29: Laplace-Transformation

Motivation Wir kehren zur Behandlung reeller Funktionen zurück.
Für Funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ führen wir ein wichtiges Parameterintegral ein:

$$f(t) \longrightarrow F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt.$$

Die hierdurch definierte Funktion F heißt die *Laplace-Transformierte* von f.

- Unter geeigneten Bedingungen an f gilt für alle $s > 0$

$$f'(t) \quad \longrightarrow \quad sF(s) - f(0),$$

$$f''(t) \quad \longrightarrow \quad s^2F(s) - f'(0) - sf(0).$$

- Mit der *Linearität* der Laplace-Transformation lassen sich lineare Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen umwandeln:

$$5y'' - 3y' + 2y = f(t) \longrightarrow (5s^2 - 3s + 2)Y(s) - 5y'(0) - (5s - 3)y(0) = F(s).$$

  Anstatt der gesuchten Funktion y erhalten wir ihre Laplace-Transformierte

$$Y(s) = \frac{F(s) + 5y'(0) + (5s - 3)y(0)}{5s^2 - 3s + 2}.$$

- Die Lösung y des Anfangswertproblems mit gegebenen $y(0)$, $y'(0)$ ergibt sich nun durch Bestimmung der *inversen Laplace-Transformierten* von $Y(s)$.

29.1 Definition: zulässige Funktionen

Eine Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ ist *zulässig mit dem Parameter* $a \in \mathbb{R}$,

(i) wenn f in jedem beschränkten Intervall $[0, b]$ stückweise stetig ist sowie $f(0) = \lim\limits_{t \to 0+} f(t)$ gilt,

(ii) und wenn zusätzlich f den *Exponentialtyp* a besitzt, d.h. es existiert ein $M > 0$, so dass

$$|f(t)| \leqslant Me^{at} \quad \text{für alle} \quad t \geqslant 0$$

gilt.

29.2 Definition und Satz: Laplace-Transformierte

Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ sei zulässig mit dem Parameter a. Dann ist die *Laplace-Transformierte*

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > a$ definiert.

Beachte: Die Laplace-Transformierte ist für jedes komplexe s im Halbraum $\operatorname{Re} s > a$ definiert. Ihr Wert ist beschränkt durch $|\mathcal{L}[f](s)| \leqslant \frac{M}{\operatorname{Re} s - a}$.

Verabredungen

(i) Ist f eine Funkion, deren Laplace-Transformierte berechnet werden soll, so sei stets $f(t) = 0$ für $t < 0$.

(ii) Wenn nicht anders gesagt, wird die Laplace-Transformierte einer Funktion mit dem entsprechenden Großbuchstaben gekennzeichnet, also $F(s) := \mathcal{L}[f](s)$, $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$.
Ausnahme ist die Heaviside-Funktion $H(t)$ (siehe 29.8).

Wichtige Eigenschaften sind:

29.3 Satz: Linearität und Rechenregeln

Wenn f und g zulässige Funktionen mit dem Parameter a sind, so ist auch $h = \alpha f + \beta g$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ zulässig mit dem Parameter a, und für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > a$ gilt

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha \mathcal{L}[f](s) + \beta \mathcal{L}[g](s). \qquad \text{(Linearität)}$$

Weitere Rechenregeln für zulässiges f mit dem Parameter a sind:

(i) Skalierung: für reelles $c > 0$ sei

$$h : [0, \infty) \to \mathbb{C}, \quad h(t) = f(ct).$$

Dann gilt

$$\mathcal{L}[h](s) = \frac{1}{c} \mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{c}\right), \qquad s \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} s > ca.$$

29.3 Satz: Linearität und Rechenregeln(Forts.):

(ii) Verschiebung nach rechts: für reelles $\tau > 0$ sei

$$h : [0, \infty) \to \mathbb{C}, \quad h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqslant t < \tau \\ f(t - \tau) & \text{für } t \geqslant \tau. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\mathcal{L}[h](s) = e^{-\tau s}\mathcal{L}[f](s), \qquad s \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} s > a.$$

(iii) Multiplikation mit e^{ct}: für $c \in \mathbb{C}$ sei

$$h : [0, \infty) \to \mathbb{C}, \quad h(t) = e^{ct} f(t).$$

Dann gilt

$$\mathcal{L}[h](s) = \mathcal{L}[f](s - c), \qquad s \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} s > a + \operatorname{Re} c.$$

Weitere Rechenregeln betreffen die Ableitungen und die Stammfunktion von f.

