31: Normierte Vektorräume

Für eine systematische Behandlung von Grenzwert-Prozessen für Funktionenfolgen benötigen wir die allgemeine Definition der normierten Vektorräume und einen passenden Abstandsbegriff.

Hierauf aufbauend behandeln wir im Weiteren (auch HM IV)

- die Fourier-Reihen
- den Banachschen Fixpunktsatz und seine Anwendungen

Ein Teil der hier zusammengestellten Begriffe und Sätze wurde bereits im Kapitel über allgemeine Vektorräume definiert und bewiesen.
Daher enthält dieser Abschnitt zum Teil Wiederholungen.
Wieder werden Vektoren ohne Pfeil geschrieben.

Wir wollen

- weitere Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$
- Normen auf vielen weiteren Vektorräumen, z.B. dem Vektorraum der stetigen Funktionen $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$ bzw. $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$

kennenlernen.

31.1 Wiederholung: Norm, normierter Raum, vgl. 6.8

Es sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Definitheit: $\|v\| \geqslant 0$ für alle $v \in V$, und ($\|v\| = 0 \iff v = 0$),

(ii) pos. Homogenität: $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ und $v \in V$,

(iii) Dreiecksungleichung: $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$.

Ein Vektorraum V mit einer Norm $\|\cdot\|$ heißt ein *normierter Raum*.

Bemerkungen: Die Norm liefert einen Abstands-Begriff:

- $\|v\|$ ist der Abstand des Vektors v vom Nullpunkt $0 \in V$.
- $\|v - w\|$ ist der Abstand der beiden Vektoren v und w

Genau wie es in 1.23(f) für den Betrag gemacht wurde, beweist man die *zweite Dreiecksungleichung*: In jedem normierten Raum gilt die Ungleichung

$$\|v - w\| \geqslant \big| \, \|v\| - \|w\| \, \big| .$$

31.2 Beispiele von Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$

- *Euklidische Norm*: $\|x\| = \|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$
- *Maximumsnorm*: $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$
- *Betragssummennorm*: $\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$
- Allgemein: für $1 \leqslant p < \infty$ die sog. *p-Norm*

$$\|x\|_p := \left(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung für die p-Normen benötigt man die *Hölder-Ungleichung.*

31.3 Satz: Hölder- und Minkowski-Ungleichung

Wir definieren

- zu $1 < p < \infty$ den *konjugierten Exponenten* $q = \frac{p}{p-1}$ (also ist $1 < q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$),
- zu $p = 1$ den konjugierten Exponenten $q = \infty$ und zu $p = \infty$ den konjugierten Exponenten $q = 1$.

Dann gilt für beliebige Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \|x\|_p \, \|y\|_q.$$

Daraus folgt die Dreiecksungleichung, die hier *Minkowski-Ungleichung* heißt:

$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

31.4 Weitere Beispiele von Normen

Der Vektorraum aller stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $I = [a, b]$ wurde mit $C[a, b]$ bezeichnet . Wir definieren verschiedene Normen auf diesem Vektorraum:

- *Maximumsnorm*: $\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$.
- für $1 \leqslant p < \infty$ die L_p-Norm:

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} .$$

  Auch diese Norm ist wohldefiniert.

Mit der Monotonie folgt

$$\left| \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ |g(x)|\, dx \leqslant \|f\|_\infty \int_a^b |g(x)|\, dx \leqslant \|f\|_\infty\ \|g\|_1.$$

Dies ist eine Version der Hölder-Ungleichung für Integrale. Allgemein:

31.5 Satz: Hölder- und Minkowski-Ungleichung auf $C[a, b]$

Zu $1 \leqslant p \leqslant \infty$ sei q der konjugierte Exponent wie in 31.3. Dann gilt für stetige Funktionen $f, g \in C[a, b]$

$$\left| \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx \right| \leqslant \|f\|_p\ \|g\|_q.$$

Weiter gilt $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$

Nach den Überlegungen zur *Geometrie* normierter Räume kommen wir noch zur *Topologie* dieser Räume: Die Norm beinhaltet den Abstandsbegriff und ermöglicht die Einführung der Begriffe der Analysis wie im $\mathbb{R}^n$:

31.6 Konvergenz von Folgen und Reihen

Eine Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Elementen v_k des normierten Raumes V heißt *konvergent* gegen $v \in V$, wenn gilt

$$\lim_{k\to\infty} \|v - v_k\| = 0.$$

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ mit Summanden $v_k \in V$ heißt *konvergent* gegen $w \in V$, wenn gilt

$$\lim_{N\to\infty} \left\| w - \sum_{k=1}^{N} v_k \right\| = 0.$$

Eine Teilmenge W eines normierten Raumes V heißt *dicht*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $v \in V$ ein $w \in W$ gibt mit $\|v - w\| < \varepsilon$.

