30: Fourier-Transformation

30.1 Motivation Im letzten Kapitel wurde die Laplace-Transformation

$$f(t) \longrightarrow F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt, \qquad s \in \mathbb{C},$$

für Funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ definiert.

Wir behandeln nun Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Das verwandte Parameterintegral

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\omega t}\,dt, \qquad \omega \in \mathbb{R},$$

definiert die Fouriertransformierte von f. Hier wird also

- ein "beidseitiges" uneigentliches Integral gebildet und
- der Parameter $s = i\omega$ mit $\operatorname{Re} s = 0$ verwendet.

Eine enge Verwandtschaft besteht auch zu den Koeffizienten 32.6 der komplexen Fourierreihe einer periodischen Funktion

$$c_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\frac{2\pi ikt}{T}}\,dt, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

30.2 Definition: absolut-integrierbare und quadrat-integrierbare Funktionen

(i) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *absolut-integrierbar*, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

gilt. Die L_1-Norm von f ist dann $\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$.

(ii) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *quadrat-integrierbar*, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt < \infty$$

gilt. Die L_2-Norm von f ist dann $\|f\|_2 := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$.

Bemerkung: Wir werden den Norm-Begriff im folgenden Kapitel über normierte Vektorräume genauer kennenlernen.

30.3 Definition und Satz: Fourier-Transformierte

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei absolut-integrierbar. Dann ist die *Fourier-Transformierte*

$$\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ definiert.

Bemerkung: Alternativ wird in Büchern u.a. auch die Definition

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i\omega t}\, dt \quad \text{oder} \quad \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

verwendet. Man muss beim Vergleich verschiedener Quellen genau auf die Definition achten. Ebenso ist die Normierung durch Vorfaktoren unterschiedlich.

30.4 Eigenschaften der Fouriertransformation

Spezielle Eigenschaften für reelles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgen aus der einfachen Beziehung

$$\overline{e^{-i\omega t}} = e^{i\omega t}, \qquad \omega, t \in \mathbb{R}.$$

(i) Falls f reellwertig ist, so gilt $\overline{f(t)e^{-i\omega t}} = f(t)e^{i\omega t}$.
Also erfüllt die Fouriertransformierte die Beziehung

$$\widehat{f}(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt = \overline{\widehat{f}(\omega)}.$$

(ii) Falls f reellwertig und gerade ist, so gilt

$$\widehat{f}(-\omega) = \widehat{f}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt.$$

Insbesondere ist dann $\widehat{f}$ reellwertig.

(iii) Falls f reellwertig und ungerade ist, so gilt

$$\widehat{f}(-\omega) = -\widehat{f}(\omega) = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt.$$

Insbesondere ist dann $\widehat{f}$ rein imaginär.

Wegen $\left|e^{-i\omega t}\right| = 1$ für $\omega \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\widehat{f}(\omega)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1,$$

die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$ einer absolut-integrierbaren Funktion ist also beschränkt.

Insbesondere ist $\widehat{f}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$.

Es gilt sogar der wichtige Satz:

30.5 Satz von Riemann-Lebesgue

Die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$ einer absolut-integrierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist gleichmäßig stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und es gilt

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \widehat{f}(\omega) = 0.$$

Bemerkung: Mit den Rechenregeln für differenzierbares f erhält man sogar eine Abnahme-Geschwindigkeit von $\widehat{f}(\omega)$, wie bei den Fourier-Koeffizienten in 32.12.

Wichtige Eigenschaften sind:

30.6 Satz: Linearität und Rechenregeln

Wenn f und g absolut-integrierbare Funktionen sind, so ist auch $h = \alpha f + \beta g$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ absolut-integrierbar, und für alle $\omega \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g](\omega) = \alpha \widehat{f}(\omega) + \beta \widehat{g}(\omega). \qquad \text{(Linearität)}$$

Weitere Rechenregeln sind:

(i) Skalierung: für reelles $c > 0$ sei

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad h(t) = f(ct).$$

Dann gilt

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{c} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right), \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

30.6 Satz: Linearität und Rechenregeln(Forts.):

(ii) Verschiebung: für $\tau \in \mathbb{R}$ sei

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad h(t) = f(t - \tau).$$

Dann gilt

$$\widehat{h}(\omega) = e^{-i\tau\omega}\widehat{f}(\omega), \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

(iii) Modulation: für $\eta \in \mathbb{R}$ sei

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad h(t) = e^{i\eta t} f(t).$$

Dann gilt

$$\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega - \eta), \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

Weitere Rechenregeln betreffen die Ableitungen und die Stammfunktion von f.