29.4 Laplace-Transformierte der Ableitung

Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ sei r-mal differenzierbar und $f, f', \ldots, f^{(r)}$ seien zulässig mit dem gleichen Parameter $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > a$

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0),$$

und allgemein für $r \geqslant 1$

$$\mathcal{L}[f^{(r)}](s) = s^r \mathcal{L}[f](s) - s^{r-1} f(0) - \cdots - s f^{(r-2)}(0) - f^{(r-1)}(0).$$

29.5 Laplacetransformation der Stammfunktion

Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ sei zulässig mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$. Dann ist die Stammfunktion

$$g(t) = \int_0^t f(u)\,du, \qquad t \geqslant 0,$$

zulässig mit jedem Parameter $c > \tilde{a} = \max\{a, 0\}$ und für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > \tilde{a}$ gilt

$$\mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s).$$

29.6 Satz: Holomorphie von $\mathcal{L}[f]$

Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ sei zulässig mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.
Dann ist die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[f] : \mathbb{H}_a = \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} s > a\} \to \mathbb{C}$ holomorph in der Halbebene $\mathbb{H}_a$. Ihre komplexe Ableitung ist

$$(\mathcal{L}[f(t)])'(s) = -\int_0^\infty tf(t)e^{-st}\,dt = -\mathcal{L}[tf(t)])(s) =: \mathcal{L}[h(t)](s)$$

und damit selbst die Laplace-Transformierte der Funktion $h(t) = -tf(t)$.
Es ist also $\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s)$.

29.7 Tabellen von Laplace-Transformationen

Parameter	$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$	Einschränkung
$n \in \mathbb{N}_0$	t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$\operatorname{Re} s > 0$
$n \in \mathbb{N}_0,\ c \in \mathbb{C}$	$t^n e^{ct}$	$\dfrac{n!}{(s-c)^{n+1}}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} c$
$\omega \in \mathbb{R}$	$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} s > 0$
$\omega \in \mathbb{R}$	$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} s > 0$
$\omega \in \mathbb{R}$	$\sinh(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\operatorname{Re} s > \lvert\omega\rvert$
$\omega \in \mathbb{R}$	$\cosh(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	$\operatorname{Re} s > \lvert\omega\rvert$
$\omega \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{C}$	$e^{ct}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s-c)^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} c$
$\omega \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{C}$	$e^{ct}\cos(\omega t)$	$\dfrac{s-c}{(s-c)^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} c$

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$	Einschränkung
$e^{ct}\sinh(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s-c)^2-\omega^2}$	$\operatorname{Re} s > \lvert\omega\rvert + \operatorname{Re} c$
$e^{ct}\cosh(\omega t)$	$\dfrac{s-c}{(s-c)^2-\omega^2}$	$\operatorname{Re} s > \lvert\omega\rvert + \operatorname{Re} c$
$te^{ct}\sin(\omega t)$	$\dfrac{2\omega(s-c)}{((s-c)^2+\omega^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} c$
$te^{ct}\cos(\omega t)$	$\dfrac{1}{(s-c)^2+\omega^2} - \dfrac{2\omega^2}{((s-c)^2+\omega^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} c$
$te^{ct}\sinh(\omega t)$	$\dfrac{2\omega(s-c)}{((s-c)^2-\omega^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > \lvert\omega\rvert + \operatorname{Re} c$
$te^{ct}\cosh(\omega t)$	$\dfrac{1}{(s-c)^2-\omega^2} + \dfrac{2\omega^2}{((s-c)^2-\omega^2)^2}$	$\operatorname{Re} s > \lvert\omega\rvert + \operatorname{Re} c$

