

## 25: Funktionentheorie

In den folgenden Kapiteln betrachten wir Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $M \subseteq \mathbb{C}$ . Wir nennen solche Funktionen *komplexe Funktionen*.

### 25.1 Grundbegriffe

- Die komplexe Zahl  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  wird durch ihren Realteil  $x \in \mathbb{R}$  und ihren Imaginärteil  $y \in \mathbb{R}$  definiert.

Manchmal betrachten wir Teilmengen von  $\mathbb{C}$  auch als Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$ :

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Alternativ wird die Darstellung in Polarkoordinaten verwendet:

$$z = x + iy = |z|(\cos \phi + i \sin \phi) = |z|e^{i\phi} \quad (\text{für } z \neq 0), \text{ mit}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arg(z) = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{falls } y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{falls } y < 0, \end{cases}$$

den *Betrag* und das *Argument* von  $z$  bezeichnen.

( $\arg(z) \in [0, 2\pi)$  ist der Winkel, den der Vektor vom Nullpunkt zum Punkt  $(x, y)$  mit der positiven  $x$ -Achse bildet.)

- Zu  $z = x + iy$  (mit  $x, y \in \mathbb{R}$ ) ist

$$\bar{z} = x - iy = |z|(\cos \phi - i \sin \phi) = |z|e^{-i\phi}$$

die komplex konjugierte Zahl. Es gilt  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ .

- Die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $z_0$  und Radius  $R > 0$  ist

$$K_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}.$$

- Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{C}$  ist *offen*, wenn zu jedem Punkt  $z \in M$  eine offene Kreisscheibe um  $z$  existiert, die Teilmenge von  $M$  ist.
- Eine offene Menge  $M \subseteq \mathbb{C}$  ist *zusammenhängend*, wenn sie NICHT die Vereinigung von zwei nichtleeren und disjunkten offenen Teilmengen ist. Eine offene und zusammenhängende Menge nennen wir *Gebiet*. (Gebiete übernehmen die Rolle der Intervalle in  $\mathbb{R}$ .)

## 25.2 Kurven, einfach zusammenhängende Mengen

- Eine Kurve in  $\mathbb{C}$  ist eine stetige Abbildung  $\vec{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  (wie in Def. 19.1). Die Kurve  $\vec{c}$  heißt
  - *geschlossen*, wenn  $\vec{c}(a) = \vec{c}(b)$  gilt,
  - *doppelpunktfrei*, wenn  $\vec{c}(t_1) \neq \vec{c}(t_2)$  für alle  $a < t_1 < t_2 < b$  gilt, also die Injektivität auf dem offenen Intervall  $(a, b)$  vorliegt,
  - *regulär*, wenn  $\vec{c}$  stetig differenzierbar ist und

$$\frac{d}{dt} \vec{c}(t) = \dot{\vec{c}}(t) \neq \vec{0} \quad \text{für alle } t \in [a, b] \text{ gilt,}$$

- *stückweise regulär*, wenn  $\vec{c}$  die Aneinanderreihung endlich vieler regulärer Kurven ist (siehe 19.1).
- Das *Innere* einer geschlossenen doppelpunktfreien und stückweise regulären Kurve ist das beschränkte Gebiet  $M$ , dessen Rand die Kurve ist.
- Ein Gebiet  $M \subseteq \mathbb{C}$  heißt *einfach zusammenhängend*, wenn das Innere jeder geschlossenen doppelpunktfreien und stückweise regulären Kurve eine Teilmenge von  $M$  ist.

Anschaulich:  $M$  hat keine Löcher.

### 25.3 Grenzwerte in $\mathbb{C}$

Wir bilden Grenzwerte wie im  $\mathbb{R}^2$ : Eine Folge  $(z_n)_{n \rightarrow \infty}$  konvergiert gegen  $c = a + ib \in \mathbb{C}$  genau dann, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - c| = 0$  gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n = b$$

gilt.

### 25.4 Real- und Imaginärteil komplexer Funktionen

Die Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  (mit  $M \subseteq \mathbb{C}$ ) kann mit ihrem Real- und Imaginärteil geschrieben werden:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

wobei  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  der *Realteil* und  $v : M \rightarrow \mathbb{R}$  der *Imaginärteil* von  $f$  ist.

Beachte: Wir schreiben das Argument von  $u$  und  $v$  als Koordinaten-Paar  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  anstatt  $x + iy$ .

Eigenschaften von  $f$  lassen sich durch Eigenschaften von  $u$  und  $v$  ausdrücken.

## 25.5 Definition und Satz: Stetigkeit

(i) Eine komplexe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  heißt stetig im Punkt  $z_0 \in M$ , wenn

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

gilt. Wir sagen  $f$  ist stetig, wenn  $f$  in jedem  $z_0 \in M$  stetig ist.

(ii)  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann stetig (im Punkt  $z_0$ ), wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil (im Punkt  $z_0$ ) stetig sind.

## Beispiele:

(a)  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^2$  ist stetig. **Jedes Polynom** mit reellen oder komplexen Koeffizienten ist stetig.

(b)  $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g(z) = \frac{1}{z}$  ist stetig. **Jede rationale Funktion**

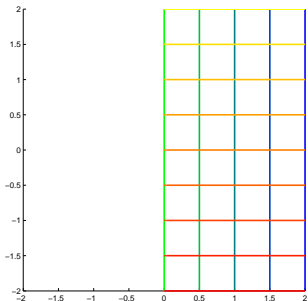
$$h : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_r\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

mit Polynomen  $P$  und  $Q$  ist stetig. Hierbei bezeichnen  $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$  sämtliche Nullstellen des Polynoms  $Q$ .

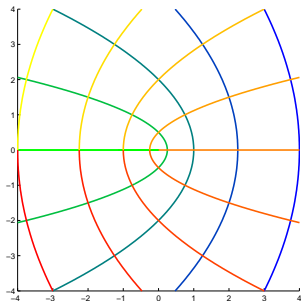
(c)  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $h(z) = e^z$  ist stetig.

