28: Holomorphe Funktionen, Potenzreihen und Laurentreihen

28.1 Einleitung Wir wissen bereits, dass eine holomorphe Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ unendlich oft komplex differenzierbar ist. Für jedes $z_0 \in M$ können wir die (komplexe) Taylorreihe von f mit dem Entwicklungspunkt z_0 bilden:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \, (z - z_0)^k.$$

Die Frage nach dem Konvergenzradius dieser Potenzreihe hat für holomorphe Funktionen eine interessante Antwort.

28.2 Erinnerung an Potenzreihen, siehe 14.4

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ mit den Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ besitzt den Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

(i) Falls $0 < r < \infty$ ist, so gilt:

- Die Reihe konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < r$.
- Die Reihe divergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > r$.
- Eine allgemeine Aussage zur Konvergenz für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| = r$ lässt sich nicht treffen.

(ii) Falls $r = \infty$ ist (d.h. $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$), so konvergiert die Potenzreihe in ganz $\mathbb{C}$.

(iii) Falls $r = 0$ ist, so konvergiert die Potenzreihe nur im Punkt z_0.

Bemerkung: Eine zweite Berechnungsformel für den Konvergenzradius funktioniert, wenn die Koeffizienten a_k der Potenzreihe für alle $k \geq k_0$ ungleich Null sind und wenn

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = c$$

(incl. der Fälle $c = 0$ und $c = \infty$) existiert. Dann gilt

$$r = \frac{1}{c}.$$

(incl. der Fälle $r = \infty$ und $r = 0$), siehe 14.5.

Falls die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ den Konvergenzradius $r > 0$ hat, so konvergiert sie gleichmäßig und absolut in jedem abgeschlossenen Kreis $\overline{K_s(z_0)}$ mit $0 < s < r$. Deswegen darf die Potenzreihe gliedweise differenziert und integriert werden, siehe 14.9.

28.3 Potenzreihen sind holomorph

Eine Potenzreihe stellt in ihrem Konvergenzgebiet $K_r(z_0)$ eine holomorphe Funktion dar; d.h.

$$f : K_r(z_0) \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k,$$

ist holomorph.

Umgekehrt: Sei nun $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph. Die Taylorreihe von f mit dem Entwicklungspunkt z_0 ist die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Ihr Konvergenzradius r lässt sich oft ohne die Rechnung in 28.2 bestimmen, allein durch Betrachtung der Geometrie:

28.4 Satz: Konvergenzradius der Taylorreihe einer holomorphen Funktion

$M \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet und $f : M \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Zu $z_0 \in M$ bestimmen wir die Zahl

$$\rho := d(z_0, \partial M) = \sup\{s > 0 \mid K_s(z_0) \subset M\},$$

also den Abstand von z_0 zum Rand von M. Dann hat die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt z_0 den Konvergenzradius $r \geq \rho$ und es gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad \text{für alle} \quad z \in K_\rho(z_0).$$

Satz 28.4 ergibt eine neue Charakterisierung der holomorphen Funktionen:

28.5 Satz: Holomorphe Funktionen sind analytisch

$M \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet.
Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn sie analytisch ist, d.h. wenn zu jedem $z_0 \in M$ eine Kreisscheibe $K_s(z_0)$ mit $s > 0$ existiert, so dass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\,(z - z_0)^k$$

für alle $z \in K_s(z_0)$ gilt.

Den Identitätssatz für Potenzreihen haben wir in 14.6 kennengelernt. Mit dem letzten Satz (und ein paar geometrischen Überlegungen, die hier nicht gezeigt werden) folgt:

28.6 Identitätssatz für holomorphe Funktionen

M_1, M_2 seien Gebiete in $\mathbb{C}$ und $M_1 \cap M_2$ sei nichtleer.

Falls zwei holomorphe Funktionen $f_1 : M_1 \to \mathbb{C}$ und $f_2 : M_2 \to \mathbb{C}$ an allen Stellen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einer komplexen Zahlenfolge mit paarweise verschiedenen Folgengliedern übereinstimmen und falls diese Folge einen Häufungspunkt $z_0 \in M_1 \cap M_2$ besitzt, so gilt

$$f_1(z) = f_2(z) \qquad \text{für alle} \quad z \in M_1 \cap M_2.$$

28.7 Bemerkung

Man interessiert sich meist für den maximalen Definitionsbereich einer gegebenen holomorphen Funktion $f : M \to \mathbb{C}$, also für eine holomorphe Funktion $\widetilde{f} : \widetilde{M} \to \mathbb{C}$ mit $M \subset \widetilde{M}$, die auf M mit f übereinstimmt.
Der Identitätssatz besagt, dass eine solche "Fortsetzung" von f eindeutig ist.

