27: Holomorphe Funktionen und die Cauchy'schen Integralsätze

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Eigenschaften holomorpher Funktionen entwickelt. Grundlage ist ein Integralsatz, den wir in 3 Versionen angeben werden.

27.1 **Motivation** Wir versuchen, das Konzept der Stammfunktion mit Hilfe von komplexen Kurvenintegralen zu entwickeln.

Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z$ ist holomorph in ganz $\mathbb{C}$. Die Funktionen

$$F(z) = \frac{z^2}{2} + A \qquad \text{mit einer Konstanten } A \in \mathbb{C}$$

sind ihre komplexen Stammfunktionen, denn $F'(z) = f(z)$.

Wir versuchen nun, die Stammfunktionen F durch ein geeignetes Kurvenintegral zu bestimmen. Zu gegebenem $z \in \mathbb{C}$ wählen wir die Strecke von 0 nach z

$$\vec{c} : [0,1] \to \mathbb{C}, \qquad \vec{c}(t) = tz.$$

Definieren wir das *komplexe Kurvenintegral* gemäß

$$\int_C f(w)\,dw = \int_0^1 f(\vec{c}(t))\;\dot{\vec{c}}(t)\,dt = \int_0^1 tz\;z\,dt = z^2\int_0^1 t\,dt = \frac{z^2}{2},$$

so ergibt sich die Stammfunktion F mit $F(0) = 0$.

Alle Stammfunktionen erhält man also als

$$F(z) = A + \int_C f(w)\,dw.$$

27.2 Bemerkung

- Das gerade verwendete komplexe Kurvenintegral

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^1 f(\vec{c}(t))\ \dot{\vec{c}}(t)\,dt$$

ist tatsächlich etwas ganz neues. Hier wird das komplexe Produkt von $f(\vec{c}(t)) \in \mathbb{C}$ mit dem "Tangentenvektor" $\dot{\vec{c}}(t) \in \mathbb{C}$ gebildet. Dies unterscheidet sich wesentlich vom Skalarprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^2$, das beim reellen vektoriellen Kurvenintegral 19.5 auftritt. Den Zusammenhang zum vektoriellen Kurvenintegral erkennt man mit

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \qquad \vec{c}(t) = c_1(t) + ic_2(t).$$

Dann ist das komplexe Kurvenintegral gegeben durch

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz \;&=\; \int_0^1 f(\vec{c}(t))\;\dot{\vec{c}}(t)\,dt \\
&= \int_0^1 (u(\vec{c}(t)) + iv(\vec{c}(t))\;(\dot{c}_1(t) + i\dot{c}_2(t))\,dt \\
&= \int_0^1 [u(\vec{c}(t))\dot{c}_1(t) - v(\vec{c}(t))\dot{c}_2(t) + i\,(u(\vec{c}(t))\dot{c}_2(t) + v(\vec{c}(t))\dot{c}_1(t))]\;dt \\
&= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (u\,dy + v\,dx),
\end{aligned}$$

also durch je ein vektorielles Kurvenintegral für den Real- und Imaginärteil.

27.3 Definition: Komplexes Kurvenintegral

$M \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet und

$$\vec{c} : [a, b] \to M.$$

sei eine stückweise reguläre Kurve in M. Für eine stetige komplexe Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ definieren wir das komplexe Kurvenintegral

$$\int_C f(z)\,dz := \int_a^b f(\vec{c}(t))\,\dot{\vec{c}}(t)\,dt.$$

Dieses lässt sich mit Hilfe von zwei vektoriellen Kurvenintegralen

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i \int_C (v\,dx + u\,dy)$$

schreiben, wobei $f = u + iv$ gesetzt wird.

27.4 Grundlegende Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals

Die Funktionen $f, g : M \to \mathbb{C}$ seien stetig und die Kurve $\vec{c} : [a, b] \to M$ sei stückweise regulär.

(i) Linearität: $\displaystyle\int_C (af(z) + bg(z))\, dz = a \int_C f(z)\, dz + b \int_C g(z)\, dz$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$.

(ii) Umkehrung der Kurve: $\displaystyle\int_{-C} f(z)\, dz = -\int_C f(z)\, dz$ (siehe hierzu Bemerkung 19.7).

