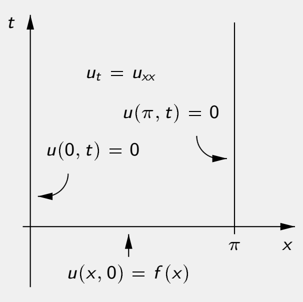
33: Diffusionsgleichung

Motivation



Ausgangspunkt ist ein Randanfangswertproblem der Diffusionsgleichung:

(1) $u_t = u_{xx}$ für $0 < x < \pi$, $t > 0$
Diffusionsgleichung

(2) $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ Randbedingungen

(3) $u(x, 0) = f(x)$ für $0 \leqslant x \leqslant \pi$
Anfangsbedingung. f ist dabei eine vorgegebene Funktion mit $f(0) = f(\pi) = 0$.

Lösungsidee: (1) ist eine <u>lineare</u> partielle Differentialgleichung. Suche also einfache "Bausteine", die (1) erfüllen. Dazu betrachtet man zunächst Funktionen der Form $u(x, t) = V(x)W(t)$, also Produkte, in denen V nicht von t und W nicht von x abhängt. Ableitungen nach x werden mit einem Strich, Ableitungen nach t mit einem Punkt gekennzeichnet.

$$u_t = u_{xx} \Longleftrightarrow V(x)\dot{W}(t) = V''(x)W(t)$$

Annahme: Man kann durch $u = V(x)W(t)$ dividieren. Das ergibt

$$\frac{\dot{W}}{W} = \frac{V''}{V}.$$

Da die linke Seite nicht von x und die rechte nicht von t abhängt, müssen beide konstant sein,etwa gleich λ. Es muss also gelten

$$V'' = \mu V \quad \text{und} \quad \dot{W} = \mu W.$$

Wir suchen jetzt Lösungen von $W'' = \mu W$, die schon die Randbedingungen (2) erfüllen:

$$W'' - \mu W = 0, \quad W(0) = W(\pi) = 0 \qquad \textit{Randeigenwertproblem}$$

Anlogien zu Eigenwertproblemen bei Matrizen.
Dazu muss man für μ drei Fälle unterscheiden:

(A) $\mu > 0$
Fundamentalsystem ist $e^{\sqrt{\mu}x}$ und $e^{-\sqrt{\mu}x}$, allgemeine Lösung ist

$$y = C_1 e^{\sqrt{\mu}x} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}x}$$

Bestimmung der Konstanten aus den Randbedingungen (2) für $x = 0$ und $x = \pi$:

Das Gleichungssystem $\begin{array}{lll} C_1 & +C_2 & =0 \\ C_1 e^{\sqrt{\mu}\pi} & +C_2 e^{-\sqrt{\mu}\pi} & =0 \end{array}$ hat nur die triviale Lösung, es gibt also keine Eigenfunktionen.

(B) $\mu = 0$
Die allgemeine Lösung ist $V(x) = C_1 + C_2 x$, man sieht direkt, dass nur die Nulllösung die Randbedingungen erfüllt.

(C) $\mu < 0$
Die allgemeine Lösung ist $V(x) = C_1 \sin\sqrt{|\mu|}x + C_2 \cos\sqrt{|\mu|}x$.
$V(0) = 0$ erzwingt $C_2 = 0$, aber diesmal gibt es die nichttriviale Lösung $V(x) = \sin nx$, wenn $\mu = -n^2$ für $n \in \mathbb{N}$ ist.

Zu $\mu = -n^2$ hat man für W die Lösung $W(t) = e^{-n^2 t}$. Summation über die Bausteine ergibt

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx)\, e^{-n^2 t}.$$

Nun muss noch die Anfangsbedingung (3) erfüllt werden:

$$u(x,0) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = f(x).$$

Dazu schreibt man die vorgegebene Funktion f als Sinus-Reihe wie in 32.9 Fourieranalyse
Darüberhinaus braucht man eine Kontrolle darüber, wie gut die Partialsummen der Reihe die Funktion annähern, also passende Abstandsbegriffe in Funktionenräumen.
Konzepte dazu wurden im Abschnitt über Normen besprochen.