Bemerkung: 31.7 Äquivalente Normen

Zwei Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ auf einem Vektorraum heißen *äquivalent*, wenn $\|v - v_k\|_1 \to 0$ zu $\|v - v_k\|_2 \to 0$ äquivalent ist.
Das ist genau dann der Fall, wenn es positive Konstanten C_1 und C_2 gibt, so dass für alle v im Vektorraum gilt

$$C_1\|v\|_1 \leqslant \|v\|_2 \leqslant C_2\|v\|_1.$$

(a) Alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind *äquivalent*: Die Konvergenz $\lim_{k\to\infty} v_k = v$ bzgl. einer Norm (z.B. der Maximums-Norm) zieht sofort die Konvergenz bezüglich aller anderen Normen nach sich:

$$\lim_{k\to\infty} \|v - v_k\|_p = 0 \quad \text{für alle} \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Dies folgt aus den Ungleichungen

$$\|v\|_\infty \leqslant \|v\|_p \leqslant n^{1/p}\|v\|_\infty.$$

(b) Die L_p-Normen auf $C[a,b]$ sind **nicht** äquivalent.

- Die Maximumsnorm ($p = \infty$) führt auf den Konvergenzbegriff der *gleichmäßigen Konvergenz*:

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{k\to\infty}\left(\max_{x\in[a,b]} |f_k(x) - f(x)|\right) = 0.$$

- Die L_2-Norm auf $C[a,b]$ führt auf die *Konvergenz im quadratischen Mittel*:

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{k\to\infty}\left(\int_a^b |f_k(x) - f(x)|^2\, dx\right) = 0.$$

- Es gibt **keine** Norm auf $C[a,b]$, die die *punktweise Konvergenz* induziert.

Wie beim Übergang von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen gibt es auch bei normierten Räumen den Begriff der *Vollständigkeit*:

31.8 Cauchy-Folge, vollständig, Banachraum

- Eine Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Elementen v_k des normierten Raumes V heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt

$$\lim_{k,\ell\to\infty} \|v_k - v_\ell\| = 0.$$

- Ein normierter Raum V heißt *vollständiger Raum* oder *Banachraum*, wenn jede Cauchy-Folge einen Grenzwert $v \in V$ besitzt.
- Ein Skalarproduktraum (siehe 31.11) V heißt *vollständiger Raum* oder *Hilbertraum*, wenn jede Cauchy-Folge einen Grenzwert $v \in V$ besitzt.

31.9 Beispiele

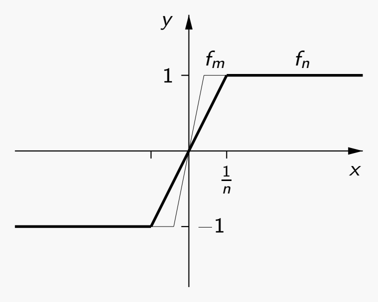
(a) $\mathbb{R}^n$ ist mit jeder p-Norm ein Banachraum, und mit der Euklidischen Norm ($p = 2$) sogar ein Hilbertraum.

(b) $C[a, b]$ ist mit der Maximumsnorm ein Banachraum.

(c) $C[a, b]$ versehen mit der L_2-Norm ist **nicht** vollständig. Ein Beispiel einer Cauchy-Folge in $C[-1, 1]$ ohne einen Grenzwert in $C[-1, 1]$ ist

$$f_k(x) = \begin{cases} -1 & x \leqslant -\frac{1}{k} \\ kx & -\frac{1}{k} \leqslant x \leqslant \frac{1}{k} \\ 1 & x \geqslant \frac{1}{k} \end{cases}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Man erkennt, dass $\|f_n - f_m\|_2^2 \leqslant 2 \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\}$ ist. Eine stetige Grenzfunktion müsste für $x > 0$ den Wert 1 und für $x < 0$ den Wert -1 haben.



31.10 Norm und Stetigkeit

Seien V und W normierte Räume mit den Normen $\|.\|_V$ bzw. $\|.\|_W$, $D \subset V$, $v_0 \in V$.
$f : D \longrightarrow W$ sei eine Abbildung.

- f heißt *in v_0 stetig*, wenn gilt $\|v - v_0\|_V \to 0 \Longrightarrow \|f(v) - f(v_0)\|_W \to 0$.
- f heißt *in D stetig*, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Besonders einfach ist es für *lineare Abbildungen*, die auf $D := V$ definiert sind.

Eine lineare Abbildung $L : V \longrightarrow W$ ist genau dann stetig, wenn sie in $v_0 = 0$ stetig ist.
In diesem Fall bibt es ein $C \geqslant 0$, so dass für alle $v \in V$ gilt:
$\|L(v)\|_W \leqslant C\|v\|_V$
Das Infimum aller C mit dieser Eigenschaft wird mit $\|L\|$ bezeichnet.

Es ist also immer $\|L(v)\|_W \leqslant \|L\| \cdot \|v\|_V$, und es gibt keine kleinere Konstante als $\|L\|$ mit dieser Eigenschaft.

Eine besonders wichtige Rolle spielen Skalarprodukträume.