Es gilt sogar noch mehr:

$I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei analytisch, d.h. die Taylorreihe mit beliebigem Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ hat einen positiven Konvergenzradius.

Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung zu einer holomorphen Funktion $\widetilde{f} : \widetilde{M} \to \mathbb{C}$, wobei $\widetilde{M}$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist, das das Intervall I enthält.

28.8 Motivation der Laurent-Reihen

Die komplexe Form der Fourier-Reihe einer 2π-periodischen Funktion f (siehe Physik/ET Vorlesungen und unser späteres Kapitel) lautet

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

wobei $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$, $k \in \mathbb{Z}$, die komplexen Fourierkoeffizienten von f sind.

Die einfache Substitution $z = e^{it}$ ergibt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \qquad \text{mit} \;\; z \in \mathbb{C}, \;\; |z| = 1.$$

Insbesondere für die Stabilität von Filtern ist es wichtig zu wissen, ob diese Reihe auch in einer Umgebung des Einheitskreises konvergiert, ob also Radien $0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$ existieren, so dass die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \qquad \text{für alle} \;\; z \in \mathbb{C} \;\; \text{mit} \;\; \rho_1 < |z| < \rho_2$$

konvergiert.

Damit wird das Konzept der Potenzreihen in zweierlei Hinsicht erweitert:

- Die Reihe erstreckt sich auch über negative Potenzen von $(z - z_0)$.
- Die Konvergenzbereiche sind keine Kreise, sondern Kreisringe mit einem inneren Radius ρ_1 und einem äußeren Radius ρ_2.

28.9 Definition: Laurent-Reihe

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ heißt *Laurent-Reihe* mit dem Entwicklungspunkt z_0.

Bezeichnung: Man nennt den Teil

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

den *Hauptteil* der Laurentreihe. Den anderen Teil nennt man Potenzreihen-Anteil oder *Nebenteil*.

28.10 Definition und Satz: Konvergenz einer Laurent-Reihe

Eine Laurentreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

heißt (absolut) konvergent in einem Punkt $z \in \mathbb{C}$, wenn beide Reihen

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

(absolut) konvergieren.

Wir setzen

$$\begin{aligned} \rho_1 &:= \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|}, \\ \rho_2 &:= \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}, \end{aligned}$$

wobei die Fälle $\rho_1 = \infty$ oder $\rho_2 = \infty$ auftreten können.

Falls $\rho_1 < \rho_2$ ist,

- konvergiert die Laurentreihe absolut für alle z im Kreisring

$$K_{\rho_1 < \rho_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\},$$

- divergiert die Laurentreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \rho_1$ oder $|z - z_0| > \rho_2$.
- Eine allgemeine Aussage für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = \rho_1$ oder ρ_2 kann nicht getroffen werden.

Falls $\rho_1 > \rho_2$ oder $\rho_1 = \infty$ gilt, divergiert die Laurent-Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$.

Falls $\rho_1 = \rho_2 < \infty$ gilt, kann höchstens Konvergenz in Punkten der Kreislinie $|z - z_0| = \rho_1$ vorliegen.

Beweis: Der Hauptteil der Laurentreihe ist als Potenzreihe von $1/(z-z_0)$ anzusehen. Diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius $1/\rho_1$, also konvergiert die Reihe absolut für alle z mit

$$\frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{\rho_1} \quad \Leftrightarrow \quad |z-z_0| > \rho_1.$$

Sie divergiert für alle z mit

$$\frac{1}{|z-z_0|} > \frac{1}{\rho_1} \quad \Leftrightarrow \quad |z-z_0| < \rho_1.$$

(Die Fälle $\rho_1 = 0$ und $\rho_1 = \infty$ sind sinnvoll zu interpretieren.)