Und jetzt richtig: ....

33.1 Diffusionsgleichung

Gegeben sei ein Gebiet $M \subset \mathbb{R}^n$. Die Funktion $u : M \times [0, \infty]$ sei eine (genügend oft differenzierbare) Funktion des Ortes $x \in M$ sowie der Zeit $t \in [0, \infty]$. Wir bilden die partiellen Ableitungen u_t nach der Zeitvariablen und Δu (Laplace-Operator in 24.1) nach der Ortsvariablen.

u erfüllt die *Wärmeleitungsgleichung* oder *Diffusionsgleichung* (engl. heat equation), wenn gilt

$$u_t(x,t) - c^2 \Delta u(x,t) = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in M, \ t \in [0, \infty].$$

Hierdurch wird oft die Temperaturverteilung in einem Körper modelliert.

Speziell bei nur einer Ortsvariablen $x \in [0, L]$:
eine Funktion $u(x,t)$ mit

$$u_t - c^2 u_{xx} = 0, \qquad (x,t) \in [0, L] \times [0, \infty),$$

beschreibt die Spannung in einem Kabel oder die Temperatur in einem dünnen Stab zur Zeit $t \geqslant 0$

Eindimensionaler Fall:
Zuerst bestimmen wir alle *Grundlösungen* der Diffusionsgleichung

$$u_t(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0,$$

die sich als Produkt $u(x,t) = V(x)W(t)$ schreiben lassen (ohne Berücksichtigung der Anfangs- und Randwerte).
Der Produkt-Ansatz: Der Ansatz $u(x,t) = V(x)W(t)$ ergibt

$$u_t(x,t) = V(x)W'(t), \qquad u_{xx}(x,t) = V''(x)W(t).$$

Nach Einsetzen in die Diffusionsgleichung erhalten wir

$$V(x)W'(t) - c^2 V''(x)W(t) = 0 \iff \frac{W'(t)}{W(t)} = \frac{c^2 V''(x)}{V(x)}$$

(mit der Äquivalenz, wenn W und V keine Nullstellen haben). Die Identität soll für alle $x \in (0, L)$ und alle $t > 0$ gelten.
Beobachtung: Eine Identität der Form $g(t) = h(x)$ kann für alle x und t in zwei nichtleeren offenen Intervallen nur gelten, wenn g und h die gleiche *konstante Funktion* sind, also

$$g(t) = h(x) = \mu \qquad \text{für alle } x \text{ und } t,$$

wobei μ eine reelle Konstante ist.

Damit zerfällt der Produktansatz zur Lösung der Diffusionsgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen mit einem Parameter μ (wir setzen $s = -\mu/c^2$):

$$W'(t) = \mu W(t) \quad \Longrightarrow$$

$$W(t) = de^{\mu t} = de^{-c^2 st} \qquad \text{mit} \quad d \in \mathbb{R}$$

$$c^2 V''(x) - \mu V(x) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$V(x) = \begin{cases} A\cos\left(\sqrt{s}x\right) + B\sin\left(\sqrt{s}x\right), & \text{falls} \quad \mu < 0, \\ A + Bx, & \text{falls} \quad \mu = 0, \\ Ae^{\sqrt{|s|}x} + Be^{-\sqrt{|s|}x}, & \text{falls} \quad \mu > 0, \end{cases} \qquad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

33.2 Grundlösungen der Diffusionsgleichung im eindimensionalen Fall $M = [0, L]$

Die Funktionen

$$\psi_s(x,t) = e^{-c^2 st}(A_s \cos(\sqrt{s}x) + B_s \sin(\sqrt{s}x)) \qquad \text{mit} \quad s > 0,$$

$$\psi_0(x,t) = A_0 + B_0 x, \qquad (\text{für} \quad s = 0),$$

sowie

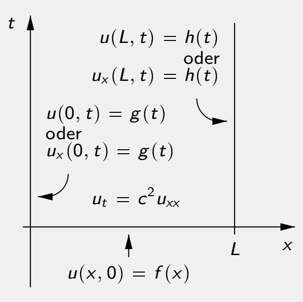
$$\psi_s(x,t) = e^{-c^2 st}(A_s e^{\sqrt{|s|}x} + B_s e^{-\sqrt{|s|}x}) \qquad \text{mit} \quad s < 0$$

erfüllen die Diffusionsgleichung $u_t - c^2 u_{xx} = 0$.
Die Funktionen ψ_s mit $s \geqslant 0$ sind beschränkt auf dem Definitionsbereich $[0, L] \times [0, \infty)$.