(iii) Ist C aus stückweise regulären Kurven $C_1, \ldots, C_n$ zusammengesetzt, so gilt

$$\int_C f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\, dz.$$

(iv) Der Betrag des komplexen Kurvenintegrals lässt sich durch ein skalares Kurvenintegral abschätzen:

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq \int_C |f|\, ds = \int_a^b |f(\vec{c}(t))|\, |\dot{\vec{c}}(t)|\, dt.$$

Folgerung aus (iv): Falls $|f(z)| \leq M$ entlang der Kurve C gilt, so ist

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq M \ell_C,$$

wobei $\ell_C = \int_a^b |\dot{\vec{c}}(t)|\, dt$ die Bogenlänge der Kurve C ist, siehe 19.3.

Wichtige Eigenschaft:

27.5 Wegunabhängigkeit des komplexen Kurvenintegrals

$M \subseteq \mathbb{C}$ sei einfach zusammenhängend und $f : M \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Sind C_1 und C_2 stückweise reguläre Kurven in M, die den gleichen Anfangspunkt und den gleichen Endpunkt besitzen, so gilt

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz.$$

27.6 Definition und Satz zur komplexen Stammfunktion

$M \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet und $f : M \to \mathbb{C}$ sei eine komplexe Funktion.

Die Funktion $F : M \to \mathbb{C}$ heißt *komplexe Stammfunktion* von $f : M \to \mathbb{C}$, wenn F holomorph ist und $F' = f$ gilt.

(i) Eine stetige Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ besitzt genau dann eine komplexe Stammfunktion F, wenn das komplexe Kurvenintegral über f wegunabhängig ist. In diesem Fall gilt

$$\int_C f(z)\,dz = F(\vec{c}(b)) - F(\vec{c}(a))$$

für jede stückweise reguläre Kurve $\vec{c} : [a, b] \to M$.

(ii) Wenn $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph ist und M einfach zusammenhängend ist, dann besitzt f die folgende komplexe Stammfunktion F:

zu festem $z_0 \in M$ und beliebigem $z \in M$ wählen wir eine stückweise reguläre Kurve $\vec{c} : [a, b] \to M$ mit Anfangspunkt $\vec{c}(a) = z_0$ und Endpunkt $\vec{c}(b) = z$ und setzen

$$F(z) = A + \int_C f(w)\,dw \qquad \text{mit beliebigem } A \in \mathbb{C}.$$

27.7 Beispiele von komplexen Stammfunktionen

(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ hat als Stammfunktionen $F(z) = A + \frac{z^{k+1}}{k+1}$.

(b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^{cz}$ mit $c \neq 0$ hat als Stammfunktionen $F(z) = A + \frac{1}{c}e^{cz}$.

(c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \cos z$ hat die Stammfunktionen $F(z) = A + \sin z$,
$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \sin z$ hat die Stammfunktionen $G(z) = A - \cos z$.

(d) $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ hat keine Stammfunktion in $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$: die Kurvenintegrale zu

$$\vec{c}_1 : [0, \pi] \to M, \qquad \vec{c}_1(t) = e^{it},$$
$$\vec{c}_2 : [0, \pi] \to M, \qquad \vec{c}_2(t) = e^{-it}$$

ergeben unterschiedliche Werte, obwohl beide den Anfangspunkt 1 und den Endpunkt -1 haben (obere bzw. untere Hälfte des Einheitskreises):

$$\int_{C_1} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^\pi \frac{1}{e^{it}}\; ie^{it}\, dt = \int_0^\pi i\, dt = i\pi,$$
$$\int_{C_2} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^\pi \frac{1}{e^{-it}}\; (-ie^{-it})\, dt = \int_0^\pi (-i)\, dt = -i\pi.$$

Also ist das komplexe Kurvenintegral nicht wegunabhängig, also hat f keine Stammfunktion (in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).