Parameter: $\omega \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{C}$

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$	Einschr.
Sprungfunktion: $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \tau \\ 1, & t \geqslant \tau \end{cases}$	$\dfrac{e^{-\tau s}}{s}$	$\operatorname{Re} s > 0$
Indikatorfunktion: $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \tau \\ 1, & \tau < t \leqslant \tau + \delta \\ 0, & t \geqslant \tau + \delta \end{cases}$	$\dfrac{e^{-\tau s} - e^{-(\tau+\delta)s}}{s}$	$s \in \mathbb{C}$
Hutfunktion: $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \tau \\ t - \tau, & \tau \leqslant t < \tau + \delta \\ \tau + 2\delta - t, & \tau + \delta \leqslant t < \tau + 2\delta \\ 0, & t \geqslant \tau + 2\delta \end{cases}$	$\dfrac{e^{-\tau s} - 2e^{-(\tau+\delta)s} + e^{-(\tau+2\delta)s}}{s^2}$	$s \in \mathbb{C}$

Parameter: $\tau \geqslant 0$, $\delta > 0$

Bei den beiden letzten Beispielen ist $s = 0$ hebbare Singularität.

Zur Darstellung von Treppenfunktionen ist die folgende Definition hilfreich.

29.8 Definition: Heaviside-Funktion, Indikatorfunktion

Die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

heißt *Heaviside-Funktion*. Für $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ mit $\tau_1 < \tau_2$ nennen wir die Funktion

$$\mathbb{1}_{[\tau_1,\tau_2)}(t) = H(t-\tau_1) - H(t-\tau_2) = \begin{cases} 0, & t < \tau_1 \\ 1, & \tau_1 \leqslant t < \tau_2 \\ 0, & t \geqslant \tau_2 \end{cases}$$

die *Indikatorfunktion* des Intervalls $[\tau_1, \tau_2)$.

Für die Laplace-Transformation sind diese Funktionen jeweils auf $[0, \infty)$ einzuschränken.

Hiermit lassen sich Treppenfunktionen einfach darstellen:
für $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \cdots$ ist eine Treppenfunktion gegeben durch

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1 \mathbb{1}_{[\tau_1,\tau_2)}(t) + c_2 \mathbb{1}_{[\tau_2,\tau_3)}(t) + c_3 \mathbb{1}_{[\tau_3,\tau_4)}(t) + \cdots \\ &= c_1 H(t-\tau_1) + (c_2 - c_1) H(t-\tau_2) + (c_3 - c_2) H(t-\tau_3) + \cdots \end{aligned}$$

Hierbei sind c_k die Funktionswerte der Treppenfunktion im Intervall $[\tau_k, \tau_{k+1})$ und $(c_k - c_{k-1})$ ist die Sprunghöhe an der Stelle τ_k.

Die Laplacetransformierte erhält man als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](s) &= \frac{c_1(e^{-\tau_1 s} - e^{-\tau_2 s}) + c_2(e^{-\tau_2 s} - e^{-\tau_3 s}) + c_3(e^{-\tau_3 s} - e^{-\tau_4 s}) + \cdots}{s} \\ &= \frac{c_1 e^{-\tau_1 s} + (c_2 - c_1) e^{-\tau_2 s} + (c_3 - c_2) e^{-\tau_3 s} + \cdots}{s}. \end{aligned}$$

Das Verfahren wird an einem Beispiel erklärt.

29.9 Lösung linearer Dgl. mit konstanten Koeffizienten

Beispiel: $y'' - 3y' + 2y = 0$

Laplacetransformation ergibt

$$\Big(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\Big) - 3\Big(sY(s) - y(0)\Big) + 2Y(s) = 0$$
$$\iff Y(s)(s^2 - 3s + 2) = sy(0) + (y'(0) - 3y(0))$$
$$\iff Y(s) = \frac{sy(0) + (y'(0) - 3y(0))}{s^2 - 3s + 2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}$$

Damit kann man für jede Wahl der Anfangswerte die Konstante A und B bestimmen und damit durch die Verwendung der Tabelle die (eindeutige) Lösung der Dgl. bestimmen; z.B. erhält man für $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$

$$Y(s) = \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s-2}, \text{ also } y(t) = -e^t + e^{2t}.$$

29.10 Inhomogene lineare Dgl. Die inhomogene lineare Dgl.

$$y'' + 2py' + qy = f(t), \qquad p, q \in \mathbb{R},$$

führt auf

$$(s^2 + 2ps + q)Y(s) - (s + 2p)y(0) - y'(0) = F(s)$$

$$\Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{(s + 2p)y(0) + y'(0) + F(s)}{s^2 + 2ps + q}.$$

Hier taucht also ein zusätzlicher Summand

$$Y_p(s) := \frac{F(s)}{s^2 + 2ps + q}$$

auf, der zu einer speziellen Lösung y_p der inhomogenen Dgl. gehört.