Nochmals ein direkter Beweis: Nachrechnen mit

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial t} = -c^2 s \psi_s, \qquad \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x^2} = -s\psi_s.$$

Im physikalischen Modell der Temperaturverteilung in einem homogenen Medium liegen weitere Annahmen vor:



- Die Temperaturverteilung zur Zeit $t = 0$ ist bekannt:
  $u(x,0) = f(x), \qquad x \in M,$
  Anfangsbedingung

- Die Temperatur oder der Wärmeabfluss am Rand $\Gamma = \partial M$ des Gebietes sind bekannt, also entweder

$$u(x,t) = g(x,t), \qquad x \in \Gamma, \quad t > 0, \quad \text{Dirichlet-Randbedingung}$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x,t) = g(x,t), \qquad x \in \Gamma, \quad t > 0, \quad \text{Neumann-Randbedingung}$$

wobei $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ die Richtungsableitung von $u(x,t)$ am Rand von M in Richtung der äußeren Normalen ist.

33.4 Anfangs-Randwertproblem zur Diffusionsgleichung: allgemeine Form

M sei ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$. Gesucht ist eine Funktion $u : M \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, die die Diffusionsgleichung

$$u_t - c^2 \Delta u = 0 \qquad (\text{mit} \quad c > 0),$$

die Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$ und die Dirichlet- oder die Neumann-Randbedingung erfüllt.

Im eindimensionalen Fall mit $M = [0, L]$ (Stab der Länge L) lautet das Anfangs-Randwertproblem:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, & x \in (0, L), \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0, L), \qquad (\text{Anfangsbedingung}) \\ \left.\begin{array}{l} u(0,t) = g(t) \\ u(L,t) = h(t) \end{array}\right\} & t > 0, \qquad (\text{Dirichlet-Randbedingung}) \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} u_t(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, & x \in (0, L), \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0, L), \qquad (\text{Anfangsbedingung}) \\ \left.\begin{array}{l} u_x(0,t) = g(t) \\ u_x(L,t) = h(t) \end{array}\right\} & t > 0. \qquad (\text{Neumann-Randbedingung}) \end{cases}$$

Lösungsansatz für homogene Dirichlet-Randbedingungen $u(0,t) = u(L,t) = 0$:

Überlagerung geeigneter Grundlösungen 33.2, um die Anfangsbedingung zu erfüllen.

- Grundlösungen der Produktform $u(x,t) = V(x)W(t)$ mit hom. Dirichlet-Randbed. liegen vor, wenn V eine *Eigenfunktion* des Rand-Eigenwertproblems

$$\boxed{c^2 V'' - \mu V = 0, \qquad V(0) = V(L) = 0,}$$

ist. (Allg. Theorie hierzu in HM IV.) Durch Betrachten der allg. Lösung und Beachtung der Randbedingungen erhalten wir die Eigenwerte und Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} \mu_k &= -\left(\frac{k\pi c}{L}\right)^2, \\ \phi_k(x) &= \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \end{aligned} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Setzen wir $s_k = -\mu_k/c^2 = (k\pi/L)^2$ in 33.2 ein, erhalten wir:

Die Grundlösungen der Diffusionsgleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen sind

$$\eta_k(x,t) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) e^{-c^2(k\pi/L)^2 t}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Die Überlagerung dieser Grundlösungen lautet

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) e^{-c^2(k\pi/L)^2 t}$$

mit reellen Koeffizienten b_k, $k = 1, 2, \ldots$.