30.7 Satz: Transformierte der Ableitung

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei r-mal differenzierbar und $f, f', \dots, f^{(r)}$ seien absolut-integrierbar. Dann gilt

$$\mathcal{F}[f^{(r)}](\omega) = (i\omega)^r \; \hat{f}(\omega), \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

30.8 Satz: Transformierte der Stammfunktion

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei absolut-integrierbar und erfülle die "Momentenbedingungen"

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt &= 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|\,dt &< \infty. \end{aligned}$$

Dann ist die Stammfunktion

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,du, \qquad t \in \mathbb{R},$$

absolut-integrierbar und es gilt

$$\widehat{F}(\omega) = \frac{\widehat{f}(\omega)}{i\omega} \qquad \text{für} \quad \omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Die Differenzierbarkeit von $\hat{f}$ folgt ebenfalls aus einer Momentenbedingung:

30.9 Satz: Ableitung von $\hat{f}$

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei absolut-integrierbar und erfülle die Momentenbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|\, dt < \infty.$$

Dann ist die Fourier-Transformierte $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-it) f(t)\ e^{-i\omega t}\, dt.$$

Die Ableitung $\frac{d}{d\omega}\hat{f}$ ist also selbst die Fourier-Transformierte der Funktion $h(t) = -it\, f(t)$.

Beweis: Die stetige Differenzierbarkeit und die Form der Ableitung folgt wieder aus allgemeinen Sätzen über Parameterintegrale.

Für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die

$$f(t) = 0 \qquad \text{für alle} \qquad t < 0$$

gilt, ist der Zusammenhang der Fourier-Transformation und der Laplace-Transformation offensichtlich.

30.10 Satz: Fourier- und Laplacetransformation

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei absolut-integrierbar und es gelte

$$f(t) = 0 \qquad \text{für alle} \qquad t < 0.$$

Die Einschränkung $\widetilde{f} = f\,|_{[0,\infty)}$ sei zulässig mit einem Parameter $a < 0$ (siehe Definition 29.1). Dann gilt

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{L}[\widetilde{f}](i\omega).$$

30.11 Wichtiges Beispiel: Gaußsche Glockenkurve

Sei $\sigma > 0$. Die Funktion

$$G_\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad G_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma\pi}} e^{-t^2/\sigma}$$

hat die Fourier-Transformierte

$$\widehat{G}_\sigma(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma\omega^2/4} = \sqrt{\frac{2}{\sigma}} G_{4/\sigma}(\omega), \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

Speziell für $\sigma = 2$ erhalten wir

$$\mathcal{F}\left[G_2(t)\right](\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\right](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/2} = G_2(\omega).$$

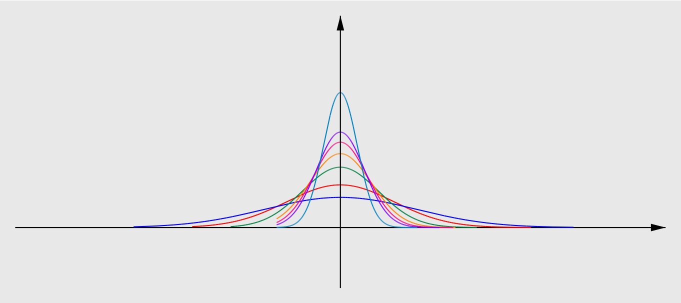
Immer gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_\sigma(t)\, dt = 1.$$

Bemerkung: Die Fourier-Transformierte einer Gaußschen Glockenkurve ist also wieder eine Gaußsche Glockenkurve.

$G_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ ist eine *Eigenfunktion* der Fouriertransformation zum Eigenwert 1.

Bilder von Glockenkurven $y(t) = G_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} e^{-t^2/\sigma}$.



Je kleiner σ ist, desto höher und schmaler wird der Graph der Funktion.
Für große Werte von σ wird der Graph breit und flach.

Für zwei Funktionen f, g mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ wird die Faltung neu definiert (vgl. 29.11).

30.12 Definition und Satz: Faltung (II)

Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ seien absolut-integrierbar. Dann heißt die Funktion $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)\,du, \qquad t \in \mathbb{R},$$

die *Faltung* von f und g. Diese Funktion ist für “fast alle” $t \in \mathbb{R}$ definiert (also bis auf eine Nullmenge) und sie ist selbst wieder absolut-integrierbar.