## 25.6 Darstellung komplexer Funktionen

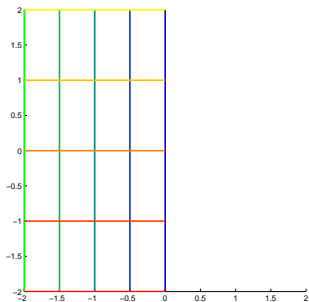
- Zeichne die Graphen von  $u = \operatorname{Re} f$  und  $v = \operatorname{Im} f$  getrennt.
- Häufige Alternative: zeichne zu mehreren Kurven  $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m$  im Definitionsbereich  $M$  die Bildkurven  $f \circ \vec{c}_1, \dots, f \circ \vec{c}_m$ .



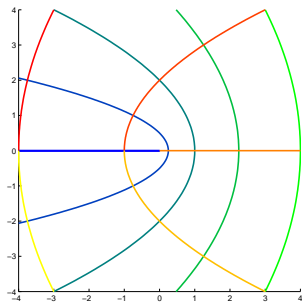
$z$  mit  $\operatorname{Re} z \geq 0$



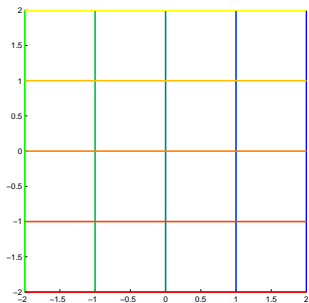
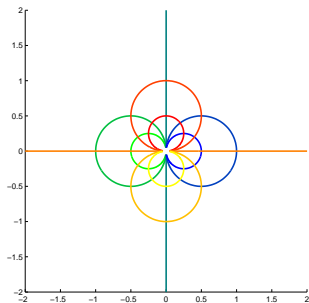
$f(z) = z^2$



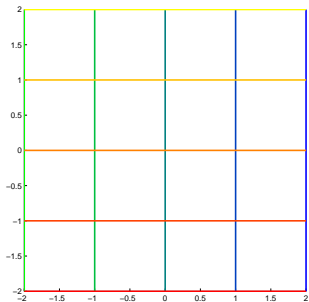
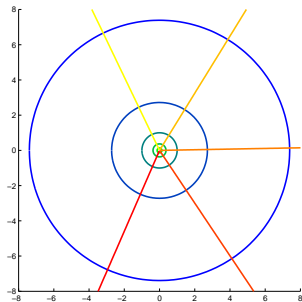
$z$  mit  $\operatorname{Re} z \leq 0$



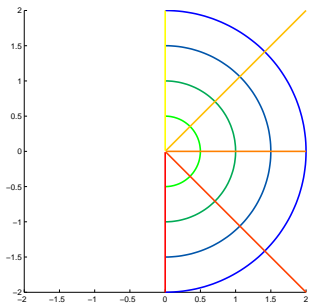
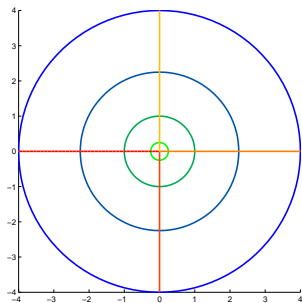
$f(z) = z^2$

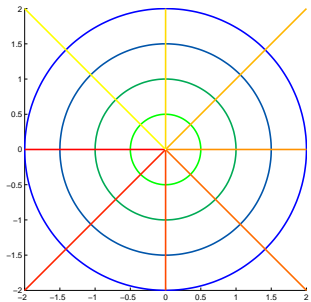
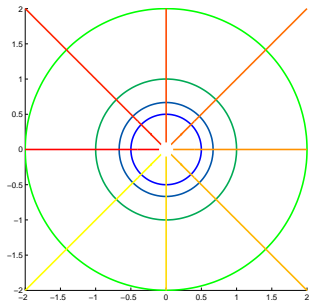
 $z$ 

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

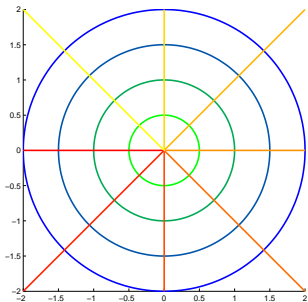
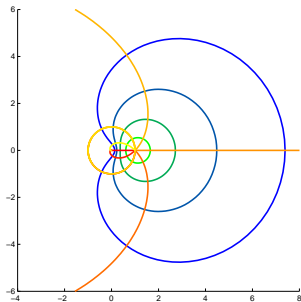
 $z$  $f(z) = e^z$

Bilder in "Polarkoordinaten", also den Geraden durch den Nullpunkt und Kreisen um den Nullpunkt:


 $z$ 

 $f(z) = z^2$

 $z$ 

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

 $z$  $f(z) = e^z$

Bei Betrachtung der Beispiele stellt man fest:

Schneiden sich die Kurven  $\vec{c}_1$  und  $\vec{c}_2$  des Definitionsbereichs rechtwinklig im Punkt  $z_0$ , so schneiden sich die Bildkurven  $f \circ \vec{c}_1$  und  $f \circ \vec{c}_2$  im Punkt  $f(z_0)$  ebenfalls rechtwinklig.

Diese Eigenschaft gilt sogar für andere Schnittwinkel  $\alpha \neq \pi/2$ . Wir werden später hierzu die Definition der *konformen Abbildung* angeben.

**Frage:** Woran erkennt man diese geometrische Eigenschaft?

## 25.7 Untersuchung der Winkel sich schneidender Kurven $f \circ \vec{c}_1$ und $f \circ \vec{c}_2$

- Der Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  sei der gemeinsame Ausgangspunkt von zwei Strecken im Gebiet  $M$

$$\vec{c}_1(s) = z_0 + sv_1, \quad \vec{c}_2(t) = z_0 + tv_2 \quad \text{mit } s, t \in [0, R),$$

wobei  $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$  mit  $|v_1| = |v_2| = 1$  die Richtung der Strecken angeben. Der "orientierte Winkel"  $\alpha$  zwischen  $\vec{c}_1$  und  $\vec{c}_2$  ist

$$\alpha = \angle(\vec{c}_1, \vec{c}_2) = \arg(v_2) - \arg(v_1) = \arg\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = \arg\left(\frac{tv_2}{sv_1}\right),$$

wobei im letzten Term  $s, t \in (0, R)$  beliebig gewählt werden können.