- Die Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ führt zur Bestimmung der Koeffizienten b_k:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \qquad x \in [0, L].$$

Koeffizientenbestimmung

Falls die Funktion $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ quadrat-integrierbar ist, so sind die Koeffizienten b_k durch die Entwicklung von f als Sinus-Reihe (zur Periodenlänge $2L$ bei *ungerader* Fortsetzung von f) bestimmt, d.h.

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Dies war Fourier's Entdeckung: die Anfangsbedingung lässt sich durch "Überlagerung" einfacher Sinus-Funktionen darstellen.

33.5 Lösung des 1-dim. Anfangs-Randwertproblems mit homogenen Dirichlet-Randbed.

Das Anfangs-Randwertproblem

$$u_t(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, \qquad x \in (0,L), \quad t \in (0,\infty),$$

mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \qquad t \in (0,\infty)$$

wird zu jeder Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x), \qquad x \in (0,L),$$

mit quadrat-integrierbarer Funktion f gelöst durch die Funktion

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) e^{-c^2(k\pi/L)^2 t}$$

mit den reellen Koeffizienten

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\,dx, \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

Bemerkungen zur Konvergenz der Reihe:

- Für $t = 0$: Die Reihe konvergiert gegen f im Sinne der Konvergenz im quadratischen Mittel. Falls f stetig ist, die Randbedingung $f(0) = f(L) = 0$ erfüllt und sogar stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert die Reihe sogar punktweise gegen f.

- Für $t > 0$: Die Reihe konvergiert gleichmäßig gegen die stetige Funktion $u(x,t)$: denn die Koeffizienten b_k sind beschränkt (sie bilden sogar eine Nullfolge wegen der Parseval-Identität), also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| e^{-c^2 (k\pi/L)^2 t}$$

eine konvergente Majorante. Man zeigt sogar:

33.6 Eigenschaften der Lösung

Die Lösung $u(x,t)$ der Diffusionsgleichung zu quadrat-integrierbarer Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ und homogenen Dirichlet-Randbedingungen ist im Streifen $[0,L] \times (0,\infty)$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar. Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in [0,L].$$

(Abkühlung des gesamten Stabes der Länge L auf 0 Grad.)

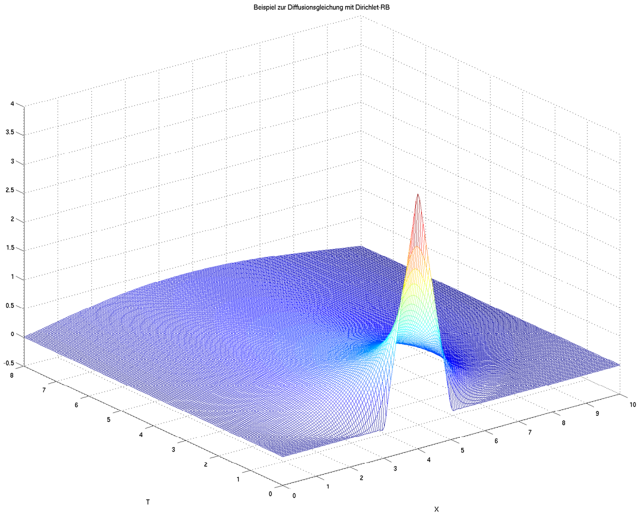
Beispiel: Der Stab der Länge 10 cm besitze die Anfangstemperatur

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 4(x-3) & \text{für } 3 < x \leqslant 4, \\ 4(5-x) & \text{für } 4 < x \leqslant 5, \\ 0 & \text{für } 5 < x \leqslant 10. \end{cases}$$

Seine Enden seien konstant auf 0 Grad gekühlt.
Rechnung: Die Sinusreihe von f hat die Koeffizienten

$$b_k = \frac{80}{\pi^2 k^2} \left(2 \sin\left(\frac{4\pi k}{10}\right) - \sin\left(\frac{3\pi k}{10}\right) - \sin\left(\frac{5\pi k}{10}\right) \right).$$

Die Lösung $u(x,t)$ hat die Form in 33.5.


Beispiel zur Diffusionsgleichung mit Dirichlet-RB
T
X

Lösungsansatz für homogene Neumann-Randbedingungen $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$:
Überlagerung geeigneter Grundlösungen 33.2, um die Anfangsbedingung zu erfüllen.