27.7 Beispiele(Forts.):

(e) Schränkt man $1/z$ auf eine geschlitzte Ebene ein, z.B.

$$g : \mathbb{C} \setminus \Gamma_\pi \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{1}{z},$$

so existiert die Stammfunktion! Denn $\mathbb{C} \setminus \Gamma_\pi$ ist einfach zusammenhängend und g ist holomorph. Stammfunktionen sind

$$G(z) = A + \log z, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_\pi,$$

wobei $\log z$ ein beliebiger Zweig der Logarithmus-Funktion zum Schnitt Γ_π sein darf. (Verschiedene Zweige zum Schnitt Γ_π unterscheiden sich nur durch $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.)

(f) Genau so lassen sich auch Stammfunktionen von

$$f : \mathbb{C} \setminus \Gamma_\pi \to \mathbb{C}, \quad f(z) = z^a$$

mit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$, $a \neq -1$, angeben. Damit f wohldefiniert ist, müssen wir beim Umschreiben

$$f(z) = e^{a \log z}$$

einen festen Zweig der Logarithmusfunktion zum Schnitt Γ_π wählen. Unter Verwendung desselben Zweiges erhalten wir dann

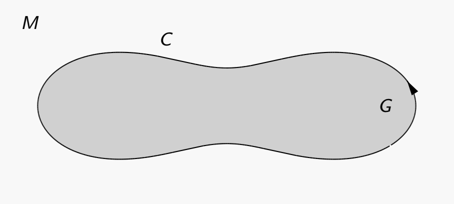
$$F(z) = A + \frac{z}{a+1} e^{a \log z} = A + \frac{1}{a+1} z^{a+1}.$$

Eine wichtige Rolle spielen die komplexen Kurvenintegrale zu geschlossenen Kurven.

27.8 Cauchy'scher Integralsatz (1. Formulierung)

$M \subseteq \mathbb{C}$ sei einfach zusammenhängend und $f : M \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann gilt für jede geschlossene stückweise reguläre Kurve $\vec{c} : [a, b] \to M$

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$



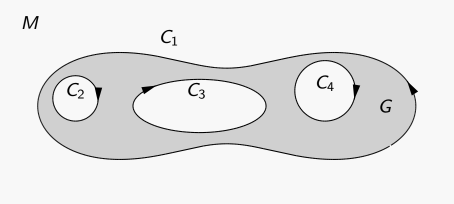
Eine andere Version des Cauchy'schen Integralsatzes beweist man mit dem Satz von Green in der Ebene, siehe 24.9.

27.9 Cauchy'scher Integralsatz (2. Formulierung)

$M \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet und $f : M \to \mathbb{C}$ sei holomorph. G sei ein Normalgebiet mit $\overline{G} \subset M$; also besteht der Rand $\Gamma = \partial G$ aus endlich vielen geschlossenen doppelpunktfreien Kurven $C_1, \ldots, C_r$.

Wird jede dieser Kurven so durchlaufen, dass G links liegt, so gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_r} f(z)\,dz = 0.$$



Eine noch allgemeinere Version des Cauchy'schen Integralsatzes funktioniert ohne den Übergang zu Teilgebieten $G \subset M$.

27.10 Cauchy'scher Integralsatz (3. Formulierung)

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Normalgebiet, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ sei stetig in $\overline{G}$ und holomorph in G. Der Rand $\Gamma = \partial G$ besteht aus endlich vielen geschlossenen doppelpunktfreien Kurven $C_1, \dots, C_r$. Jede dieser Kurven werde so durchlaufen, dass G links liegt. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_r} f(z)\,dz = 0.$$

Beweis: Man nähert sich mit Kurven $D_1, \dots, D_r$ von "innen" dem Rand von G. Diese Kurven bilden den Rand eines Normalgebiets $H \subset G$, und hierauf ist 27.9 anwendbar.
Der Grenzübergang $D \to \partial G$ und die Stetigkeit von f im Abschluss $\overline{G}$ liefern die Behauptung.

27.11 Ein wichtiges Kurvenintegral

Die Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Zu $z_0 \in M$ wählen wir einen Kreis $K_r(z_0)$ vom Radius r um z_0, der ganz in M liegt. Die Randkurve (in mathematisch positiver Orientierung) ist

$$\vec{c}_r : [0, 2\pi] \to M, \quad \vec{c}(t) = z_o + re^{it}.$$

1. Feststellung

Das komplexe Kurvenintegral

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz$$

ist unabhängig vom Radius r, sofern $\overline{K_r(z_0)} \subset M$ gilt.