Der Potenzreihen-Anteil hat den Konvergenzradius ρ_2. Also gilt absolute Konvergenz für alle z mit $|z-z_0| < \rho_2$ und Divergenz für $|z-z_0| > \rho_2$.

Die absolute Konvergenz beider Teile liegt im Durchschnitt $\rho_1 < |z-z_0| < \rho_2$ vor.

Bemerkung: Die zweite Berechnungsformel in der Bemerkung zu 28.2 kann zur Berechnung von ρ_1 und ρ_2 verwendet werden.

- Wenn die Koeffizienten a_k des Potenzreihenanteils für alle $k \geq k_2$ (mit $k_2 \geq 0$) ungleich Null sind und wenn der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = c_2$$

  (incl. der Fälle $c_2 = 0$ und $c_2 = \infty$) existiert, so gilt $\rho_2 = \frac{1}{c_2}$.

- Wenn die Koeffizienten a_k des Hauptteils für alle $k \leq k_1$ (mit $k_1 < 0$) ungleich Null sind und wenn

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{-(k+1)}|}{|a_{-k}|} = c_1$$

  (incl. der Fälle $c_1 = 0$ und $c_1 = \infty$) existiert, so gilt $\rho_1 = c_1$.

Einige Aussagen gelten ähnlich wie bei Potenzreihen.

Falls die Laurentreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ im Kreisring $K_{\rho_1<\rho_2}(z_0)$ konvergiert, so konvergiert sie gleichmäßig und absolut in jedem abgeschlossenen Kreisring $\overline{K_{s_1<s_2}(z_0)}$ mit $\rho_1 < s_1 < s_2 < \rho_2$. Deswegen darf auch die Laurentreihe gliedweise differenziert und integriert werden.
Dabei ändern sich die Radien ρ_1 und ρ_2 nicht, siehe 14.9

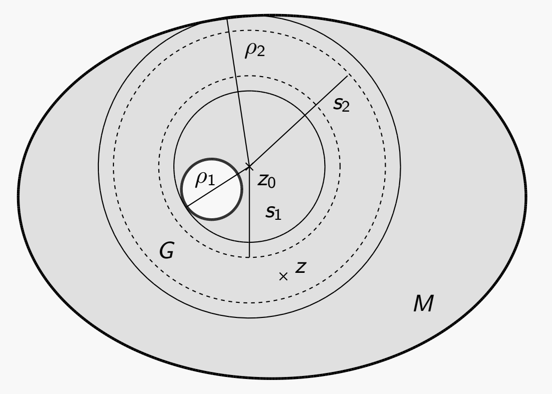
28.11 Satz: Laurentreihen sind holomorph

Eine Laurentreihe mit Radien $0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq \infty$ stellt in ihrem Konvergenzgebiet $K_{\rho_1<\rho_2}(z_0)$ eine holomorphe Funktion dar; d.h.

$$f : K_{\rho_1<\rho_2}(z_0) \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k,$$

ist holomorph.

Frage: Können wir auch umgekehrt zu einer holomorphen Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ eine Laurentreihe bestimmen, deren Grenzwert die Funktion f ist?



Insgesamt erhalten wir das folgende Resultat:

28.12 Satz: Laurentreihe einer holomorphen Funktion

$M \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet und $f : M \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Zu $z_0 \in \mathbb{C}$ gebe es Radien $\rho_1 \geq 0$ (minimal) und $\rho_2 > \rho_1$ (maximal), so dass

$$K_{\rho_1 < \rho_2}(z_0) \subset M$$

gilt. Weiter sei $s > 0$ mit $\rho_1 < s < \rho_2$ ausgewählt.

Setzen wir

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} \, dw, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

so gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle} \quad z \in K_{\rho_1 < \rho_2}(z_0).$$

Insbesondere konvergiert die angegebene Laurentreihe von f im Kreisring $K_{\rho_1 < \rho_2}(z_0)$.

Bemerkungen:

- In Satz 28.12 ist auch Satz 28.4 zur Taylorreihe enthalten:
  Falls f im Kreis $K_r(z_0)$ holomorph ist, setzen wir $\rho_1 = 0$ und $\rho_2 = r$. Dann gilt für jedes $0 < s < r$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_s} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\, dw = \begin{cases} \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!} & \text{für } k \geq 0, \text{①} \\ 0 & \text{für } k < 0, \text{②} \end{cases}$$

  ①: Cauchysche Integralformel 27.13 ②: Cauchyscher Integralsatz 27.8

  In diesem Fall ist also die Laurentreihe gleich der Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt z_0.