- Grundlösungen der Produktform $u(x,t) = V(x)W(t)$ mit hom. Neumann-Randbed. liegen vor, wenn V eine *Eigenfunktion* des Rand-Eigenwertproblems

$$\boxed{c^2 V'' - \mu V = 0, \qquad V'(0) = V'(L) = 0,}$$

ist. Wie vorher ergibt Einsetzen in die allg. Form der Lösung die Eigenwerte und Eigenfunktionen

$$\left.\begin{array}{rcl} \mu_k & = & -\left(\dfrac{k\pi c}{L}\right)^2, \\ \phi_k(x) & = & \cos\left(\dfrac{k\pi x}{L}\right), \end{array}\right. \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(incl. $\mu_0 = 0$ und $\phi_0(x) \equiv 1$).
Setzen wir $s_k = -\mu_k/c^2 = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ in die Grundlösungen ein, erhalten wir:

Die Grundlösungen der Diffusionsgleichung mit homogenen Neumann-Randbedingungen sind

$$\psi_k(x,t) = \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) e^{-c^2(k\pi/L)^2 t}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

- Die Überlagerung der Grundlösungen oben ist

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) e^{-c^2(k\pi/L)^2 t}$$

mit reellen Koeffizienten a_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

- Die Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ führt zur Bestimmung der Koeffizienten a_k:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \qquad x \in [0, L].$$

Koeffizientenbestimmung

Falls die Funktion $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ quadrat-integrierbar ist, so sind die Koeffizienten a_k durch die Entwicklung von f als Cosinus-Reihe (zur Periodenlänge $2L$ bei *gerader* Fortsetzung von f) bestimmt, d.h.

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

33.7 Lösung des 1-dim. Anfangs-Randwertproblems mit homogenen Neumann-Randbed.

Das Anfangs-Randwertproblem

$$u_t(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, \qquad x \in (0,L), \quad t \in (0,\infty),$$

mit homogenen Neumann-Randbedingungen

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \qquad t \in (0,\infty)$$

wird zu jeder Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x), \qquad x \in (0,L),$$

mit quadrat-integrierbarer Funktion f gelöst durch die Funktion

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) e^{-c^2(k\pi/L)^2 t}$$

mit den reellen Koeffizienten

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\,dx, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Die Bemerkungen zur Konvergenz der Reihe gelten wie in 33.6.

33.8 Eigenschaften der Lösung

Die Lösung $u(x,t)$ der Diffusionsgleichung zu quadrat-integrierbarer Anfangsbedingung $u(0,t) = f(x)$ und homogenen Neumann-Randbedingungen ist im Streifen $[0,L] \times (0,\infty)$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar. Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \quad \text{für alle} \quad x \in [0,L].$$

(Temperaturausgleich entlang des Stabes der Länge L auf den Mittelwert der Anfangstemperatur.) Durch die Neumann-Randbedingungen kommt bei einem "verlaufenden Pudding" nichts dazu oder fällt weg, die Masse bleibt gleich und verteilt sich nur gleichmäßig.

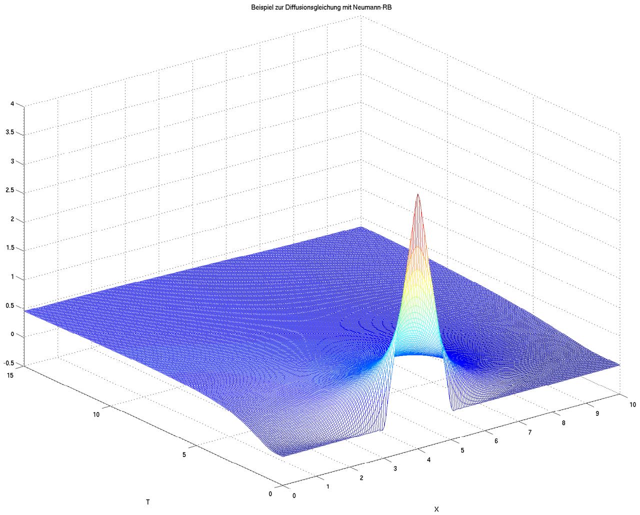
Beispiel: Der Stab der Länge 10 cm besitze die Anfangstemperatur