Welchen Wert nimmt dieses Integral an?

27.12 Integralformel von Cauchy (1. Version)

Die Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ sei holomorph.
Für $z_0 \in M$ sei $r > 0$ so gewählt, dass $\overline{K_r(z_0)} \subset M$ gilt. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = f(z_0),$$

mit der geschlossenen Kurve $\vec{c}_r : [0, 2\pi] \to M$, $\vec{c}_r(t) = z_0 + re^{it}$, die den Kreisrand (genau einmal) gegen den Uhrzeigersinn durchläuft.

Hiermit ist die wichtigste Formel für holomorphe Funktionen gezeigt.

Die Verallgemeinerung wie in 27.10 bietet sich an:

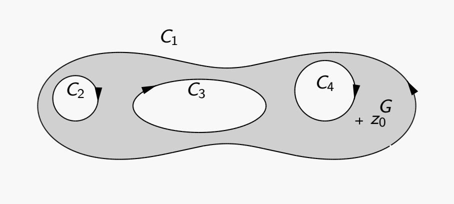
27.13 Integralformel von Cauchy (2. Version)

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei Normalgebiet, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ sei stetig in $\overline{G}$ und holomorph in G.

Der Rand $\Gamma = \partial G$ besteht aus endlich vielen geschlossenen doppelpunktfreien Kurven $C_1, \ldots, C_r$. Jede dieser Kurven werde so durchlaufen, dass G links liegt.

Dann gilt für jedes $z_0 \in G$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0),$$



27.14 Bemerkung Die Integralformel erlaubt es, viele komplexe Kurvenintegrale "ohne Integration" auszurechnen: z.B. ist für $\Gamma = \partial K_1(1)$ (gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen)

$$\int_\Gamma \frac{e^{2z}}{z-1}\,dz = i2\pi e^2,$$

weil die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^{2z}$ holomorph ist.

Aus der Integralformel 27.13 folgt diese Aussage mit weitreichenden Konsequenzen:

27.15 Folgerung

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei Normalgebiet, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ sei stetig in $\overline{G}$ und holomorph in G.

Dann ist f in ganz G allein durch die Funktionswerte auf dem Rand von G eindeutig bestimmt.

In der Herleitung der Cauchyformel wurde der Spezialfall $G = K_r(z_0)$ bereits behandelt:

27.16 Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen

$M \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet und $f : M \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann gilt für jedes $z_0 \in M$ und $r > 0$ mit $\overline{K_r(z_0)} \subset M$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt.$$

Damit haben wir ein Maximumprinzip für holomorphe Funktionen!

27.17 Maximumprinzip holomorpher Funktionen

$M \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet und $f : M \to \mathbb{C}$ sei holomorph und nicht konstant. Dann besitzt $|f|$ in M <u>kein</u> lokales oder globales Maximum.

Insbesondere: Falls M beschränkt ist und f sogar stetig in $\overline{M}$ ist, so nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand ∂M an.

Die letzten Aussagen lassen sich auch für harmonische Funktionen treffen. Dazu setzen wir manchmal voraus, dass G einfach zusammenhängend ist, damit die harmonische Funktion $u : G \to \mathbb{R}$ als Realteil einer holomorphen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ interpretiert werden darf (siehe 25.16).

27.18 Eigenschaften harmonischer Funktionen

$G \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Normalgebiet, einfach zusammenhängend und beschränkt, Dann ist jede Funktion $u : \overline{G} \to \mathbb{R}$, die stetig in $\overline{G}$ und harmonisch in G ist, allein durch die Funktionswerte auf dem Rand von G eindeutig bestimmt.

27.19 Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen

$M \subseteq \mathbb{R}^2$ sei ein Gebiet und $u : M \to \mathbb{R}$ sei harmonisch.
Dann gilt für jedes $(x_0, y_0) \in M$ und $r > 0$ mit $\overline{K_r(x_0, y_0)} \subset M$

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\, dt.$$

Man beachte, dass u reellwertig ist, wir also Maxima und Minima von u behandeln können (ohne den Übergang zu Beträgen durchzuführen).