Die speziellen rechten Seiten $f(t)$ in 22.14 (Polynome, Cosinus-, Sinus- und Exponentialfunktion) führen auf eine rationale Funktion $F(s)$. Die Berechnung von y erfolgt also wieder anhand der Zerlegung des Bruchs in Terme der Tabelle 29.7.

Ein allgemeiner Zugang zur inhomogenen linearen Dgl. wird mit Hilfe der Faltung beschrieben.

29.11 Definition und Satz: Faltung (I)

Die Funktionen $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ seien zulässig mit dem Parameter a. Dann heißt die Funktion $f * g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ mit

$$f * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du, \qquad t \in [0, \infty),$$

die *Faltung* von f und g. Diese Funktion ist zulässig mit jedem Parameter $c > a$.

29.12 Eigenschaften der Faltung, Faltungssatz

(i) Die Faltung von zulässigen Funktionen $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ erfüllt die Rechenregeln einer 'Multiplikation', also die Kommutativität, Assoziativität, und Distributivität:

$$\begin{aligned} f * g &= g * f \\ f * (g * h) &= (f * g) * h \\ f * (g + h) &= (f * g) + (f * h). \end{aligned}$$

(ii) Es gilt der *Faltungssatz*: Die Laplace-Transformierte eines "Faltungsprodukts" zulässiger Funktionen $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ mit dem Parameter a ist das Produkt der Laplace-Transformierten:

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s)\ \mathcal{L}[g](s), \qquad \operatorname{Re} s > a.$$

29.13 Satz: Lösung inhomogener linearer Differentialgleichungen

Die Funktion $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (AWP) zur homogenen linearen Dgl. mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + 2py' + qy = 0, \qquad \boxed{y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.}$$

Falls $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ zulässig mit dem Parameter a ist, so ist $y = \phi * f$ die eindeutige Lösung des AWP zur inhomogenen Dgl.

$$y'' + 2py' + qy = f(t), \qquad \boxed{y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.}$$

Eine entsprechende Aussage gilt für lineare Dgl. höherer Ordnung:
Die Lösung des Anfangswertproblems der Dgl. mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \quad y^{(n-1)}(0) = \cdots = y'(0) = y(0) = 0$$

ist gegeben durch $y = \phi * f$, wobei ϕ das AWP

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad y^{(n-2)}(0) = \cdots = y'(0) = y(0) = 0,$$

$y^{(n-1)}(0) = 1$ löst.

Hier macht es keine Schwierigkeiten, auch mit unstetigen Inhomogenitäten zu rechnen.

29.14 Satz: Lösung von Differentialgleichungssystemen

Das Vektorfeld $\vec{y} : [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ sei eine Lösung des inhomogenen Systems von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$(\vec{y})'(t) = A\,\vec{y}(t) + \vec{f}(t)$$

mit $\vec{f} : [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ und der komplexen Koeffizientenmatrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$. Mit b bezeichnen wir den maximalen Realteil aller Eigenwerte von A. Wenn die Komponenten $f_k : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ von $\vec{f}$ zulässig mit dem Parameter a sind, so sind die Komponenten von $\vec{y}$ zulässig mit jedem Parameter $c > \max\{a, b\}$, und für die Vektoren $\vec{Y}$ bzw. $\vec{F}$ der Laplace-Transformierten gilt

$$s\vec{Y}(s) - \vec{y}(0) = A\,\vec{Y}(s) + \vec{F}(s), \qquad \operatorname{Re} s > \max\{a, b\}.$$

An mehreren Stellen wurde von der Laplace-Transformierten $F(s)$ auf die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ geschlossen. Ist dies überhaupt erlaubt?