- Die Laurentreihe mit den Koeffizienten a_k in Satz 28.12 konvergiert im Kreisring $K_{\rho_1<\rho_2}(z_0)$. Man beachte hierbei, dass die Radien ρ_1 und ρ_2 wieder rein geometrisch bestimmt werden, also keine Berechnung über die Formel der Konvergenzradien erfordern.

Bemerkung:

Zu einer gegebenen Funktion f und festem Entwicklungspunkt z_0 gibt es im Allgemeinen mehrere Paare von Radien (ρ_1, ρ_2) und zugehörige Kreisringe, in denen f als Laurentreihe dargestellt wird.

Beispiel: f sei eine rationale Funktion mit Polstellen in $z_1 = 0$, $z_2 = 3$ und $z_3 = 5i$. Der Entwicklungspunkt sei $z_0 = 0$.

Es gibt drei Paare von Radien, also auch drei Kreisringe:

- Mit $\rho_1 = 0$ und $\rho_2 = 3$ erhalten wir eine Laurentreihe von f, die für $0 < |z| < 3$ konvergiert. Die Koeffizienten a_k in 28.12 erhält man durch Integration längs der Kreislinie vom Radius $s = 2$ (oder zu beliebigem Radius $0 < s < 3$).

- Mit $\rho_1 = 3$ und $\rho_2 = 5$ erhalten wir eine Laurentreihe von f, die für $3 < |z| < 5$ konvergiert. Die Koeffizienten a_k ergeben sich durch Integration längs der Kreislinie vom Radius $s = 4$.

- Mit $\rho_1 = 5$ und $\rho_2 = \infty$ erhalten wir eine Laurentreihe von f, die für $|z| > 5$ konvergiert. Die Koeffizienten a_k ergeben sich durch Integration längs der Kreislinie vom Radius $s = 6$.

Die Koeffizienten, und damit die Laurentreihe, hängen also vom ausgewählten Kreisring ab, in dem f holomorph ist (d.h. keine Polstellen besitzt). Deshalb kann man nicht von "der" Laurentreihe einer Funktion f zum Entwicklungspunkt z_0 sprechen, sondern muss immer den Kreisring mit angeben.

Ab jetzt betrachten wir holomorphe Funktionen $f : M \setminus N \to \mathbb{C}$, wobei $M \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und N eine diskrete “Ausnahmemenge” von Punkten

$$N = \{z_1, \ldots, z_K\} \subset M \quad \text{oder} \quad N = \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset M,$$

ist. Die Menge N soll keine Häufungspunkte enthalten. Genauer:

28.13 Definition: isolierte Singulariät

Der Punkt $z_n \in M$ heißt *isolierte Singularität* von f, wenn es ein $s > 0$ so gibt, dass $f : K_s(z_n) \setminus \{z_n\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

Wir unterscheiden 3 Typen von isolierten Singularitäten, die wir anschließend durch die Laurentreihe von f charakterisieren.

28.14 Typen von isolierten Singularitäten

$f : M \setminus N \to \mathbb{C}$ sei holomorph. $z_n \in N$ sei eine isolierte Singularität von f.

(i) z_n heißt *hebbar* (vom Begriff "heben=aufheben, eliminieren"), wenn der Grenzwert $\lim\limits_{z \to z_n} f(z) = A \in \mathbb{C}$ existiert.

(ii) z_n heißt ein *Pol der Ordnung m* (mit $m \in \mathbb{N}$), wenn der Grenzwert $\lim\limits_{z \to z_n} (z - z_n)^m f(z) = A \in \mathbb{C}$ existiert UND ungleich Null ist.

(iii) z_n heißt *wesentliche Singularität*, wenn z_n weder hebbar noch ein Pol irgendeiner Ordnung $m \in \mathbb{N}$ ist.