- Jetzt wird eine stetige komplexe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  angewandt. Die Bildkurven sind

$$(f \circ \vec{c}_1)(s) = f(z_0 + sv_1), \quad (f \circ \vec{c}_2)(t) = f(z_0 + tv_2) \quad \text{mit } s, t \in [0, R).$$

Diese Kurven schneiden sich in  $f(z_0)$  mit dem Winkel

$$\beta = \angle(f \circ \vec{c}_1, f \circ \vec{c}_2) = \lim_{s, t \rightarrow 0} \arg\left(\frac{f(z_0 + tv_2) - f(z_0)}{f(z_0 + sv_1) - f(z_0)}\right),$$

also dem Grenzwert des orientierten Winkels der Strecken von  $f(z_0)$  nach  $f(z_0 + sv_1)$  bzw.  $f(z_0 + tv_2)$  (falls der Grenzwert existiert).

- Beide Winkel sind genau dann gleich, wenn

$$\begin{aligned} 0 = \beta - \alpha &= \lim_{s,t \rightarrow 0} \arg \left[ \left( \frac{f(z_0 + tv_2) - f(z_0)}{f(z_0 + sv_1) - f(z_0)} \right) / \left( \frac{tv_2}{sv_1} \right) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \arg \left( \frac{f(z_0 + tv_2) - f(z_0)}{tv_2} \right) - \lim_{s \rightarrow 0} \arg \left( \frac{f(z_0 + sv_1) - f(z_0)}{sv_1} \right). \end{aligned}$$

gilt. Hier stehen zwei **komplexe** Differenzenquotienten. Falls beide denselben Grenzwert

$$0 \neq c = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + tv_2) - f(z_0)}{tv_2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + sv_1) - f(z_0)}{sv_1}$$

haben, ergibt sich tatsächlich die Eigenschaft  $\alpha = \beta$ , d.h. Strecken in  $M$  und ihre Bildkurven schneiden sich mit gleichem orientierten Winkel!

- Dies veranlasst uns, eine neue Form der *Differenzierbarkeit* für komplexe Funktionen einzuführen. Obwohl die Definition gleich aussieht wie für reelle Funktionen, haben wir soeben eine starke geometrische Eigenschaft beschrieben, die aus der neuen Differenzierbarkeit folgt.

## 25.8 Definition: Komplexe Differenzierbarkeit

$M \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Gebiet und  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sowie  $z_0 \in M$  seien gegeben.  $f$  heißt *komplex differenzierbar* in  $z_0$ , wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. Die komplexe Zahl  $f'(z_0)$  heißt die Ableitung von  $f$  in  $z_0$ .

Falls  $f$  in jedem Punkt von  $M$  komplex differenzierbar ist, so heißt  $f$  *holomorph* in  $M$ .

**Bemerkung:** Die Holomorphie (=komplexe Differenzierbarkeit im Gebiet  $M$ ) ist eine sehr starke Eigenschaft: Im nächsten Abschnitt zeigen wir, dass hieraus die Eigenschaft folgt, dass  $f$  um jeden Punkt  $z_0$  in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Hieraus folgt dann:

Falls  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist, so ist  $f$  unendlich oft komplex differenzierbar!

Noch einmal:

Obwohl die Definition so aussieht wie im Reellen, liegt eine viel stärkere Eigenschaft dadurch vor, dass der Grenzwert des **komplexen** Differenzenquotienten existiert.

Wir benötigen keine neuen Rechenregeln!

### 25.9 Rechenregeln für die komplexe Ableitung

Für die komplexe Ableitung gelten die gleichen Rechenregeln wie im Reellen: die Summe, die Differenz, das Produkt, der Quotient und die Verkettung von komplex differenzierbaren Funktionen ist wieder komplex differenzierbar, und die Ableitung wird mit den Regeln für Summen, Differenzen bzw. mit der Produkt-, Quotienten- und Kettenregel berechnet.

Wir kommen auf die geometrische Betrachtung zurück:

### 25.10 Definition: Konforme Abbildung

- Der *orientierte Winkel*  $\alpha = \angle(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$  zwischen zwei regulären Kurven  $\vec{c}_1, \vec{c}_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit gleichem Anfangspunkt  $z_0$  wird definiert als

$$\alpha = \arg \dot{\vec{c}}_2(0) - \arg \dot{\vec{c}}_1(0).$$

- Eine komplexe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem Gebiet  $M$  heißt *konform*, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:
  - (a) Für jede reguläre Kurve  $\vec{c} : [a, b] \rightarrow M$  ist auch die Bildkurve  $f \circ \vec{c}$  regulär.
  - (b) Schneiden sich zwei reguläre Kurven  $\vec{c}_1$  und  $\vec{c}_2$  im Punkt  $z_0 \in M$  mit dem orientierten Winkel  $\alpha$ , so schneiden sich die Bildkurven  $f \circ \vec{c}_1$  und  $f \circ \vec{c}_2$  im Punkt  $f(z_0)$  ebenfalls mit dem orientierten Winkel  $\alpha$ , d.h.  $f$  ist *winkeltreu*.

### 25.11 Holomorphe und konforme Funktionen:

Jede holomorphe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ , die zusätzlich  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in M$  erfüllt, ist konform.

- Der Beweis wurde im Wesentlichen schon oben erbracht.
- Man betrachte die Bilder zu  $f(z) = z^2$  nochmals.
  - $f$  ist in  $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  konform, denn  $f$  ist holomorph in  $M$  und  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in M$ .
  - Die Kurven in  $\mathbb{C}$ , die durch den Nullpunkt  $z_0 = 0$  laufen, haben keine regulären Bildkurven. Also ist  $f$  nicht in ganz  $\mathbb{C}$  konform.

In diesem Zusammenhang sei der folgende Hauptsatz der Funktionentheorie erwähnt.

