

32: Periodische Funktionen, Fourier-Entwicklung

Die Fourier-Entwicklung ist eines der wichtigsten mathematischen Werkzeuge in fast allen technischen Bereichen. Sie wurde vom französischen Mathematiker und Physiker Jean Baptiste Joseph Fourier (geb. 21. März 1768 bei Auxerre; gest. 16. Mai 1830 in Paris) eingeführt. Auf ihn geht die Theorie der Wärmeleitung zurück.

32.1 Einleitung Fourier stellte fest, dass man durch die “unendliche” Linearkombinationen der Funktionen

$$1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \dots,$$

also durch die nach ihm benannten Fourier-Reihen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

(fast) jede periodische Funktion mit der Periodenlänge $T = 2\pi$ “erhält”. Durch Wahl der Koeffizienten a_k und b_k gelang es ihm, einige Differentialgleichungen für periodische Funktionen zu lösen.

Fourier gab damit einen wesentlichen Impuls für die Untersuchung der Konvergenz von Reihen. Die heute klar formulierten Begriffe wie “punktweise Konvergenz” bzw. “gleichmäßige Konvergenz” von Funktionenreihen waren zu seiner Zeit noch unbekannt; durch die fehlende Präzisierung erschienen unendliche Reihen noch als “mysteriös”.

Eigentlich reicht hier eine Untersuchung reellwertiger Funktionen. Durch die Benutzung komplexwertiger Funktionen werden allerdings die Beweise sehr vereinfacht.

Der “richtige” Skalarproduktraum für die Fourier-Analyse:

32.2 Der Vektorraum $L_2([0, T])$

- Eine Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *quadrat-integrierbar*, wenn das Integral

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt$$

existiert.

- Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *Nullmenge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Intervalle I_1, I_2, \dots gibt, so dass gilt

$$(a) M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad \text{und dabei ist} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon$$

32.2 Der Vektorraum $L_2([0, T])$ (Fortsetzung)

- Zwei quadrat-integrierbare Funktionen f und g werden als gleich angesehen (d.h. miteinander "identifiziert"), wenn

$$\int_0^T |f(t) - g(t)|^2 dt = 0$$

gilt. (D.h. die Funktion f steht als Repräsentant einer ganzen *Äquivalenzklasse* von Funktionen.)

Dies ist genau dann der Fall, wenn sich die Funktionen nur auf einer Nullmenge voneinander unterscheiden. Schreibweise:

$$f = g \quad \text{f. ü. (in englischsprachigen Texten a.e.)}$$

- Mit $L_2([0, T])$ bezeichnen wir den Vektorraum aller quadrat-integrierbaren Funktionen $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ (unter Berücksichtigung der Identifikation "gleicher" Funktionen).

32.2 Der Vektorraum $L_2([0, T])$ (Fortsetzung)

- Das Skalarprodukt auf $L_2([0, T])$ ist

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt,$$

und die zugehörige Norm ist die L_2 -Norm

$$\|f\|_2 := \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

32.3 Periodische Funktionen und Fortsetzung

(a) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist *periodisch* mit der Periode T , wenn stets $f(t) = f(t + T)$ gilt.

(b) Induktiv folgt dann $f(t) = f(t + kT)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Ist f über das Intervall $[0, T]$ integrierbar, so ist für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^T f(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt.$$

(d) Die (Standard-) *Periodisierung* einer Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ ist gegeben durch die Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\tilde{f}(t) = f(t - kT) \quad \text{für } t \in [kT, (k+1)T] \text{ und } k \in \mathbb{Z}.$$

(e) Die *ungerade periodische Fortsetzung* einer Funktion $f : [0, T/2] \rightarrow \mathbb{C}$ erhält man, indem man f auf das Intervall $(-T/2, 0)$ durch die Festlegung

$$f(t) = -f(-t), \quad t \in (-T/2, 0),$$

fortsetzt und anschließend wie in (d) periodisiert.

32.3 Periodische Funktionen und Fortsetzung(Fortsetzung)

- (f) Die *gerade periodische Fortsetzung* einer Funktion $f : [0, T/2] \rightarrow \mathbb{C}$ erhält man, indem man f auf das Intervall $(-T/2, 0)$ durch die Festlegung

$$f(t) = f(-t), \quad t \in (-T/2, 0),$$

fortsetzt und anschließend wie in (d) periodisiert.

Bemerkung:

- (a) Bei der ungeraden Fortsetzung muss man ggf. $f(0) := 0$ setzen.
- (b) Selbst wenn $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, kann die periodische Fortsetzung in (a) an den Stellen kT mit $k \in \mathbb{Z}$ unstetig sein. (Ebenso für die Fälle (e) und (f) und die Stellen kT sowie $(k + 1/2)T$.)