Frage: Ist f durch $\mathcal{L}[f]$ eindeutig bestimmt?

29.15 Inverse Laplace-Transformation, Umkehrformel

Man kann hierzu eine "Umkehrformel" beweisen, mit der $f(t)$ aus den Werten der Laplace-Transformierten $\mathcal{L}[f](s)$ entlang einer Geraden parallel zur $Im\, s$-Achse berechnet wird. Die Formel lautet für geeignetes f, das zulässig mit dem Parameter a ist:

$$\frac{1}{2\pi}\ \mathrm{CH} \int_{-\infty}^{\infty} F(s+iy)\ e^{t(s+iy)}\, dy = \frac{1}{2}\left(f(t-) + f(t+)\right).$$

Die Methoden zur Integration komplexer Funktionen lassen weitere Darstellungen der Umkehrformel zu.

29.16 Inverse Laplace-Transformation als komplexes Kurvenintegral

Die inverse Laplace-Transformation in Satz 29.15 besitzt die Darstellung als komplexes Kurvenintegral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \mathcal{L}[f](z)\ e^{tz}\ dz$$

wobei C die Kurve $\vec{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\vec{c}(y) = s + iy$ mit festem $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > a$ bezeichnet.

29.17 Berechnung mit dem Residuensatz

Unter den folgenden Voraussetzungen lässt sich das Integral mit dem Residuensatz berechnen:

- $\mathcal{L}[f]$ lässt sich zu einer holomorphen Funktion

$$\widetilde{F} : \mathbb{C} \backslash \{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$$

  fortsetzen, wobei $z_1, \ldots, z_n$ isolierte Singularitäten mit $\operatorname{Re} z_k \leqslant a$ sind,
- für ein $R_0 > 0$ und ein $c > a$ gilt

$$|z\widetilde{F}(z)| \leqslant B \qquad \text{für alle } \; z \; \text{ mit } \; \operatorname{Re} z \leqslant c, \;\; |z - c| \geqslant R_0.$$

Dann gilt für $t > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \mathcal{L}[f](z) \; e^{tz} \; dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\widetilde{F}(z) e^{tz}; z_k\right).$$

29.18 Folgerung

Jede zulässige und stetige Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist durch ihre Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[f]$ eindeutig bestimmt. Die Zuordnung

$$\mathcal{L}[f] \to f$$

heißt *inverse Laplace-Transformation*.

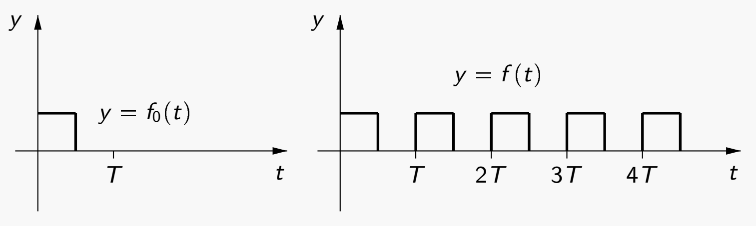
Bemerkung: Ist $\mathcal{L}[f]$ bekannt, so findet man f üblicherweise durch Zuhilfenahme von Tabellen; dabei nutzt man die Linearität von $\mathcal{L}$ aus.

Ist $\mathcal{L}[y]$ eine rationale Funktion, so berechnet man entweder

(a) die Partialbruchzerlegung mit den komplexen Nullstellen des Nenners. Dies führt auf Terme, deren inverse Laplace-Transformierte das Produkt aus einem Polynom und einer Exponentialfunktion ist,

oder

(b) Terme im Nenner wie z.B. $s^2 \pm \omega^2$ mit reellem ω; dies führt zu Produkten aus einem Polynom und einer Sinus-, Cosinus- oder Hyperbelfunktion, siehe Tab. 29.7 und Beispiel danach.



29.19 Transformation periodischer Funktionen

Sei $f_0(t)$ zulässig und $F_0(s)$ die Laplacetransformierte von f_0.
Die T-periodische Fortsetzung von f_0 ist definiert als

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_0(t - kT).$$

Dann ist die Laplacetransformierte von f durch $F(s) = \dfrac{F_0(s)}{1 - e^{-Ts}}$ gegeben.