = \vec{0}.$$
  Also können nur wirbelfreie Vektorfelder ein Potential besitzen (siehe auch Wegunabhängigkeit des vektoriellen Kurvenintegrals in 19.11).

- Das Vektorfeld $\vec{w} : M \to \mathbb{R}^3$ heißt *Vektorpotential* von $\vec{v}$, wenn rot $\vec{w} = \vec{v}$ gilt.

  Die Rechenregel 24.2(ii) ergibt für stetig differenzierbares $\vec{v}$ die notwendige Bedingung
  $$\text{div } \vec{v} = 0.$$
  Also können nur quellenfreie Vektorfelder ein Vektorpotential besitzen.

- Die Bedingung div $\vec{v} = 0$ ist unter den gleichen Bedingungen an das Gebiet M wie in 19.11 auch hinreichend für die Existenz eines Vektorpotentials. Falls M ein Würfel oder eine Kugel ist, können wir z.B. das folgende Vektorpotential $\vec{w} : M \to \mathbb{R}^3$ wählen:

$$w_1(x,y,z) = \int_{z_0}^{z} v_2(x,y,t)\,dt - \int_{y_0}^{y} v_3(x,t,z_0))\,dt,$$

$$w_2(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z} v_1(x,y,t)\,dt, \qquad w_3(x,y,z) = 0.$$

- Das Vektorpotential ist nach Regel 24.2(i) nur bis auf die Addition eines beliebigen Gradientenfeldes eindeutig:

$$\operatorname{rot}\left(\vec{w} + \nabla f\right) = \operatorname{rot}\ \vec{w}.$$

Man kann f so wählen, dass $\vec{w} + \nabla f$ quellenfrei ist (sog. *Coulomb-Eichung*):

$$\operatorname{div}\left(\vec{w} + \nabla f\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta f = -\operatorname{div}\ \vec{w}.$$

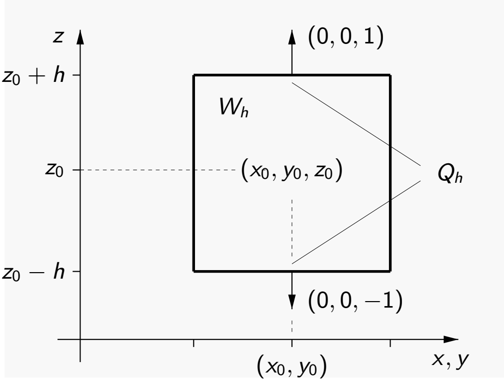
Zu einem speziellen Vektorpotential $\vec{w}$ berechnet man f also als Lösung der *Poisson-Gleichung*.

24.5 Divergenz als lokale Quellstärke

Im Gebiet $M \subseteq \mathbb{R}^3$ sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{v} : M \to \mathbb{R}^3$ gegeben. Um den Punkt $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ bilden wir kleine Würfel

$$W_h = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h] \times [z_0 - h, y_0 + h], \qquad h > 0,$$

die ganz in M liegen. Der Normalenvektor der Oberfläche ∂W_h zeige nach außen. Die lokale Quellstärke von $\vec{v}$ im Punkt $\vec{x}_0$ ist der Grenzwert



$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\mathrm{vol}_3(W_h)} \int_{\partial W_h} \vec{v} \cdot d\vec{o},$$

also der Fluss des Vektorfeldes $\vec{v}$ durch die Oberfläche bezogen auf das Volumen.

Wir berechnen zuerst den Fluss durch die Flächen parallel zur (x, y)-Ebene. Mit $Q_h = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h]$ ist dieser

$$\int_{Q_h} \left[\begin{pmatrix} v_1(x, y, z_0 + h) \\ v_2(x, y, z_0 + h) \\ v_3(x, y, z_0 + h) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1(x, y, z_0 - h) \\ v_2(x, y, z_0 - h) \\ v_3(x, y, z_0 - h) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] d(x, y)$$
$$= \int_{Q_h} (v_3(x, y, z_0 + h) - v_3(x, y, z_0 - h))\, d(x, y)$$
$$= \int_{Q_h} \left(\int_{z_0-h}^{z_0+h} \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z)\, dz \right) d(x, y) = \int_{W_h} \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z) d(x, y, z).$$

Addieren wir den Fluss durch die anderen Flächen des Würfels, erhalten wir

$$\int_{\partial W_h} \vec{v} \cdot d\vec{o} = \int_{W_h} \operatorname{div}\, \vec{v}(x, y, z)\, d(x, y, z). \qquad (*)$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung 18.7 ergibt die lokale Quellstärke