Wir geben 3 verschiedene Orthonormalsysteme zur Periodenlänge $T > 0$ an.

32.4 ONS in $L_2([0, T])$

Zur Periodenlänge $T > 0$ definieren wir die Grundfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

(a) Für $L_2([0, T])$ definieren wir das ONS

$$\begin{aligned}\phi_0(t) &= \sqrt{\frac{1}{T}}, & \phi_{2k-1}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(k\omega t) \\ \phi_{2k}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(k\omega t), & k &= 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

(b) Für $L_2([0, T/2])$ definieren wir das ONS

$$\phi_k(t) = \sqrt{\frac{4}{T}} \sin(k\omega t), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(bezogen auf die ungerade periodische Fortsetzung) und als Alternative

$$\phi_0(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}, \quad \phi_k(t) = \sqrt{\frac{4}{T}} \cos(k\omega t), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(bezogen auf die gerade periodische Fortsetzung).

32.4 ONS in $L_2([0, T])$ (Fortsetzung)

(c) Das in (a) angegebene System ϕ_0, ϕ_1, \dots ist ein ONS bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt$$

(d) Beide in (b) angegebenen Systeme sind ONS bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{T/2} f(t) \overline{g(t)} dt$$

(e) Schränkt man sich auf reelle Koeffizienten ein, ist jedes der angegebenen Systeme ein ONS auf dem entsprechenden Teilraum der reellwertigen Funktionen.

Die allgemeine Aussage zur Orthogonalprojektion in Satz 31.17 liefert die Grundlage der Fourier-Analyse.

Die Konstanten in den Funktionen werden dabei in die Koeffizienten gezogen.

32.5 Definition der Fourier-Analyse

Wir wählen das ONS in 32.4(a) auf $L_2([0, T])$. Zur Funktion $f \in L_2([0, T])$ und der Grundfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ definieren wir die *Fourier-Koeffizienten*

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{T}} \langle f, \phi_0 \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{T}} \langle f, \phi_{2k} \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt,$$

$$b_k = \sqrt{\frac{2}{T}} \langle f, \phi_{2k-1} \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt,$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

32.5 Definition der Fourier-Analyse (Fortsetzung)

Die Orthogonalprojektion

$$\begin{aligned} S_N[f](t) &= \sum_{k=0}^{2N} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \\ &= \sum_{k=-N}^N c_k e^{i\omega k t} \end{aligned}$$

heißt die *Fourier-Partialsumme* von f , und die Reihe

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega k t} \end{aligned}$$

heißt die *Fourierreihe* von f .

32.6 Komplexe Fourierreihe

Die komplexen Fourierkoeffizienten von $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sind für $k \in \mathbb{Z}$ definiert durch

$$c_k(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt.$$

Die komplexe Fourierreihe von f lautet

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ik\omega t}.$$

Zu den Koeffizienten a_k und b_k in 32.5 bestehen die Beziehungen

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k \in \mathbb{N},$$

und umgekehrt

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Falls f reellwertig ist, so gilt

$$c_{-k} = \overline{c_k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Daraus ergeben sich die reellen Fourierkoeffizienten

$$a_k = 2\operatorname{Re} c_k, \quad b_k = -2\operatorname{Im} c_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

32.7 Hauptsatz der Fourier-Analyse

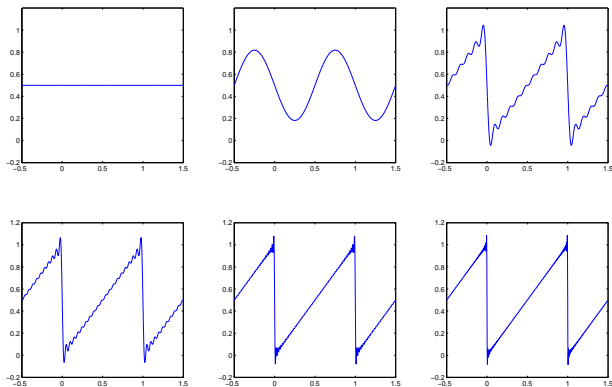
Es sei $f \in L_2([0, T])$. Dann gilt die *Konvergenz im quadratischen Mittel*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N[f]\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T |f(t) - S_N[f](t)|^2 dt = 0$$

sowie die Parseval-Identität

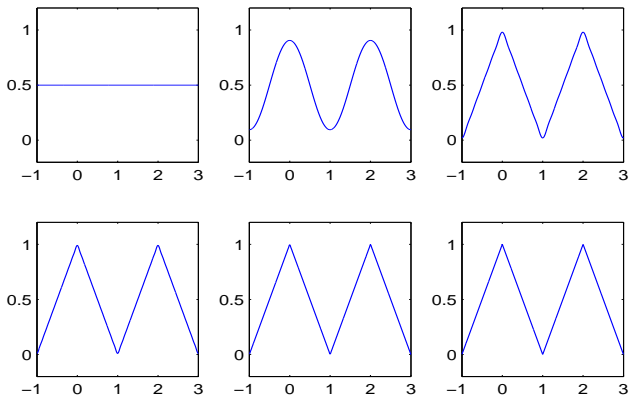
$$\|f\|_2^2 = \frac{T}{4} a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