27.20 Maximumprinzip harmonischer Funktionen

$M \subseteq \mathbb{R}^2$ sei ein Gebiet und $u : M \to \mathbb{R}$ sei harmonisch und nicht konstant.

Dann nimmt u in M weder lokale noch globale Maxima oder Minima an.

Insbesondere: Falls M beschränkt ist und u sogar stetig in $\overline{M}$ ist, so nimmt u sein Maximum und sein Minimum auf dem Rand ∂M an.

27.21 Poisson-Kern, Lösung der Laplace-Gleichung

Die Funktion $f : \overline{K_r(0)}$ sei holomorph in $K_r(0)$ und stetig in $\overline{K_r(0)}$.
Dann sind der Realteil u und der Imaginärteil v für alle $(x, y) = (s \cos\phi, s \sin\phi) \in K_r((0,0))$ mit $0 \le s < r$ und $\phi \in [0, 2\pi)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r\cos t, r\sin t)\, \frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2 - 2rs\cos(t-\phi)}\, dt, \\ v(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(r\cos t, r\sin t)\, \frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2 - 2rs\cos(t-\phi)}\, dt. \end{aligned}$$

u und v lassen sich also durch Integration ihrer Randwerte mit Hilfe des *Poisson-Kerns*

$$p(x,y) = P(s,\phi) = \frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2 - 2rs\cos(t-\phi)}$$

bestimmen.

Wir haben damit eine explizite Form der Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta u(x,y) = 0 \qquad \text{für} \quad (x,y) \in K_r((0,0))$$

bei vorgegebenen (stetigen) Randwerten

$$u(r\cos t, r\sin t) = h(t) \qquad \text{für} \quad t \in [0, 2\pi).$$

Die schwierig aussehenden Integrale lassen sich mit dem im nächsten Abschnitt enthaltenen *Residuensatz* berechnen.

27.22 Die Cauchyschen Integralformeln

Die Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ sei holomorph.

Dann ist f beliebig oft komplex differenzierbar.

Für $z_0 \in M$ sei $r > 0$ so gewählt, dass $\overline{K_r(z_0)} \subset M$ gilt. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

mit der geschlossenen Kurve $\vec{c}_r : [0, 2\pi] \to M$, $\vec{c}_r(t) = z_0 + re^{it}$, die den Kreisrand (genau einmal) gegen den Uhrzeigersinn durchläuft.

Bemerkung: Die Aussagen

- f ist komplex differenzierbar im Gebiet M,
- f ist holomorph im Gebiet M,
- f ist beliebig oft komplex differenzierbar im Gebiet M

sind alle äquivalent.

Eine Variante der Integralformel für die n-te Ableitung folgt wie in 27.13.

27.23 Cauchysche Integralformeln (2. Version)

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei Normalgebiet, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ sei stetig in $\overline{G}$ und holomorph in G.

Der Rand $\Gamma = \partial G$ besteht aus endlich vielen geschlossenen doppelpunktfreien Kurven $C_1, \ldots, C_r$. Jede dieser Kurven werde so durchlaufen, dass G links liegt.

Dann gilt für jedes $z_0 \in G$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Weitere Anwendungen der Integralformel von Cauchy:

27.24 Ganze Funktion, Satz von Liouville

Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *ganze Funktion*.

Falls die ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ beschränkt ist (d.h. es gibt ein $B > 0$ mit $|f(z)| \leq B$ für alle $z \in \mathbb{C}$), so ist sie konstant.

Die Integralformel von Cauchy liefert tiefliegende mathematische Resultate.

Zwei weitere Beispiele dafür sollen noch angegeben werden.

27.25 Beschränkte ganze Funktionen

Es existiert keine bijektive, holomorphe und konforme Abbildung von $\mathbb{C}$ auf den Einheitskreis $K_1(0)$. (Vgl. hierzu den Riemannschen Abbildungssatz, $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend, aber ohne Randpunkt.)

27.26 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nichtkonstante Polynom $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.