31.11 Skalarprodukt und Norm

- Wie in 6.5 definieren wir: Ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V ist eine Abbildung $(v, w) \longrightarrow \langle v, w \rangle$ von $V \times V$ in die reellen oder komplexen Zahlen, die definit, symmetrisch, linear in der ersten und antilinear in der zweiten Komponente ist.
- Wie in 6.8 bewiesen wurde, induziert das Skalarprodukt eine Norm durch
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$
Jeder Skalarprodukt-Raum ist also auch ein normierter Raum. Die Umkehrung gilt i.a. nicht.
- Es gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung
$$|\langle v, w \rangle| \leqslant \sqrt{\langle v, v \rangle \, \langle w, w \rangle} = \|v\| \, \|w\|$$

31.12 Parallelogramm-Identität und Winkel

(i) In einem Skalarproduktraum V gilt die Identität

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2). \qquad (*)$$

(ii) Umgekehrt: Falls in einem normierten Raum V die Parallelogramm-Identität $(*)$ gilt, so ist durch

$$\langle v, w\rangle := \frac{1}{4}\Big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\Big)$$

bzw. im komplexen Fall

$$\langle v, w\rangle := \frac{1}{4}\Big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + i\|v-iw\|^2 - i\|v+iw\|^2\Big)$$

ein Skalarprodukt definiert, das diese Norm induziert.

(iii) In reellen Räumen ist durch

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\ \|w\|}$$

der Winkel $\alpha = \angle(v, w)$ im Intervall $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ festgelegt.

31.13 Beispiel: die 2-Norm auf $C([a, b])$ Der Vektorraum $C[a, b]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx, \quad f, g \in C[a, b]$$

ist ein Skalarproduktraum . Die induzierte Norm ist die L_2-Norm in 31.4.

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}.$$

Die Cauchy-Schwarz Ungleichung heißt hier

$$\left|\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2\, dx\right)^{1/2}.$$

Dies ist ein Spezialfall (mit $p = q = 2$) der Hölder-Ungleichung.

Wieder gilt: $v, w \in V$ heißen *orthogonal*, wenn $\langle v, w \rangle = 0$ gilt.
Ein normierter Raum heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare dichte Menge gibt.
Wir betrachten hier nur separable Hilberträume.

31.14 Orthonormal-System

- Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots$ im Skalarproduktraum V bilden ein *Orthonormal-System (ONS)*, wenn gilt

$$\langle v_j, v_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ 1 & \text{für } j = k \end{cases}$$

- Das ONS heißt *vollständig*, wenn aus $\langle w, v_j \rangle = 0$ für alle j schon $w = 0$ folgt.

Zur Konstruktion von ONS kann (auch für unendlich viele Vektoren) das Gram-Schmidt-Verfahren (siehe 6.20) verwendet werden.

31.15 Satz des Pythagoras und Besselsche Ungleichung

Falls die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_N$ im Skalarproduktraum V ein Orthonormal-System bilden, so gilt der Satz des Pythagoras

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} c_k v_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 \qquad (c_k \in \mathbb{C} \text{ beliebig})$$

und die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{N} |\langle w, v_k \rangle|^2 \leqslant \|w\|^2 \qquad (w \in V \text{ beliebig}).$$

Orthonormalsysteme in Hilberträumen haben fast dieselben Eigenschaften wie in endlichdimensionalen Räume:

31.16 Orthonormalbasen und Parseval-Identität

Sei $v_1, v_2, \dots$ ein vollständiges ONS in einem Skalarproduktraum V. Dann gilt:

- $v_1, v_2, \dots$ ist eine *Orthonormalbasis (ONB)*: es gilt für jeden Vektor $w \in V$:

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \langle w, v_k \rangle v_k$$

- Es gilt die *Parsevalsche Identität*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle w, v_k \rangle \right|^2 = \|w\|^2$$

Orthonormalsysteme dienen zur *Projektion* auf den Teilraum

$$Z = \text{span}\,(v_1, \ldots, v_N).$$

31.17 Orthogonalprojektion

Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_N$ seien ein Orthonormalsystem in V. Mit Z sei der obige Teilraum bezeichnet.
Zu beliebigem $w \in V$ ist der Vektor

$$P(w) := \sum_{k=1}^{N} \langle w, v_k \rangle \, v_k$$

die *Orthogonal-Projektion* von w auf den Teilraum Z, d.h.

$$\langle w - P(w), z \rangle = 0 \qquad \text{für alle } z \in Z.$$

(Forts.)

Weiterhin gelten die Identitäten

$$\|w\|^2 = \|w - P(w)\|^2 + \|P(w)\|^2, \qquad (i)$$

und

$$\|w - z\|^2 = \|w - P(w)\|^2 + \|P(w) - z\|^2 \qquad \text{für alle } z \in Z, \qquad (ii)$$

also ist die Orthogonal-Projektion $P(w) \in Z$ der eindeutig bestimmte Vektor im Teilraum Z mit minimalem Abstand vom Vektor w.

Bemerkung: Man sieht an der expliziten Form in diesem Satz, dass die Orthogonalprojektion ein *linearer* Operator ist, dass also

$$P(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha P(w_1) + \beta P(w_2)$$

gilt.