28.15 Singularitäten und Laurentreihe

$f : M \setminus N \to \mathbb{C}$ sei holomorph. $z_n \in N$ sei eine isolierte Singularität von f und

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_n)^k$$

sei die Laurent-Reihe von f im Kreisring $0 < |z - z_n| < \rho_2$.
Dann gilt:

(i) z_n ist genau dann hebbar, wenn der Hauptteil der Laurentreihe verschwindet, also $0 = a_{-1} = a_{-2} = \cdots$ gilt.
In diesem Fall ist f sogar holomorph in $K_{\rho_2}(z_n)$.

(ii) z_n ist genau dann ein Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, wenn der Hauptteil nur die Glieder mit $k = -m, -m+1, \ldots, -1$ besitzt;
genauer: wenn $a_{-m} \neq 0$ und $0 = a_{-m-1} = a_{-m-2} = \cdots$ gilt.

(iii) z_n ist genau dann eine wesentliche Singularität, wenn der Hauptteil unendlich viele Glieder besitzt; genauer: es existieren $0 > k_1 > k_2 > \ldots$ mit $a_{k_p} \neq 0$ für alle $p \in \mathbb{N}$.

Spezialfall: Anstelle rationaler Funktionen betrachten wir die größere Klasse von Funktionen

$$R(z) = \frac{f(z)}{g(z)},$$

wobei $f, g : M \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht identisch Null sind.

- Die Nullstellen von g sind isolierte Singularitäten von R: Hätten sie einen Häufungspunkt in M, so wäre $g \equiv 0$ nach dem Identitätssatz 28.6.
- Ob eine Nullstelle von g eine hebbare Singularität oder ein Pol ist, kann man an den Taylorreihen von f und g ablesen. Dies führt u.a. zur Regel von de l'Hospital.

28.16 Satz: Regel von de l'Hospital

Die Funktionen $f, g : M \to \mathbb{C}$ seien holomorph. Für ein $z_0 \in M$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$g(z_0) = g'(z_0) = \cdots = g^{(n-1)}(z_0) = 0, \qquad g^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Weiter sei $m \in \mathbb{N}_0$ gegeben mit

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \qquad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

(Der Fall $m = 0$ bedeutet hierbei nur $f(z_0) \neq 0$.)
Mit anderen Worten: g hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung n und f hat dort keine Nullstelle ($m = 0$) oder eine Nullstelle der Ordnung m.

- Falls $m < n$ gilt, so hat $R(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ eine Polstelle der Ordnung $n - m$ in z_0.
- Falls $m \geq n$ gilt, so hat $R(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ eine hebbare Singularität in z_0, und es gilt die *Regel von de l'Hospital*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f^{(n)}(z)}{g^{(n)}(z)} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)}.$$

Die komplexe Funktion f habe eine isolierte Singularität z_0. Der Koeffizient a_{-1} der Laurentreihe zum innersten Kreisring $0 < |z - z_0| < r$ lautet als Kurvenintegral

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} f(z)\, dz,$$

wobei C_s eine Kreislinie um z_0 vom Radius $0 < s < r$ ist. (Der Wert des Kurvenintegrals hängt nicht vom Radius s ab!) Dieser einzelne Koeffizient spielt eine wichtige Rolle bei der Berechnung von komplexen Kurvenintegralen.

28.17 Definition: Residuum

Die komplexe Funktion f sei holomorph im Gebiet $K_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Für ein $0 < s < r$ sei C_s die Randkurve von $K_s(z_0)$ orientiert gegen den Uhrzeigersinn. Dann heißt der Koeffizient der Laurentreihe

$$\operatorname{Res}(f; z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} f(z)\, dz$$

das *Residuum* von f in z_0.

Bemerkung: Ist f sogar holomorph im Kreis $K_r(z_0)$ (oder z_0 eine hebbare Singularität von f), so gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz 27.8 $\operatorname{Res}(f; z_0) = 0$.