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}_3(W_h)} \int_{\partial W_h} \vec{v} \cdot d\vec{o} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}_3(W_h)} \int_{W_h} \operatorname{div}\, \vec{v}(\vec{x})\, d\vec{x} = \operatorname{div}\, \vec{v}(\vec{x}_0).$$

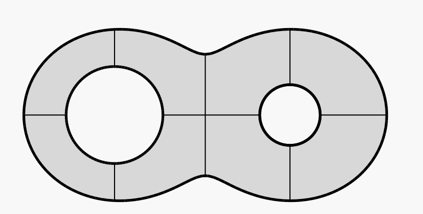
24.6 Definition: Normalgebiet

Die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ (mit $n = 2$ oder 3) sei ein beschränktes Gebiet (also offen und zusammenhängend). M heißt *Normalgebiet*,

(a) wenn es über jeder Koordinatenachse im $\mathbb{R}^2$ (bzw. Koordinaten-Ebene im $\mathbb{R}^3$) in endlich viele schlichte Gebiete $M_1, \ldots, M_N$ zerlegbar ist (siehe Definition 18.14) und

(b) jedes dieser Gebiete M_j einen Rand hat, der aus endlich vielen stückweise regulären Kurven (für $n = 2$, siehe 19.1) bzw. orientierten Flächenstücken (für $n = 3$, siehe 19.13) besteht.

Erinnerung: Ein Gebiet $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *schlicht* über der x-Achse, falls es stetige Funktionen $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt mit
$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b,\ \phi_1(x) < y < \phi_2(x)\}$.



Analog heißt $M \subseteq \mathbb{R}^3$ schlicht über der x-y-Ebene, wenn es ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ und stetige Funktionen $\phi_1, \phi_2 : G \to \mathbb{R}$ gibt mit
$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in G,$
$\phi_1(x, y) < z < \phi_2(x, y)\}$.

Die Identität $(*)$ in 24.5 besagt, dass das Volumenintegral über die lokale Quellstärke eines Vektorfeldes $\vec{v}$ gleich dem Fluss des Vektorfeldes durch den Rand des Gebietes ist. Genau dies ist der Integralsatz von Gauß.

24.7 Integralsatz von Gauß

(i) in der Ebene: $M \subseteq \mathbb{R}^2$ sei ein Normalgebiet (24.6), $\vec{n}$ sei der äußere Normalenvektor der Länge 1 von ∂M.
Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $\vec{v} : \overline{M} \to \mathbb{R}^2$

$$\int_{\partial M} \vec{v} \cdot \vec{n}\, ds = \int_M \operatorname{div} \vec{v}\; d(x, y).$$

(ii) im Raum: $M \subseteq \mathbb{R}^3$ sei ein Normalgebiet (24.6), $\vec{n}$ sei der äußere Normalenvektor der Länge 1 von ∂M.
Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $\vec{v} : \overline{M} \to \mathbb{R}^3$

$$\int_{\partial M} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = \int_M \operatorname{div} \vec{v}\; d(x, y, z).$$

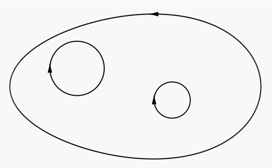
Das Oberflächenintegral lässt sich auch schreiben als Flussintegral $\int_{\partial M} \vec{v} \cdot d\vec{o}$

Anwendung:

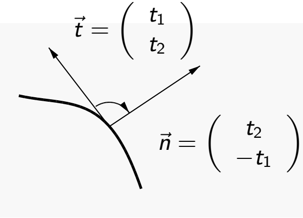
24.8 Flächeninhalt und Volumen

- Ein ebenes Normalgebiet $M \subseteq \mathbb{R}^2$ hat den Flächeninhalt
$$\mathrm{vol}_2(M) = \frac{1}{2} \int_{\partial M} (x, y)^\top \cdot \vec{n}\, ds,$$
wobei $\vec{n}$ der äußere Normalenvektor der Länge 1 von ∂M ist.
- Ein räumliches Normalgebiet $M \subseteq \mathbb{R}^3$ hat das Volumen
$$\mathrm{vol}_3(M) = \frac{1}{3} \int_{\partial M} (x, y, z)^\top \cdot \vec{n}\, dS,$$
wobei $\vec{n}$ der äußere Normalenvektor der Länge 1 von ∂M ist.

Für ebene Normalgebiete lässt sich der Satz von Gauß mit dem vektoriellen Kurvenintegral 19.5 umschreiben. Bei der Parameterdarstellung $\vec{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ von ∂M muss man darauf achten, dass das Gebiet M beim Durchlaufen des Randes links liegt.