### 25.12 Riemannscher Abbildungssatz

$M \subset \mathbb{C}$  sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und es sei  $M \neq \mathbb{C}$ . Dann existiert eine **bijektive konforme holomorphe** Abbildung von  $M$  auf die Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

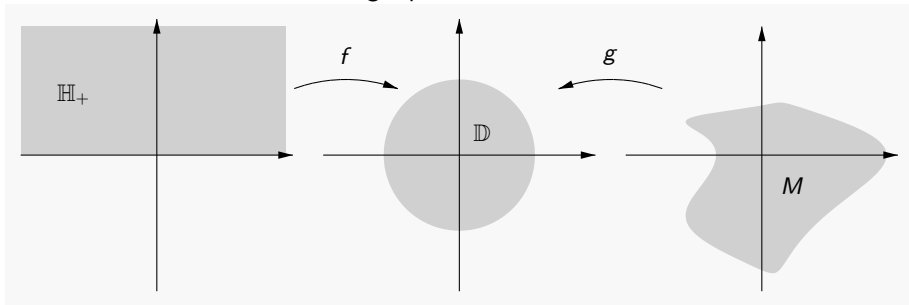
Der Beweis gibt keine konkrete Abbildung an, sondern zeigt nur die Existenz.

## Beispiel Die obere Halbebene

$$\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Die Funktion  $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$  bildet  $\mathbb{H}_+$  bijektiv, holomorph und konform auf den Einheitskreis  $\mathbb{D}$  ab.

Der Beweis dieser Tatsache erfolgt später.



### 25.13 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Auf dem Gebiet  $M \subseteq \mathbb{C}$  sei die komplexe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

mit  $u = \operatorname{Re} f$  und  $v = \operatorname{Im} f$  definiert. Dann sind äquivalent:

- (i)  $f$  ist holomorph in  $M$ .
- (ii)  $u$  und  $v$  sind in  $M$  stetig partiell differenzierbar, und die partiellen Ableitungen erfüllen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned}u_x(x_0, y_0) &= a, & v_x(x_0, y_0) &= b, \\u_y(x_0, y_0) &= -b, & v_y(x_0, y_0) &= a,\end{aligned}$$

in Kurzform

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

In diesem Fall ist die komplexe Ableitung

$$f'(z) = f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y).$$

## Ergänzung

Betrachtet man eine in  $z_0 = x_0 + iy_0$  komplex differenzierbare Funktion  $f$  mit  $f'(z_0) \neq 0$

als  $\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ , so hat die Ableitungsmatrix die Form

$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ , ist also das Vielfache einer orthogonalen Matrix. Daraus folgt noch einmal die Winkeltreue.

### 25.14 Ergänzung zur komplexen Differenzierbarkeit in einem Punkt

Die komplexe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  mit Realteil  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  und Imaginärteil  $v : M \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann im Punkt  $z_0 = x_0 + iy_0 \in M$  komplex differenzierbar, wenn  $u$  und  $v$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  total differenzierbar sind und dort die Cauchy-Riemann Dgl. gelten.

### 25.15 Folgerung:

$M \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Gebiet und die komplexe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph in  $M$ .

- (i) Falls  $f'(z) = 0$  für alle  $z \in M$  gilt, so ist  $f$  konstant.
- (ii) Falls  $|f|$  eine konstante Funktion ist, so ist auch  $f$  konstant.

Eine viel weitreichendere Folgerung der CR-Dgl'en:

### 25.16 Zusammenhang holomorpher Funktionen und harmonischer Funktionen

Sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil einer holomorphen Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sind *harmonisch*, d.h. für  $f = u + iv$  gilt

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{in } M.$$

**Ziel:** Konstruktion einer holomorphen Funktion  $f(z) = f(x + iy)$ , wenn z.B. nur der Realteil  $u(x, y)$  vorgegeben ist.

### 25.17 Definition: konjugiert harmonische Funktionen

$M$  sei ein Gebiet im  $\mathbb{R}^2$  (oder in  $\mathbb{C}$ ). Zwei harmonische Funktionen  $u, v : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißen *zueinander konjugiert harmonisch*, wenn sie die CR-Dgl'en erfüllen.

In diesem Fall ist die komplexe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

holomorph in  $M$ .

## 25.18 Satz: Konstruktion einer konjugiert harmonischen Funktion

$M \subseteq \mathbb{R}^2$  sei ein **einfach-zusammenhängendes Gebiet** und  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  sei harmonisch. Weiter sei  $z_0 = x_0 + iy_0 \in M$ .

Dann gibt es zu jedem Anfangswert  $A \in \mathbb{R}$  genau eine harmonische Funktion  $v : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v(x_0, y_0) = A$  und so, dass  $u$  und  $v$  zueinander konjugiert harmonisch sind.

Für jede stückweise reguläre Kurve  $\vec{c} : [0, b] \rightarrow M$  mit dem Anfangspunkt  $\vec{c}(0) = (x_0, y_0)$  gilt

$$v(\vec{c}(b)) = A + \int_C (-u_y dx + u_x dy).$$

**Bemerkung:**

- Man beachte, dass das vektorielle Kurvenintegral in diesem Satz wegunabhängig ist. Dies erkennt man daran, dass das Vektorfeld  $(-u_y, u_x)$  die Integrabilitätsbedingung erfüllt:

$$(-u_y)_y = (u_x)_x, \quad \text{denn } u \text{ ist harmonisch.}$$

- Der Satz besagt: Zu einer harmonischen Funktion  $u$  auf einem einfach-zusammenhängenden Gebiet  $M \subseteq \mathbb{C}$  lässt sich immer eine harmonische Funktion  $v$  konstruieren, so dass  $f = u + iv$  holomorph auf  $M$  ist.

Eine einfache Folgerung aus Satz 25.18:

### 25.19 Folgerung

$M, N \subseteq \mathbb{C}$  seien einfach-zusammenhängende Gebiete. Falls  $f : M \rightarrow N$  holomorph ist und  $r : N \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch ist, so ist auch  $h = r \circ f$  harmonisch.

Mit Hilfe dieser Tatsache und des Riemannsches Abbildungssatzes kann man das Dirichlet-Problem der Potentialgleichung auf das Standardgebiet "Einheitskreis" transportieren, dort lösen und die Lösung auf das ursprüngliche Gebiet zurückübersetzen.