28.18 Satz: Residuen rationaler Funktionen

Für die rationale Funktion $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ sei die Partialbruchzerlegung

$$R(z) = \sum_{n=1}^{K} \sum_{\ell=1}^{m_n} \frac{A_{n,\ell}}{(z - z_n)^\ell} + S(z),$$

S Polynom, bekannt. Dann gilt

$$\operatorname{Res}(R; z_n) = A_{n,1}, \qquad n = 1, 2, \ldots, K.$$

28.19 Satz: Residuum an einer Polstelle

f sei holomorph in $K_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ und habe eine Polstelle der Ordnung m in z_0. Wir definieren $g : K_r(z_0) \to \mathbb{C}$, $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$. Dann gilt

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g^{(m-1)}(z)}{(m-1)!} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Spezialfälle $m = 0$ und $m = 1$:

- z_0 ist hebbare Singularität oder ein einfacher Pol von f. In beiden Fällen ist

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

- $f = \dfrac{g}{h}$ mit g und h holomorph, $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$ ist von diesem Typ, also

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h};\ z_0\right) = \lim_{z \to z_0} g(z) \frac{z - z_0}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Die Integralformeln von Cauchy ermöglichen die Berechnung vieler komplexer Kurvenintegrale durch Verwendung von Residuen.

28.20 Residuensatz

M sei ein Gebiet und $N \subset M$ eine diskrete Teilmenge ohne Häufungspunkt. Die Funktion $f : M \setminus N \to \mathbb{C}$ sei holomorph.

G sei ein Normalgebiet mit $\overline{G} \subset M$. Der Rand $\Gamma = \partial G$ bestehe aus endlich vielen geschlossenen doppelpunktfreien regulären Kurven, die so durchlaufen werden, dass G links liegt. Weiterhin gelte $\Gamma \cap N = \emptyset$.

Dann enthält G höchstens endlich viele isolierte Singularitäten $z_1, \ldots, z_K \in N$ von f, und es gilt

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{K} \operatorname{Res}(f; z_n).$$

28.21 Berechnung reeller Integrale

Der Residuensatz kann zur Berechnung bestimmter Integrale verwendet werden.

- Typ 1:
  Integration 2π-periodischer Funktionen $R(\cos t, \sin t)$ über eine volle Periode. Dabei ist $R(x, y)$ eine gebrochen rationale Funktion ohne Polstellen auf dem Rand des Einheitskreises.

  Wir setzen dazu $z = e^{it}$, siehe 28.22.

- Typ 2:
  uneigentliche Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ oder $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$.

  Wir "komplexifizieren" das Integral und setzen dazu $z = x$, siehe 28.23.

28.22 Integrale des Typs 1

Sei R eine gebrochen rationale Funktion im $\mathbb{R}^2$ ohne Polstellen auf dem Rand des Einheitskreises.
Dann ist

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi \sum_{|z_k|<1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right), z_k\right).$$

Summiert wird dabei über alle Residuen von Punkten, die innerhalb des Einheitskreises liegen, d.h. für die $|z_k| < 1$ gilt.

Die obige Methode lässt sich allgemein beschreiben.

28.23 Integrale vom Typ 2

Das Gebiet $M \subseteq \mathbb{C}$ enthalte die abgeschlossene obere Halbebene $\mathbb{H}_+$.
Die Teilmenge $N \subset M$ sei endlich, enthalte keine Punkte der reellen Achse und die Funktion $f : M \setminus N \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Weiter gelte

$$\lim_{R\to\infty} R|f(Re^{i\phi})| = 0 \qquad \text{gleichmäßig für} \quad \phi \in [0,\pi].$$

Dann gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{K} \operatorname{Res}(f; z_n),$$

wobei $z_1, \dots, z_K \in N$ sämtliche Punkte von N mit $\operatorname{Im} z > 0$ sind.

Bemerkung: Wird die Aussage entsprechend für die untere Halbebene formuliert, ergibt sich wegen der Orientierung des Randes

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{n=1}^{K} \operatorname{Res}(f; z_n).$$

Beispiele: Typische Beispiele für die Anwendung von Satz 28.23 sind uneigentliche Integrale über rationale Funktionen

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

mit $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ und $m \geq n+2$, d.h. der Grad des Nennerpolynoms ist um mindestens 2 größer als der Grad des Zählerpolynoms. Wenn der Nenner keine reelle Nullstelle besitzt, folgt die Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

mit dem Majorantenkriterium 15.29. Außerdem gilt

$$R|f(Re^{i\phi})| = \left| \frac{a_n R^{n+1} e^{in\phi} + \cdots + a_1 R^2 e^{i\phi} + a_0 R}{b_m R^m e^{im\phi} + \cdots + b_1 R e^{i\phi} + b_0} \right| \approx \frac{|a_n|}{|b_m| R^{m-n-1}} \qquad \text{für großes} \quad R > 0,$$

also die gleichmäßige Konvergenz $\lim\limits_{R\to\infty} R|f(Re^{i\phi})| = 0$. Wir erhalten insgesamt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{K} \operatorname{Res}(f; z_n),$$

wobei $z_1, \ldots, z_K$ die Nullstellen des Nennerpolynoms in der oberen Halbebene sind.