Dann erhält man einen äußeren Normalenvektor $\vec{n}$ von ∂M durch Drehung des Einheits-Tangentenvektors $\vec{t}(s) = (\dot{c}_1(s), \dot{c}_2(s))$ um 90° im mathematisch negativen Sinn, also



$$\int_{\partial M} (v_1\, dx + v_2\, dy) = \int_{\partial M} \vec{v} \cdot \vec{t}\, ds = \int_{\partial M} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} ds$$

$$= \int_{\partial M} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix} ds = \int_{\partial M} \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\, ds$$

$$= \int_M \operatorname{div} \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} d(x, y) = \int_M \Big((v_2)_x - (v_1)_y \Big)\, d(x, y)$$

Aus dem Satz von Gauß erhält man so den *Satz von Green*

24.9 Satz von Green

$$\int_{\partial M} (P\,dx + Q\,dy) = \int_M (Q_x - P_y)\,d(x,y)$$

Für $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ ergibt sich die *Gauß'sche Flächenformel* oder *Sektorformel*

$$\mathrm{vol}_2(M) = \frac{1}{2}\int_{\partial M} (x\,dy - y\,dx).$$

Anwendung des Gaußschen Satzes auf $\vec{v} = g\,\nabla h$, also

$$\operatorname{div}\ \vec{v} \overset{24.2(iii)}{=} \nabla g \cdot \nabla h + g \operatorname{div}(\nabla h) \overset{24.2(ii)}{=} \nabla g \cdot \nabla h + g\,\Delta h$$

ergibt

$$\int_M \operatorname{div}\ \vec{v}\, d(x,y) = \int_M (\nabla g \cdot \nabla h + g\,\Delta h)\, d(x,y) = \int_{\partial M} g\,\nabla h \cdot \vec{n}\, dS.$$

Vertauschen von g und h ergibt

$$\int_M (\nabla g \cdot \nabla h + h\,\Delta g)\, d(x,y) = \int_{\partial M} h\,\nabla g \cdot \vec{n}\, dS.$$

Subtraktion beider Identitäten führt zu

$$\int_M (g\,\Delta h - h\,\Delta g)\, d(x,y) = \int_{\partial M} (g\,\nabla h - h\,\nabla g) \cdot \vec{n}\, dS.$$

Beachte: Die Skalarprodukte $\nabla g \cdot \vec{n}$ und $\nabla h \cdot \vec{n}$ sind die Richtungsableitungen von g (bzw. h) in Richtung des äußeren Normalenvektors von ∂M (siehe 16.11)

Wir haben damit folgenden Satz hergeleitet:

24.10 Greensche Integralformel

$M \subset \mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^3$) sei ein Normalgebiet, $g, h : \overline{M} \to \mathbb{R}$ seien zweimal stetig differenzierbar. Ist $\vec{n}$ der äußere Normalenvektor der Länge 1 von ∂M, so gilt im $\mathbb{R}^2$

$$\int_M (h\ \Delta g - g\ \Delta h)\, d(x,y) = \int_{\partial M} \left(h \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial h}{\partial \vec{n}} \right) ds$$

bzw. im $\mathbb{R}^3$

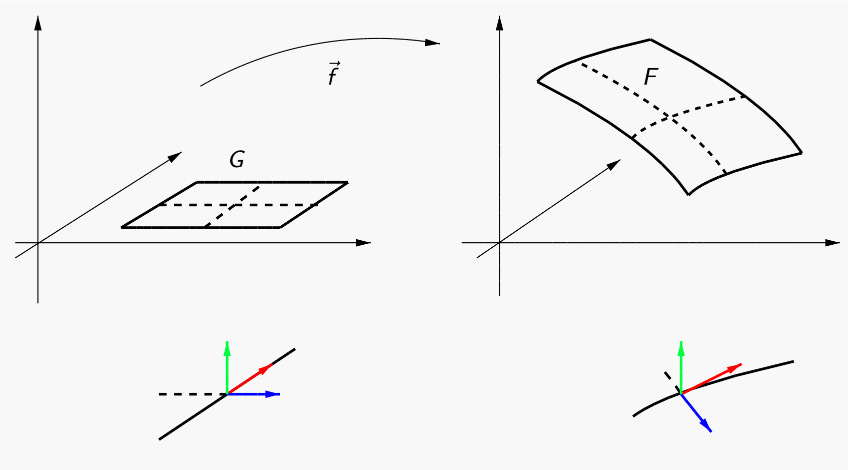
$$\int_M (h\ \Delta g - g\ \Delta h)\, d(x,y,z) = \int_{\partial M} \left(h \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial h}{\partial \vec{n}} \right) dS.$$

Wichtiger Spezialfall: $h \equiv 1$ ergibt in der Greenschen Formel

$$\int_M \Delta g\, d(x,y) = \int_{\partial M} \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds$$

bzw.

$$\int_M \Delta g\, d(x,y,z) = \int_{\partial M} \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, dS.$$



Bildet man das Gebiet G in den $\mathbb{R}^3$ ab, erhält man mit der Kettenregel aus dem Satz von Green des Satz von Stokes.
Andererseits ist der Satz von Green bzw. der ebene Satz von Gauß ein Spezialfall des Satzes von Stokes.