BILDER von S_0 , S_1 , S_{10} , S_{20} , S_{50} , S_{100} für $f(t) = t$ auf $[0, 1]$, gezeichnet wird die periodische Fortsetzung auf das Intervall $[-0.5, 1.5]$.



Hier liegt tatsächlich die Approximation im quadratischen Mittel vor! Weiter erkennt man das Gibb'sche Phänomen (Überschwingen um 9% der Spunghöhe oben und unten)

BILDER von $S_0, S_1, S_{10}, S_{20}, S_{50}, S_{100}$ für $g(t) = 1 - |t|$ auf $[-1, 1]$, gezeichnet wird die periodische Fortsetzung auf das Intervall $[-1, 3]$.



Hier liegt sogar die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe gegen g vor.

1. Beweisteil des Hauptsatzes 32.7:

Die Funktion $S_N[f]$ ist die **Orthogonal-Projektion** von f auf den Teilraum, der von den Funktionen ϕ_j in 32.4(a), $j = 0, 1, 2, \dots$, aufgespannt wird. Denn:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \langle f, \phi_0 \rangle \phi_0, \\ a_k \cos(k\omega t) &= \langle f, \phi_{2k} \rangle \phi_{2k}, \\ b_k \sin(k\omega t) &= \langle f, \phi_{2k-1} \rangle \phi_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Mit der Besselschen Ungleichung 31.15 folgt

$$\|f\|_2^2 \geq \|S_N[f]\|_2^2 = \frac{T}{4} a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2).$$

Die Identität im Satz über Orthogonalprojektionen 31.17(i) ergibt

$$\|f - S_N[f]\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|S_N[f]\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \left(\frac{T}{4} a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

Dies zeigt, dass die Konvergenz $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N[f]\|_2^2 = 0$ äquivalent ist zur Parseval-Identität in 32.7.

2. Beweisteil des Hauptsatzes 32.7:

Es bleibt die Frage zu beantworten, ob es eine quadrat-integrierbare Funktion f gibt, die einen positiven Abstand zu dem Teilraum besitzt, der von den Funktionen ϕ_j in 32.4(a), $j = 0, 1, 2, \dots$, aufgespannt wird. Das folgende Resultat verneint diese Frage.

32.8 Vollständigkeit des Orthonormal-Systems 32.4(a)

Die Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sei quadrat-integrierbar und es gelte

$$\langle f, \phi_j \rangle = 0$$

für alle trigonometrischen Funktionen ϕ_j in 32.4(a). Dann gilt $f \equiv 0$.

Bemerkung: Für quadrat-integrierbare Funktionen gilt

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N[f]$$

im Sinne der Konvergenz in der L_2 -Norm ("im quadratischen Mittel"). Man schreibt oft

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \right),$$

obwohl diese Identität nicht immer für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

32.9 Erganzung: gerade und ungerade periodische Fortsetzung

Bisher wurde die periodische Fortsetzung einer Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet. In Anwendungen bevorzugt man manchmal die geraden und ungeraden periodischen Fortsetzungen in 32.3. Die Grundfrequenz ist wieder $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

- Die Funktion $f : [0, T/2] \rightarrow \mathbb{R}$ sei quadrat-integrierbar. Dann besitzt die ungerade periodische Fortsetzung die Fourierreihe (auch *Sinus-Reihe* genannt)

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt.$$

- Die Funktion $f : [0, T/2] \rightarrow \mathbb{R}$ sei quadrat-integrierbar. Dann besitzt die gerade periodische Fortsetzung die Fourierreihe (auch *Cosinus-Reihe* genannt)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt.$$

Wie steht es um punktweise und gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe?

32.10 Punktweise Konvergenz der Fourierreihe

Die Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sei **stückweise stetig differenzierbar**, d.h. es gibt eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = T$ des Intervalls $[0, T]$, so dass f auf jedem Teilintervall $[t_k, t_{k+1}]$ stetig und stetig differenzierbar ist (mit einseitigen Grenzwerten der Funktion und der Ableitung am Rand).

Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f an jeder Stelle $t \in [0, T]$, der Grenzwert ist der Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwerts von f an dieser Stelle, d.h.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N[f](t) = \frac{1}{2} \left(\lim_{h \rightarrow 0^+} f(t+h) + \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t-h) \right).$$

Bei $t = 0$ oder T ist hierbei der Grenzwert der periodischen Fortsetzung von f zu bilden.

Wichtiger Spezialfall: Wenn f **stückweise stetig differenzierbar** ist und die periodische Fortsetzung von f an der Stelle t stetig ist, dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N[f](t) = f(t).$$

Die Stetigkeit von f reicht nicht aus, damit die Fourierreihe konvergiert: Es gibt stetige Funktionen, deren Fourierreihe an vielen Stellen gar nicht konvergiert (sogar an überabzählbar vielen Stellen!).

Die Zusatzvoraussetzung, dass f stückweise stetig differenzierbar ist, ist wesentlich für die Konvergenz der Fourierreihe.

32.11 Rechenregeln für Fourierreihen

Fourierreihen können gliedweise differenziert und integriert werden: Sei $T > 0$ die Periodenlänge und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Grundfrequenz. Dann gilt für $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Fourierreihe

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) :$$

(i) falls $a_0 = 0$ gilt, sind durch

$$F(t) = C + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k\omega} \sin(k\omega t) - \frac{b_k}{k\omega} \cos(k\omega t) \right)$$

mit $C \in \mathbb{R}$ alle Stammfunktionen von f gegeben.

(ii) falls die periodische Fortsetzung von f stetig ist und f stückweise stetig differenzierbar ist, so besitzt die stückweise gebildete Ableitung f' die Fourierreihe

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-k\omega a_k \sin(k\omega t) + k\omega b_k \cos(k\omega t)) .$$

Entsprechendes gilt für die komplexe Form.

Die Geschwindigkeit der Konvergenz der Fourierreihe hängt davon ab, wie schnell der Betrag der Fourier-Koeffizienten abnimmt. Es besteht ein direkter Zusammenhang zu der "Glattheit" der Funktion selbst.

32.12 Abnahme-Geschwindigkeit der Fourier-Koeffizienten

Es sei $r \in \mathbb{N}_0$. Die periodische Fortsetzung von $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ sei r -mal stetig differenzierbar.

- (i) Falls die r -te Ableitung noch stückweise stetig differenzierbar ist, erfüllen die Fourier-Koeffizienten von f

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{r+1} a_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} k^{r+1} b_k = 0.$$

- (ii) Falls die r -te Ableitung sogar zweimal stückweise stetig differenzierbar ist, erfüllen die Fourier-Koeffizienten von f

$$|a_k| \leq \frac{C}{k^{r+2}}, \quad |b_k| \leq \frac{C}{k^{r+2}}$$

Bemerkung: Anhand vom Beispiel zu $f(t) = 1 - |t|$ (mit $r = 0$) erkennt man, dass die Abnahme-Geschwindigkeit in (ii) nicht verbessert werden kann.

32.13 Fourier-Analyse in den Anwendungen: lineare zeitinvariante Filter

Wir betrachten analoge periodische Signale der festen Periodenlänge $T > 0$. Sendet man ein Signal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch einen Übertragungs-Kanal, so entstehen Transformationen des Signals. Ein einfaches Modell für das empfangene Signal h wird durch lineare zeitinvariante Filter ausgedrückt:

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^T f(s)g(t-s) ds.$$

Hierbei stellt die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ebenfalls periodisch mit der gleichen Periodenlänge T) die Wirkung des Kanals auf ein beliebiges Eingangssignal f dar (g ist die "Impuls-Antwort" des Kanals). In der Mathematik spricht man von der "Faltung" der Funktion f mit der Funktion g .

Aufschluss über die Wirkung des Kanals ergeben die Fourierkoeffizienten von g .

32.14 Faltungssatz

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ seien periodische Funktionen der Periodenlänge T . Beide seien quadrat-integrierbar über $[0, T]$. Dann ist die Faltung

$$h = f * g, \quad h(t) = \int_0^T f(s)g(t-s) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

ebenfalls periodisch zur Periodenlänge T .

h ist stetig, und seine Fourierkoeffizienten sind

$$c_k(f * g) = T \cdot c_k(f) \cdot c_k(g).$$

Für die reellen Fourierkoeffizienten bedeutet das

$$a_0(h) = \frac{T}{2} a_0(f) a_0(g)$$

$$a_k(h) = \frac{T}{2} (a_k(f) a_k(g) - b_k(f) b_k(g))$$

$$b_k(h) = \frac{T}{2} (a_k(f) b_k(g) + b_k(f) a_k(g)).$$