## 26: Beispiele holomorpher Funktionen

Viele der “elementaren” Funktionen aus der reellen Analysis lassen sich auf  $\mathbb{C}$  erweitern.

### 26.1 Polynome, rationale Funktionen

- Jedes Polynom

$$P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n,$$

mit Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  ist holomorph in ganz  $\mathbb{C}$ .

- Jede rationale Funktion

$$R : \mathbb{C} \setminus N_Q \rightarrow \mathbb{C}, \quad R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei  $P$  und  $Q$  Polynome sind und die Menge  $N_Q := \{z_1, \dots, z_m\} \subset \mathbb{C}$  die Menge aller Nullstellen von  $Q$  ist, ist holomorph in ganz  $\mathbb{C} \setminus N$ .

**Bemerkung:**

- Bis auf einen konstanten Vorfaktor, sind Polynome bereits durch ihre Nullstellen (und deren Vielfachheit) festgelegt:

$$P(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k),$$

falls  $P$  ein Polynom vom Grad  $n$  mit dem Höchstkoeffizienten  $a_n \neq 0$  ist.

- Rationale Funktionen  $R = \frac{P}{Q}$  treten als sog. "Filter" in der Signalverarbeitung auf. Zur Darstellung zeichnet man häufig ein Diagramm, das nur die Nullstellen  $N_R$  und die Polstellen  $N_Q$  enthält.

## 26.2 Exponentialfunktion Die Exponentialfunktion

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

ist holomorph in ganz  $\mathbb{C}$ , und es gilt

$$f'(z) = e^z \quad \text{und} \quad e^{z+w} = e^z e^w, \quad w, z \in \mathbb{C}.$$

Die angegebene Potenzreihe konvergiert für jedes  $z \in \mathbb{C}$ . Sie konvergiert sogar gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen  $M \subset \mathbb{C}$ .

- Real- und Imaginärteil von  $e^z$  (mit  $z = x + iy$ ) erhält man aus

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

Insbesondere gilt

$$|e^z| = e^x \quad \text{für} \quad z = x + iy.$$

- Die Exponentialfunktion auf  $\mathbb{C}$  ist nicht injektiv. Vielmehr ist sie  $2\pi$ -periodisch in  $y$ -Richtung:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Um die Umkehrfunktion  $\ln z$  zu definieren, muss man die Exponentialfunktion auf einen Streifen parallel zur  $x$ -Achse einschränken, z.B.

$$S = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{C}.$$

## 26.3 Hyperbelfunktionen Die Hyperbel-Funktionen

$$\cosh : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sinh : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

sind holomorph in ganz  $\mathbb{C}$ , ihre Potenzreihen konvergieren für jedes  $z \in \mathbb{C}$ . Es gilt

$$(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z.$$

- Real- und Imaginärteil der Funktionen lassen sich leicht berechnen:

$$\cosh(x + iy) = \frac{1}{2}(e^x(\cos y + i \sin y) + e^{-x}(\cos y - i \sin y)) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y,$$

$$\sinh(x + iy) = \frac{1}{2}(e^x(\cos y + i \sin y) - e^{-x}(\cos y - i \sin y)) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y.$$

Hieran erkennt man

$$\cosh\left(z + i\frac{\pi}{2}\right) = i \sinh z$$

und

$$|\cosh z| \leq \cosh x, \quad |\sinh z| \leq \cosh x \quad \text{für } z = x + iy.$$

- Beide Hyperbelfunktionen sind  $2\pi$ -periodisch in  $y$ -Richtung:

$$\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z, \quad \sinh(z + 2\pi i) = \sinh z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

## 26.4 Cosinus- und Sinusfunktion Die komplexe Cosinus- und Sinusfunktion

$$\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

sind holomorph in ganz  $\mathbb{C}$ , ihre Potenzreihen konvergieren für jedes  $z \in \mathbb{C}$ .

Es gilt

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z.$$

Wie im Reellen ist

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

- Real- und Imaginärteil der Funktionen lassen sich ebenso berechnen:

$$\cos(x + iy) = \frac{1}{2}(e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$

$$\sin(x + iy) = \frac{1}{2i}(e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Hieran erkennt man, dass die aus dem Reellen bekannten Beziehungen

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z \quad \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$$

auch im Komplexen gültig ist. Weiterhin gilt

$$|\cos z| \leq \cosh y, \quad |\sin z| \leq \cosh y \quad \text{für } z = x + iy.$$

Insbesondere sind  $\cos z$  und  $\sin z$  im Komplexen NICHT beschränkt.

- Der komplexe Cosinus und Sinus ist  $2\pi$ -periodisch in  $x$ -Richtung:

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

## 26.5 Wurzelfunktion

- Wir betrachten zunächst die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = z^2$ .  
Für  $0 \leq \alpha \leq \pi$  betrachten wir die *Halbebene*

$$H_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, \alpha < \arg z < \alpha + \pi\}.$$

Die Einschränkung

$$f|_{H_\alpha} : H_\alpha \rightarrow \{w \in \mathbb{C} \mid w \neq 0, \arg w \neq 2\alpha\}$$

ist bijektiv. Die Bildmenge ist ganz  $\mathbb{C}$  ohne einen Strahl  $\Gamma_\beta$  ausgehend vom Nullpunkt in Richtung  $\arg z = \beta$  mit  $\beta = 2\alpha$ ; diesen Strahl nennt man einen *Verzweigungsschnitt*.