Für manche Integrale kann die Voraussetzung an f abgeschwächt werden.

28.24 Satz: uneigentliche Integrale vom Fourier-Typ

Das Gebiet $M \subseteq \mathbb{C}$ enthalte die abgeschlossene obere Halbebene $\mathbb{H}_+$.
Die Teilmenge $N \subset M$ sei endlich, enthalte keine Punkte der reellen Achse und die Funktion $f : M \setminus N \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Weiter gelte für ein $R_0 > 0$

$$|zf(z)| \leq B \qquad \text{für alle} \;\; z = |z|e^{i\phi} \text{ mit } |z| \geq R_0,\; \phi \in [0, \pi].$$

Dann gilt für jedes $\omega > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, e^{i\omega x}\, dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{K} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{i\omega z}; z_n\right),$$

wobei $z_1, \ldots, z_K \in N$ sämtliche Punkte von N mit $\operatorname{Im} z > 0$ sind.

Anwendung

Die Voraussetzungen aus 28.24 sind insbesondere in diesem Fall erfüllt:
Sei $\omega > 0$ und $f(x) = e^{i\omega x}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Dabei sei der Grad von Q um mindestens eins größer als der Grad von P, und Q habe keine reellen Nullstellen. Dann ist wegen $\cos\omega x = \operatorname{Re} e^{i\omega x}$ und $\sin\omega x = \operatorname{Im} e^{i\omega x}$

$$\mathrm{CH}\int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega x\,\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \operatorname{Im}\left[2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\,(f(z), z_k)\right]$$

$$\mathrm{CH}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega x\,\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \operatorname{Re}\left[2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\,(f(z), z_k)\right]$$

28.25 Beispiel Ein kleiner Zusatztrick wird benötigt, um den Cauchy-Hauptwert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x}\,dx$$

für $\omega > 0$ zu berechnen. Dieser spielt eine wichtige Rolle bei der Hilbert-Transformation ($\to$ Signalverarbeitung). Der Cauchy-Hauptwert ist der Grenzwert von

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{i\omega x}}{x}\,dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{i\omega x}}{x}\,dx,$$

für $R \to \infty$ und $\epsilon \to 0$ (mit $\epsilon > 0$), weil

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1}{z},$$

die Polstelle $z_1 = 0$ besitzt.

28.26 Beispiel: Ein wichtiges Integral

Die Funktion $S(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ ist das Herzstück der digitalen Signalverarbeitung und wird “Sinus-Cardinalis” genannt: Ihre Funktionswerte an den ganzen Zahlen sind $S(0) = 1$ und $S(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Im Kapitel über die Fourier-Transformation zeigen wir, dass sog. *bandbeschränkte Funktionen* die Darstellung

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)}$$

besitzen, also aus den diskreten “Abtastwerten” $f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, mit Hilfe der Funktion S reproduziert werden können. Dies ist die Basis aller Analog-Digital Wandler.

Ein hierbei auftretendes Integral ist der Cauchy-Hauptwert von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Mit $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ und dem Beispiel 28.25 erhalten wir

$$\mathrm{CH} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{2i}(i\pi - (-i\pi)) = \pi.$$

Man beachte noch, dass der Integrand analytisch ist ($z_1 = 0$ ist hebbare Singularität). Also ist

$$\mathrm{CH} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

28.27 Beispiel: Fresnel-Integrale, “Chirps”

Ein ähnliches Verfahren liefert sog. *Fresnel-Integrale* vom Typ

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Die Funktionen $\sin x^2$, $\cos x^2$ sind Beispiele sog. Chirp-Signale (engl. chirp=Zwitschern). Sie beschreiben die Wellenform eines akustischen Signals mit linear wachsender Frequenz (“FM”=frequency modulated). Solche Wellenformen treten beim Doppler-Effekt (Radar-Messung) auf; die Bezeichnung geht auf die Ultraschallsignale zurück, die Fledermäuse bei der Jagd aussenden.