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 4(x-3) & \text{für } 3 < x \leqslant 4, \\ 4(5-x) & \text{für } 4 < x \leqslant 5, \\ 0 & \text{für } 5 < x \leqslant 10. \end{cases}$$

An den Enden finde kein Wärmeverlust statt.
Rechnung: Die Cosinusreihe von f hat die Koeffizienten $a_0 = \frac{4}{5}$ und

$$a_k = \frac{80}{\pi^2 k^2} \left(2\cos\left(\frac{4\pi k}{10}\right) - \cos\left(\frac{3\pi k}{10}\right) - \cos\left(\frac{5\pi k}{10}\right) \right).$$

Die Lösung $u(x,t)$ hat die Form wie oben.


Beispiel zur Diffusionsgleichung mit Neumann-RB
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
15
10
5
0
T
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
X

Wie können inhomogene Randbedingungen realisiert werden?

Antwort: Mit Hilfe der Laplace-Transformation bzgl. der Zeitvariablen

Wir behandeln die inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen ausführlich: zuerst betrachten wir

$$\begin{cases} u_t(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, & x \in (0,L), \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \in (0,L), \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = h(t), & t > 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Die Funktion h der rechten Randbedingung sei beschränkt, also zulässig im Sinn von 29.1 mit dem Parameter $a = 0$. Mit den Laplace-Transformierten $H(s)$ und

$$U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t) e^{-st}\, dt, \qquad x \in [0,L], \quad \mathrm{Re}(s) > 0,$$

wird aus der Anfangsrandwertaufgabe zur Diffusionsgleichung

$$\begin{cases} sU(x,s) - c^2 U_{xx}(x,s) = 0, & x \in (0,L), \quad \mathrm{Re}(s) > 0, \\ U(0,s) = 0, \quad U(L,s) = H(s), & \mathrm{Re}(s) > 0. \end{cases}$$

Diese gewöhnliche Dgl. bzgl. x wird gelöst von $U(x,s) = c_1 e^{x\sqrt{s}/c} + c_2 e^{-x\sqrt{s}/c}$; die linke Randbedingung ergibt $c_1 = -c_2$, und die rechte Randbedingung ergibt

$$U(x,s) = \frac{\sinh(x\sqrt{s}/c)}{\sinh(L\sqrt{s}/c)}\, H(s).$$

Es wäre günstig, die inverse Laplace-Transformierte $\phi(x,t)$ des ersten Faktors zu kennen, dann wäre $u(x,t) = h * \phi(x,\cdot)(t)$ eine Faltung. Allerdings ist ϕ keine Funktion, sondern eine Distribution. Dennoch helfen in vielen Fällen unsere Techniken aus dem Kapitel zur Laplace-Transformation.

33.10 Lösung des 1-dim. Anfangs-Randwertproblems mit inhomogener Dirichlet-Randbed.

Die Funktion H sei holomorph in $\mathbb{C}\backslash\{z_1, \ldots, z_N\}$ und erfülle $|sH(s)| \leqslant B$ für alle $|s| > R$ mit $\mathrm{Re}(s) \leqslant a$, mit Konstanten $a, B, R > 0$.
Dann ist die Lösung des Anfangs-Randwertproblems (*) gegeben durch das komplexe Kurvenintegral zur Geraden $C = \{a + iy; y \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sinh(x\sqrt{s}/c)}{\sinh(L\sqrt{s}/c)}\, H(s) e^{st}\, ds \\ &= \sum_{w_j \text{ Sing.}} \mathrm{Res}\left(\frac{\sinh(x\sqrt{s}/c)}{\sinh(L\sqrt{s}/c)}\, H(s) e^{st}; w_j \right). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet w_j alle isolierten Singularitäten $\{z_1, \ldots, z_N\}$ sowie $\{\mu_k = -(k\pi c/L)^2;\ k \in \mathbb{N}\}$. (Diese Mengen können gemeinsame Punkte haben, das liefert dann Pole höherer Ordnung.)