24.11 Vorbereitung zum Integralsatz von Stokes

Für einen Normalbereich $M \subset \mathbb{R}^3$ und jedes zweimal stetig differenzierbare Vektorfeld $\vec{v} : M \to \mathbb{R}^3$ gilt nach dem Gaußschen Satz

$$\int_{\partial M} \operatorname{rot} \ \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = \int_M \operatorname{div}\left(\operatorname{rot} \ \vec{v}\right) d\vec{x} \stackrel{24.2(ii)}{=} 0.$$

Das Oberflächenintegral der "Zirkulationsstärke" rot $\vec{v} \cdot \vec{n}$ des Vektorfeldes $\vec{v}$ in Richtung des Normalenvektors von ∂M ist also Null. Dies liegt i.w. daran, dass die Oberfläche geschlossen ist, also keine Randkurven besitzt.

Für Flächenstücke **mit Randkurven** lässt sich das Oberflächenintegral der Zirkulationsstärke in ein vektorielles Kurvenintegral überführen;

- Spezifikation des Flächenstücks F:
  $G \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Normalgebiet (ohne "Löcher"), $\vec{\phi} : \overline{G} \to \mathbb{R}^3$ sei zweimal stetig differenzierbar, $\vec{\phi}|_G$ sei injektiv und es gelte
  $$\vec{\phi}_u \times \vec{\phi}_v \neq \vec{0} \quad \text{in } G.$$
  Dann ist $F = \vec{\phi}(G) \subset \mathbb{R}^3$ ein orientiertes Flächenstück (siehe 19.13) und
  $$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{\phi}_u \times \vec{\phi}_v|} \, \vec{\phi}_u \times \vec{\phi}_v$$

- Spezifikation der Randkurven:
  ∂G werde so durchlaufen, dass die geschlossene Bildkurve $\vec{\phi}(\partial G)$ auf F mit dem Normalenfeld $\vec{n}$ die Bewegungsrichtung einer Rechtsschraube hat. (Achtung: $\vec{\phi}$ ist evtl. nicht injektiv auf ∂G, Zwei Kurven können zusammenfallen, eine Kurve kann zu einem Punkt zusammenschmelzen, siehe nachfolgendes Bsp.)

24.12 Integralsatz von Stokes

Das Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^3$ enthalte $\overline{F}$. Mit den obigen Spezifikationen gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $\vec{v} : U \to \mathbb{R}^3$

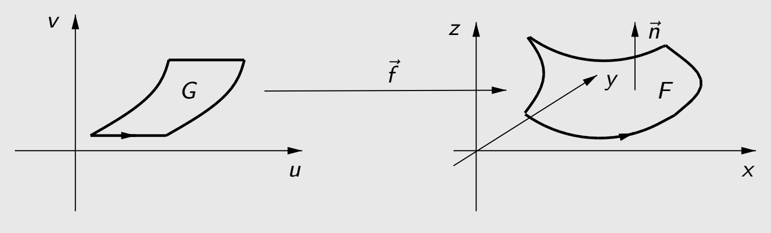
$$\int_F \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\vec{\phi}(\partial G)} \vec{v} \cdot d\vec{x}.$$

- Der Fluss des Vektorfeldes rot $\vec{v}$ durch die Fläche F stimmt also mit der "Zirkulation" von $\vec{v}$ längs dem "Rand von F" (genauer $\vec{\phi}(\partial G)$) überein.

- Zum Vorzeichen: Beim Oberflächenintegral im Satz von Stokes bestimmt das Normalenfeld von F das Vorzeichen.

  Beim vektoriellen Kurvenintegral bestimmt die Durchlauf-Richtung das Vorzeichen.

  Diese beiden Orientierungen passen zusammen, wenn die Durchlauf-Richtung der Kurve sich zum Normalenfeld wie die Rechtsdrehung einer Schraube verhält ("Rechte-Hand-Regel").



  Die durch die Reihenfolge u-v gegebene Orierntierung des Randes des Parametergebiets G induziert durch $\vec{\phi}$ eine Orientierung des Randes von F.