- Zu jedem Schnitt  $\Gamma_\beta$  kann die Umkehrfunktion gebildet werden:

$$g_1 : \mathbb{C} \setminus \Gamma_\beta \rightarrow H_\alpha, \quad g_1(z) = \sqrt{z}.$$

$g_1$  ist holomorph und definiert einen *Zweig* der komplexen Wurzelfunktion zum Schnitt  $\Gamma_\beta$ : Mit Polarkoordinaten für  $z = |z|e^{i\phi}$  und  $\phi = \arg z \in (\beta, \beta + 2\pi)$  gilt

$$g_1(z) = \sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\phi/2} \in H_\alpha, \quad \alpha = \beta/2.$$

- Ein zweiter Zweig der Wurzelfunktion zum Schnitt  $\Gamma_\beta$  ist die holomorphe Funktion

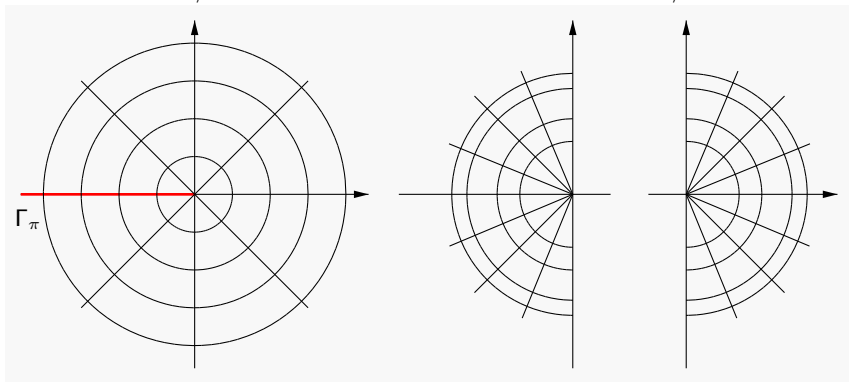
$$g_2(z) = \sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i(\phi/2+\pi)} \in H_{\alpha+\pi}.$$

- Für jeden Schnitt  $\Gamma_\beta$  gibt es zwei Zweige  $g_1$  und  $g_2$  der Wurzelfunktion. Für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_\beta$  gilt (wie im Reellen)

$$g_1'(z) = \frac{1}{2g_1(z)}, \quad g_2'(z) = \frac{1}{2g_2(z)}.$$

Hierbei darf man nicht von dem Zweig  $g_1$  auf den anderen Zweig  $g_2$  “springen”.

**Skizzen:** Links ist der Definitionsbereich  $\mathbb{C} \setminus \Gamma_\pi$ , in der Mitte steht der Zweig  $g_1 : \mathbb{C} \setminus \Gamma_\pi \rightarrow H_{\pi/2}$  und rechts der Zweig  $g_2 : \mathbb{C} \setminus \Gamma_\pi \rightarrow H_{-\pi/2}$  der Wurzelfunktion.



**26.6 Bemerkung** Ebenso lassen sich zum Schnitt  $\Gamma_\beta$  jeweils  $n$  Zweige der  $n$ -ten Wurzelfunktion bestimmen: mit  $z = |z|e^{i\phi}$  und  $\phi = \arg z \in (\beta, \beta + 2\pi)$  ist

$$g_k : \mathbb{C} \setminus \Gamma_\beta \rightarrow \{w \in \mathbb{C} \mid w \neq 0, (\beta + 2k\pi)/n < \arg w < (\beta + 2(k+1)\pi)/n\},$$

$$g_k(z) = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\phi+2k\pi)/n},$$

der  $k$ -te Zweig von  $\sqrt[n]{z}$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ . Die Bildmenge ist jeweils ein Kegel mit Spitze in 0 und Öffnungswinkel  $2\pi/n$ .

Die Funktionen  $g_k$  sind holomorph und es gilt (wie im Reellen)

$$g'_k(z) = \frac{1}{n(g_k(z))^{n-1}}.$$

Hierbei darf man nicht auf einen anderen Zweig der  $n$ -ten Wurzel "springen".

## 26.7 Logarithmusfunktion

- Wir betrachten zunächst die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = e^z$ .  
Für  $c \in \mathbb{R}$  definieren wir den *Streifen*

$$S_c = \{z \in \mathbb{C} \mid c < \operatorname{Im} z < c + 2\pi\},$$

also eine "Periode" der komplexen Exponentialfunktion. Die Einschränkung

$$f|_{S_c} : S_c \rightarrow \{w \in \mathbb{C} \mid w \neq 0, \operatorname{arg} w \neq c\}$$

ist **bijektiv**. Die Bildmenge besitzt den Verzweigungsschnitt  $\Gamma_c$ , siehe 26.5.

- Insbesondere wählen wir den Schnitt  $\Gamma_\pi$ . Die Umkehrfunktion wird mit "log z" bezeichnet:

$$\log : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + 0i, x \leq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

log ist holomorph und definiert einen "Zweig" der komplexen Logarithmusfunktion zum Schnitt  $\Gamma_\pi$ : Mit Polarkoordinaten für  $z = |z|e^{i\phi}$  und  $\phi = \operatorname{arg} z \in (-\pi, \pi)$  gilt

$$\log_0(z) := \log z = \ln |z| + i\phi.$$

- Weitere Zweige der Logarithmusfunktion zum gleichen Schnitt  $\Gamma_\pi$  sind

$$\log_k(z) = \ln |z| + i(\phi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Es gilt (wie im Reellen)

$$\log'_k(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_\pi.$$

- **Bemerkung:** Mit dem gleichen Verzweigungsschnitt bei  $\arg z = \pi$  für alle beteiligten Funktionen **und bei passender Wahl der Zweige** gelten die Formeln

$$\sqrt{z} = e^{(\log z)/2} = z^{1/2}, \quad \sqrt[n]{z} = e^{(\log z)/n} = z^{1/n}.$$

- Es ist stets  $\exp(\log z) = z$  und  $\log \exp(z) = z + 2k\pi i$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .

In Verallgemeinerung der für reelle positive Basen gültigen Formel  $a^b = e^{b \ln a}$  definiert man

### 26.8 Allgemeine Potenz

Seien  $z, w \in \mathbb{C}$  mit  $z \neq 0$ .

Dann ist  $z^w = \exp(w \log z) = \exp(w(\ln |z| + i \arg z + 2k\pi i))$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .

- Für  $w \in \mathbb{Z}$  hat die allgemeine Potenz nur einen Wert.
- Die Schreibweise ist mit  $\sqrt{z} = z^{1/2}$  kompatibel.

Wir behandeln nun spezielle rationale Funktionen, deren Zähler und Nenner jeweils ein Polynom vom Grad 0 oder 1 ist.