30.13 Satz: Eigenschaften der Faltung:

Die Faltung absolut-integrierbarer Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt die Rechenregeln einer 'Multiplikation', also die Kommutativität, Assoziativität, und Distributivität:

$$\begin{aligned} f * g &= g * f \\ f * (g * h) &= (f * g) * h \\ f * (g + h) &= (f * g) + (f * h). \end{aligned}$$

30.14 Faltungssatz

Die Fourier-Transformierte eines "Faltungsprodukts" absolut-integrierbarer Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist das Produkt der Fourier-Transformierten:

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \sqrt{2\pi}\ \hat{f}(\omega)\ \hat{g}(\omega), \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

Wichtig für die Umkehrung der Fouriertransformation ist dieser Satz:

30.15 Satz: Konvergenz der Faltungskerne

Mit $\sigma > 0$ und $G_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma\pi}} e^{-t^2/\sigma}$ gilt für jede stetige und absolut-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\lim_{\sigma \to 0} (f * G_\sigma)(t) = f(t) \qquad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wie schon bei der Laplace-Transformation stellt sich auch hier die

Frage: Ist die Funktion f durch ihre Fourier-Transformierte $\hat{f}$ eindeutig bestimmt?

Wir werden hierzu wieder eine "Umkehrformel" beweisen:

30.16 Satz: Inverse Fourier-Transformation

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei stetig und absolut-integrierbar. Wenn auch $\hat{f}$ absolut-integrierbar ist, so gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = f(t).$$

Damit ist

$$f(t) = \hat{\hat{f}}(-t).$$

Schreibweise: $g = \hat{f} \iff f = \check{g}$.

30.17 Tabelle einiger Rechenregeln

Eigenschaft	Funktion $f(t)$	Transformierte $\hat{f}(\omega)$	Eigenschaft	Funktion $f(t)$	Transformierte $\hat{f}(\omega)$
Translation	$f(t-\tau)$	$e^{-i\tau\omega}\hat{f}(\omega)$	Konjugierte	$\overline{f(t)}$	$\overline{\hat{f}(-\omega)}$
Modulation	$e^{i\eta t}f(t)$	$\hat{f}(\omega-\eta)$ f reell	$f = \mathrm{Re}\, f$	$\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$	
Skalierung	$f(ct)$	$\frac{1}{\lvert c\rvert}\hat{f}(\omega/c)$	Faltung	$(f * g)(t)$	$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$
Ableitung	$f^{(k)}(t)$	$(i\omega)^k\hat{f}(\omega)$	Produkt	$f(t)g(t)$	$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\hat{f} * \hat{g}(\omega)$
Ableitung	$(-it)^k f(t)$	$\frac{d^k}{d\omega^k}\hat{f}(\omega)$	Inverse	$\hat{f}(t)$	$f(-\omega)$

Nicht für jede Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ existiert das uneigentliche Integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\omega} \, dt, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

Zur Definition der Fourier-Transformierten verwenden wir den Trick aus Beweis der Inversionsformel.

30.18 Definition und Satz: Fourier-Transformation in L_2

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei quadrat-integrierbar. Dann ist die *Fourier-Transformierte*

$$\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, e^{-(\alpha t)^2} \, dt$$

für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$ definiert.

Falls f absolut-integrierbar ist, so stimmt der hier definierte Wert mit $\hat{f}(\omega)$ in Definition der Fouriertransformation überein.

Die Linearität 30.6, der Satz von Riemann-Lebesgue 30.5 und die Umkehrformel 30.16 beschreiben wesentliche Eigenschaften der Fourier-Transformation

$$\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}).$$

Eine noch viel stärkere Eigenschaft für quadrat-integrierbare Funktionen besagt, dass die L_2-Norm von f erhalten bleibt.

30.19 Satz: Parseval-Identität

Für jede quadrat-integrierbare Funktion f ist auch die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$ quadrat-integrierbar, und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 \, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt.$$

Mit anderen Worten: Die lineare Abbildung

$$\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}), \qquad \mathcal{F}[f] = \widehat{f}$$

ist eine *Isometrie*.

Die Parseval-Identität 30.19 ist äquivalent zur Formel von Plancherel:

$$\langle f, g\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle.$$

Für $f = g$ ist dies ja die Parseval-Identität.

Zwei wichtige Anwendungen der Fourier-Transformation auf $L_2(\mathbb{R})$ sollen dieses Kapitel beschließen:

- das Abtasttheorem nach Shannon, Whittaker,
- die Unschärferelation von Heisenberg.