  Der Normalenvektor $\vec{n}$ passt dazu, wenn $\vec{n}$ die Richtung von $\vec{\phi}_u \times \vec{\phi}_v$ (in genau dieser Reihenfolge) hat.

Zusammenfassung der Integralsätze

- Exemplarisch wird alles im $\mathbb{R}^3$ betrachtet.
- Das Nachfolgende lässt sich in jeder Dimension interpretieren, es gibt eine einheitliche Theorie der *Differentialformen* und der *Integration auf Mannigfaltigkeiten*.

  Eine der vielen möglichen Definitionen von "Mannigfaltigkeit" ist:

  $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine d-dimensionale Untermannnigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $x_0 \in M$ eine Umgebung U und einen Diffeomorphismus $\Phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $\Phi(x_0) = 0$ und $\Phi(M \cap U) = (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap V$.

Wir betrachten Funktionen und Vektorfelder und die "passenden" Definitionbereiche:

$$
\begin{array}{ccccccc}
f & \xrightarrow{d} & \vec{v} = \text{grad } f & \xrightarrow{d} & \vec{w} = \text{rot } \vec{v} & \xrightarrow{d} & g = \text{div } \vec{w} \\
 & (A) & & (B) & & (C) & \\
\text{2 Punkte} & \xleftarrow{\partial} & \text{Kurve} & \xleftarrow{\partial} & \text{Fläche} & \xleftarrow{\partial} & \text{Volumen}
\end{array}
$$

(A) Hauptsatz
d ist die Gradientenabbildung $f \longrightarrow f'$, und ∂ ordnet jeder Kurve ihren *orientierten Rand* Endpunkt-Anfangspunkt zu.
Das Integral von f' über eine Kurve ist das "Integral" der Stammfunktion über den Rand, was man hier als vorzeichenbehaftete Auswertung interpretiert.

(B) Der Satz von Stokes
d ist die Rotation, und ∂ ordnet jeder Fläche ihre passend orientierte Randkurve zu. Das Integral der Rotation eines Vektorfelds über eine Fläche ist das Integral des Vektorfelds über die Randkurve.

(C) Der Satz von Gauß
d ist die Divergenz, und ∂ ordnet jedem beschränkten Volumen die orientierte Randfläche zu. Das Integral der Divergenz eines Vektorfelds über ein Volumen ist des Integral des Feldes über die Oberfläche (als Flußintegral).

All diese Fälle lassen sich zusammenfassen.

Allgemeiner Satz von Stokes

Ist M eine orientierbare berandete Mannigfaltigkeit (das ist der Oberbegriff für die von uns betrachteten Kurven Flächen und Volumina), so gilt

$$\int_{\partial M} v = \int_M dv.$$

Die Bedeutung der Symbole erschließt sich jeweils aus den oben aufgeführten Zusammenhängen.

Außerdem gilt stets $d \circ d = 0$ und $\partial \circ \partial = \emptyset$:

- rot grad $f = \vec{0}$ und div rot $\vec{v} = 0$
- Der Rand einer geschlossenen Kurve hat keine Randpunkte, und die Randfläche eines Volumens hat keine Randkurve.

Auf sternförmigen Gebieten gilt umgekehrt: $dw = 0 \Longrightarrow$ es gibt v mit $w = dv$. Das sind die *Integrabilitätsbedingungen*: Ist rot $\vec{v} = \vec{0}$, so hat $\vec{v}$ ein Potential, ist div $\vec{w} = 0$, so gibt es ein Vektorpotential.

Umgekehrt lässt sich das benutzen, um Mengen zu klassifizieren: hat das Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ ein punktförmiges "Loch", so gibt es ein Vektorfeld mit Divergenz Null, das kein Vektorpotential besitzt, z.B. $\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)^\top$.

In diesem Fall gibt es dann auch eine geschlossene (=ohne Randkurve) Fläche, die kein Volumen berandet, nämlich Oberfläche der Einheitkugel - der Nullpunkt fehlt dem Volumen ja.

Fehlt dem Gebiet G eine Gerade (z.B. $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid z = 0\}$), so gibt es ein Vektorfeld mit Rotation Null, das kein Potential besitzt, z.B. $\left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}, 0\right)^\top$.
Dann gibt es auch eine geschlossene Kurve, die nicht Randkurve einer Fläche ist, z.B. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$. Die fehlende z-Achse verhindert, dass man in den Kreis eine Fläche einspannen kann.

Diese Phänomene werden mit der *de Rham-Kohomologie* genauer untersucht - ein wunderschönes Stück Mathematik, das wir hier nicht behandeln können.