### 26.9 Definition: Möbius-Transformation

Eine rationale Funktion

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

heißt *Möbius-Transformation*.

## 26.10 Eigenschaften der Möbiustransformation

Die Möbius-Transformation  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  (mit  $ad - bc \neq 0$ ) ist holomorph und konform im Definitionsbereich  $M_f$ , wobei

- $M_f = \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ , falls  $c \neq 0$  gilt,
- $M_f = \mathbb{C}$ , falls  $c = 0$  (und  $d \neq 0$ ) ist.

Die Ableitung ist

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0 \quad \text{für alle } z \in M_f.$$

Der Bildbereich ist

- $N_f = \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ , falls  $c \neq 0$  gilt,
- $N_f = \mathbb{C}$ , falls  $c = 0$  (und  $d \neq 0$ ) ist.

Es gilt weiterhin:

(i) Die bijektive Funktion  $f : M_f \rightarrow N_f$  besitzt die Umkehrfunktion

$$g = f^{-1} : N_f \rightarrow M_f, \quad g(z) = \frac{dz - b}{-cz + a},$$

ist also selbst wieder eine Möbius-Transformation.

(ii) Die Komposition  $f \circ g$  von Möbius-Transformationen  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  und  $g(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$  lautet

$$f \circ g : M_g \rightarrow N_f, \quad f \circ g(z) = \frac{(ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + (cf + dh)},$$

ist also wieder eine Möbius-Transformation.

**Merkregeln:** Die Parameter  $a, b, c, d$  der Möbius-Transformation schreibt man in Form einer  $2 \times 2$ -Matrix:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \sim A_f := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

- Die Bedingung  $ad - bc \neq 0$  bedeutet  $\det A_f \neq 0$ .
- Die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  passt zur Matrix

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (\det A_f) A_f^{-1}.$$

- Die Komposition  $f \circ g$  passt zum Matrixprodukt

$$\begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = A_f A_g.$$

Daran erkennt man auch, dass  $f \circ g$  die Zusatzbedingung erfüllt:

$$\det(A_f A_g) = \det \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} = \det A_f \det A_g \neq 0.$$

## 26.11 Satz: Geometrische Eigenschaft der Möbius-Transformation

Für eine beliebige Möbius-Transformation  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  (mit  $ad - bc \neq 0$ ) gilt:

- Falls  $c = 0$  ist: Die Bildmenge einer beliebigen Geraden in  $\mathbb{C}$  ist eine Gerade, und die Bildmenge einer beliebigen Kreislinie in  $\mathbb{C}$  ist eine Kreislinie.
- Falls  $c \neq 0$  ist:
  - Die Bildmenge einer beliebigen Geraden durch den Punkt  $-d/c$  ist eine Gerade durch den Punkt  $a/c$ .
  - Die Bildmenge jeder anderen Geraden in  $\mathbb{C}$  ist eine Kreislinie durch den Punkt  $a/c$ .
  - Die Bildmenge einer beliebigen Kreislinie durch den Punkt  $-d/c$  ist eine Gerade.
  - Die Bildmenge jeder anderen Kreislinie in  $\mathbb{C}$  ist eine Kreislinie.

Kurz gesagt: **Jede Möbius-Transformation bildet Geraden und Kreise in Geraden und Kreise ab.**

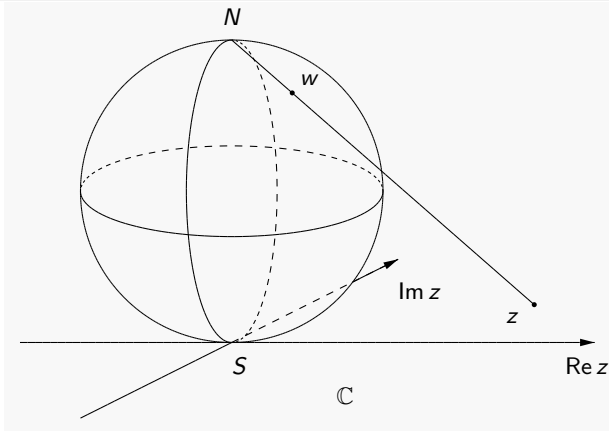
## 26.12 Riemannsche Zahlenkugel

Wir definieren  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Die *Riemannsche Zahlenkugel*  $S$  ist eine Kugel mit Radius 1, deren Südpol im Ursprung der komplexen Ebene liegt.

Die *stereographische Projektion* ordnet bijektiv jedem Punkt  $w$  auf  $S$  eine Zahl  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  zu. Der Nordpol  $N$  wird auf den "unendlich fernen Punkt"  $\infty$  abgebildet.

Damit definiert man: eine Folge komplexer Zahlen  $z_n$  konvergiert gegen  $\infty$ , genau wenn die entsprechende Folge  $w_n$  bezüglich des gewöhnlichen Abstandsbegriffs gegen  $N$  konvergiert.



Es gelten die Entsprechungen:

- Gerade in  $\mathbb{C} \iff$  Kreis auf  $S$  durch  $N$
- Kreis in  $\mathbb{C} \iff$  Kreis auf  $S$  nicht durch  $N$

Jede Möbiustransformation lässt sich als **bijektive** Abbildung  $S \rightarrow S$  auffassen, die Kreise auf  $S$  in Kreise abbildet.

26.13 Hilfssatz: Geraden und Kreise in  $\mathbb{C}$ 

- Die Gerade  $px + qy = c$  (mit  $p, q, s \in \mathbb{R}$ ,  $(p, q) \neq (0, 0)$ ) in der Gaußschen Zahlenebene wird beschrieben durch

$$\alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} = \beta \quad (\alpha = p - qi \in \mathbb{C}, \quad \alpha \neq 0, \quad \beta = 2s \in \mathbb{R}).$$

- Der Kreis  $|z - z_0|^2 = r^2$  (mit  $r > 0$ ) wird beschrieben durch

$$z \bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} = \beta \quad (\alpha = -\bar{z}_0 \in \mathbb{C}, \quad \beta = r^2 - |z_0|^2 \in \mathbb{R}, \quad \alpha \bar{\alpha} + \beta = r^2 > 0).$$

Als Methode zur Konstruktion von Möbius-Transformationen wird das *Doppelverhältnis* verwendet.