Abstasttheorem

30.20 Definition: bandbeschränkte Funktione

Eine quadrat-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt

bandbeschränkt mit der Bandbreite $B > 0$,

wenn

$$\widehat{f}(\omega) = 0 \qquad \text{für} \quad |\omega| > 2\pi B \quad \text{gilt.}$$

Wichtiges Beispiel: Die wichtigste bandbeschränkte Funktion mit der Bandbreite B ist

$$S_B(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{2\pi iBt} - e^{-2\pi iBt}}{2\pi it} = \dfrac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t}, & t \neq 0, \\ 2B, & t = 0. \end{cases}$$

Ihre Fourier-Transformierte ist die Indikatorfunktion

$$\widehat{S}_B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{1}_{(-2\pi B, 2\pi B)}(\omega).$$

Nachweis mit der Umkehrformel 30.16 und der Rechnung in Beispiel mit der Indikatorfunktion.

30.21 Abtasttheorem

Jede bandbeschränkte Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ lässt sich zu einer ganzen Funktion (also einer holomorphen Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) in den Definitionsbereich $\mathbb{C}$ fortsetzen.

Besitzt f die Bandbreite $B > 0$, so gilt die Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{2B}\right) \frac{\sin \pi\,(2Bt-k)}{\pi\,(2Bt-k)}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

wobei die Reihe im Sinne der L_2-Norm konvergiert.

Bemerkung: Die Funktion $\dfrac{\sin \pi\,(2Bt-k)}{\pi\,(2Bt-k)} = \dfrac{S_B(t-k/2B)}{2B}$ hat den Grenzwert 1 an der Stelle $t = k/2B$ und den Wert 0 an allen Stellen $t = \ell/2B$ mit $\ell \in \mathbb{Z}\backslash\{k\}$.

Setzen wir also $t = k/2B$ ein, so tritt nur der eine Summand

$$f\left(\frac{k}{2B}\right) \frac{S_B(0)}{2B} = f\left(\frac{k}{2B}\right)$$

der Reihe auf. Die Reihe gibt also an, wie eine Funktion f zwischen ihren Funktionswerten $f(k/2B)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ "interpoliert" werden muss, damit f bandbeschränkt ist.

Der Wert $2B$ wird als Abtastrate zur Bandbreite B bezeichnet.

Von ganz anderer Art ist die Aussage zur Unschärferelation. Wir betrachten nun Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\|f\|_2 = 1$.
Die "Streuung" (engl. dispersion) von f um einen Punkt t_0 wird gemessen als

$$\Delta(f; t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |f(t)|^2 \, dt.$$

Dieser Ausdruck wird minimal, wenn t_0 das sog. 1. Moment ist:

$$t_0 = \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 \, dt.$$

Ableitung nach t_0 ergibt als Bedingung für ein Minimum $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} -2(t - t_0)|f(t)|^2 \, dt = 0$, also $\displaystyle t_0 \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} t|f(t)|^2 \, dt$, und wegen $\|f\|_2 = 1$ folgt daraus die Behauptung.
Genau so definiert man für $\hat{f}$ und ω_0 die Streuung $\displaystyle\Delta(\hat{f}; \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 \, d\omega$, die für $\displaystyle\omega_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 \, d\omega$ minimal wird.
Man beachte dabei, dass $\|\hat{f}\|_2 = 1$ wegen der Parseval-Identität gilt.

30.23 Satz: Unschärferelation

Für jedes $f \in L_2(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_2 = 1$ und alle t_0, ω_0 gilt

$$\Delta(f;t_0)\ \Delta(\widehat{f};\omega_0) \geqslant \frac{1}{4}.$$

D.h. das Produkt aus der Streuung von f im Zeitbereich und im Frequenzbereich kann den Wert $1/4$ nicht unterschreiten.

Beispiel: Die Gaußsche Glockenkurve $f(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\ e^{-t^2/2}, \qquad t \in \mathbb{R},$

hat die L_2-Norm 1 und die Streuung (um $t_0 = 0$)

$$\Delta(f;0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} t\cdot 2te^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}.$$

Die Fouriertransformierte lautet nach 30.11 $\widehat{f}(\omega) = f(\omega)$.
Damit ergibt sich auch

$$\Delta(\widehat{f};0) = \frac{1}{2}.$$

In diesem Beispiel wird also die untere Schranke angenommen!

30.24 Bemerkung Die untere Schranke $\frac{1}{4}$ wird mit $t_0, \omega_0 \in \mathbb{R}$ genau dann angenommen, wenn f eine modulierte, verschobene und skalierte Gaußsche Glockenfunktion ist:

$$f(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} \, e^{-\beta(t-t_0)^2}$$

mit $\beta > 0$. Dabei ist $C_1 \in \mathbb{C}$ eine Konstante, die zu $\|f\|_2 = 1$ passt.