**26.14 6-Punkte-Formel** Bestimme eine Möbius-Transformation, die die 3 Punkte  $z_1, z_2, z_3$  auf die 3 Bildpunkte  $w_1, w_2, w_3$  abbildet.

**Beachte:** Je drei Punkte bestimmen einen Kreis oder eine Gerade.

**Lösung:** Stelle das Doppelverhältnis auf (auch 6-Punkte-Formel genannt):

$$\underbrace{\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)}}_{=g(w)} = \underbrace{\frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}}_{=h(z)}$$

Auflösen nach  $w$  ergibt eine Möbius-Transformation

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad - bc \neq 0.$$

Dass tatsächlich  $w_k = f(z_k)$  für  $k = 1, 2, 3$  erfüllt ist, sieht man folgendermaßen:

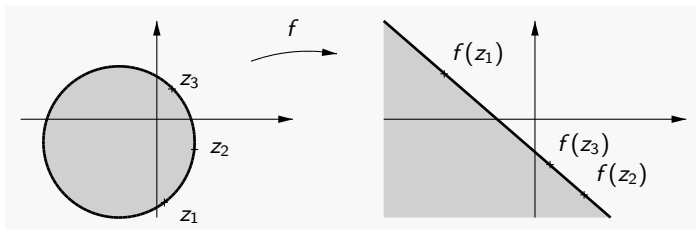
$$\begin{aligned} g(w) = h(z) = 0 &\Leftrightarrow w = w_1 \quad \text{und} \quad z = z_1, \\ g(w) = h(z) = 1 &\Leftrightarrow w = w_2 \quad \text{und} \quad z = z_2, \\ g(w) = h(z) = \infty &\Leftrightarrow w = w_3 \quad \text{und} \quad z = z_3. \end{aligned}$$

**26.15 Bemerkung** Die orientierte Kreislinie (oder Gerade) durch die Punkte  $z_1, z_2, z_3$  teilt  $\mathbb{C}$  in zwei disjunkte Mengen: eine Menge  $M_1$ , die links von dieser Linie liegt, und eine Menge  $M_2$ , die rechts von dieser Linie liegt.

Ebenso ergibt die orientierte Kreislinie (oder Gerade) durch die Bildpunkte  $w_1, w_2, w_3$  eine Menge  $N_1$ , die links von dieser Linie liegt, und eine Menge  $N_2$ , die rechts von dieser Linie liegt.

Als konforme Abbildung muss die Möbius-Transformation diese Orientierung beibehalten, d.h. die Bildmengen sind

$$f(M_1) = N_1, \quad f(M_2) = N_2.$$



**26.16 Bemerkung** Für Geraden bietet sich die Wahl des "Punktes"  $z_k = \infty$  für ein  $k$  an. Wird z.B.  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ ,  $z_3 = \infty$  gewählt (Gerade  $G =$  reelle Achse), so vereinfacht sich die rechte Seite im Doppelverhältnis zu

$$h(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \frac{z_2 - z_3}{z - z_3} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = z.$$

Genauer: Die Faktoren im Zähler und Nenner, die  $z_k = \infty$  enthalten, werden gegeneinander "gekürzt", d.h. ihr Quotient wird durch 1 ersetzt.

Ebenso darf man auch mit der Wahl der Bildpunkte verfahren, falls sie auf einer Geraden liegen. Dadurch vereinfacht sich die linke Seite im Doppelverhältnis entsprechend.

**Beweis von 25.12**

$f(z) = \frac{z - i}{z + 1}$  ist eine Möbiustransformation mit  $f(0) = i$ ,  $f(\infty) = 1$  und

$f(1) = \frac{1-i}{1+i} = \frac{-2i}{2} = -i$ . Daher wird die reelle Achse auf die Einheitskreislinie abgebildet.

Wegen  $f(i) = 0$  wird die obere Halbebene auf das Innere abgebildet.

## Beispiel: Allpass-Filter

Die speziellen Möbius-Transformationen der Form

$$h_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| < 1,$$

bilden jeweils bijektiv  $\left\{ \begin{array}{l} \text{das Innere} \\ \text{den Rand} \\ \text{das Äußere} \end{array} \right\}$  des Einheitskreises auf sich ab. Denn:

- die Werte

$$h_\alpha(1) = \frac{1 - \alpha}{1 - \bar{\alpha}}, \quad h_\alpha(i) = \frac{i - \alpha}{1 - i\bar{\alpha}} = i \frac{1 + i\alpha}{1 + i\bar{\alpha}}, \quad h_\alpha(-1) = \frac{-1 - \alpha}{1 + \bar{\alpha}}$$

liegen alle auf dem Rand des Einheitskreises (sie sind von der Form  $\sigma \frac{w}{\bar{w}}$  mit  $\sigma \in \{1, -1, i\}$ , haben also den Betrag 1.)

- Weil  $h_\alpha$  eine Möbius-Transformation ist, bildet sie die gesamte Einheits-Kreislinie bijektiv auf einen Kreis oder eine Gerade ab. Wir haben durch die Angabe der 3 Bildpunkte gezeigt, dass das Bild wieder die Einheits-Kreislinie ist.
- Um zu entscheiden, ob das Innere des Einheitskreises auf sich abgebildet wird, braucht man nur einen Wert zu testen, z.B.  $h_\alpha(0) = -\alpha$ . Wegen  $|\alpha| < 1$  liegt  $h_\alpha(0)$  im Innern des Einheitskreises, also wird das gesamte Innere des Einheitskreises bijektiv auf sich abgebildet. Dann folgt auch, dass das Äußere bijektiv auf sich abgebildet wird.
- Beachte:  $|\alpha| > 1$  würde eine Umkehrung des Inneren nach außen bewirken.

Diese speziellen Möbius-Transformationen heißen *Allpass-Filter*, da

$$|S(z)h_\alpha(z)| = |S(z)| \quad \text{für alle } z \text{ der Form } z = e^{it}$$

gilt, die Amplitude eines gegebenen Signals  $S(z)$  also erhalten bleibt.