(Forts.)

Im Falle einfacher Polstellen ist

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\sinh(x\sqrt{s}/c)}{\sinh(L\sqrt{s}/c)}\, H(s)e^{st}; z_k\right) = \frac{\sinh(x\sqrt{z_k}/c)}{\sinh(L\sqrt{z_k}/c)}\, e^{tz_k}\, \operatorname{Res}\left(H(s); z_k\right),$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\sinh(x\sqrt{s}/c)}{\sinh(L\sqrt{s}/c)}\, H(s)e^{st}; \mu_k\right) = 2(-1)^{k+1}\frac{c^2 k\pi}{L^2} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) H(\mu_k)e^{t\mu_k}.$$

Bemerkung: Die Summanden zu μ_k, $k \in \mathbb{N}$, liefern den Wert 0 für $x = 0$ und $x = L$, da sie Vielfache der Grundlösungen der Diffusionsgleichung mit **homogenen** Dirichlet-Bedingungen sind. Lässt man also die Anfangsbedingung für $t = 0$ in (*) außer Acht, dann ist schon die zu den Singularitäten von H gebildete Summe

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}\left(\frac{\sinh(x\sqrt{s}/c)}{\sinh(L\sqrt{s}/c)}\, H(s)e^{st}; z_k\right)$$

eine Lösung der Diffusionsgleichung mit $u(0,t) = 0$ und $u(L,t) = h(t)$.

Beispiel:

$u_t = \dfrac{1}{4} u_{xx}$ für $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $t > 0$, also $c = \frac{1}{2}$ und $L = \frac{\pi}{2}$.

$u(x,0) = 0$, $u(\dfrac{\pi}{2}, t) = e^{-t/4}$.

Mit $H(s) = \frac{1}{s+1/4}$ erhalten wir eine Lösung

$$u(x,t) = \sin x \, e^{-t/4}.$$

Dabei wurde kein Anfangswert bei $t = 0$ berücksichtigt.

Bemerkung:

a) Eine inhomogene Dirichlet-Randbedingung bei $x = 0$ wird mit der gleichen Methode behandelt. Man muss nur x durch $L - x$ ersetzen.

b) Für eine inhomogene Neumann-Randbedingung $u_x(L, t) = h(t)$ ergibt die gleiche Methode

$$U(x, s) = \frac{cH(s)}{\sqrt{s}} \, \frac{\cosh(x\sqrt{s}/c)}{\sinh(x\sqrt{s}/c)}.$$

Inverse Laplace-Transformation führt zur Lösung u mit homogener linker Neumann-RB $u_x(0, t) = 0$ und homogener Anfangsbedingung $u(x, 0) = 0$. Lässt man die Anfangsbedingung außer Acht, ist schon

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\left(\frac{\cosh(x\sqrt{s}/c)}{\sinh(L\sqrt{s}/c)} \, \frac{cH(s)}{\sqrt{s}} \, e^{st}; z_k \right)$$

eine Lösung der Diffusionsgleichung mit $u(0, t) = 0$ und $u(L, t) = h(t)$.

Zusammensetzen der Lösung (Superposition):

33.11 Diffusionsgleichung mit inhomogenen Randbedingungen: Gesamtlösung

Die Diffusionsgleichung mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ und inhomogenen Randbedingungen

$$\begin{aligned} R_0(u;t) &= \alpha u(0,t) + \beta u_x(0,t) = g(t), \\ R_L(u;t) &= \gamma u(L,t) + \delta u_x(L,t) = h(t) \end{aligned}$$

wird wie folgt gelöst:

1. Bestimme eine Lösung u_R der Diffusionsgleichung zu den Randwerten $R_0(u;t) = 0$, $R_L(u;t) = h(t)$, siehe 33.9(i). (ohne Anfangsbedingung)

2. Bestimme eine Lösung u_L der Diffusionsgleichung zu den Randwerten $R_0(u;t) = g(t)$, $R_L(u;t) = 0$, siehe 33.9ii). (ohne Anfangsbedingung)

3. Bestimme die (eindeutige) Lösung u_A der Anfangs-Randwertaufgabe zu den homogenen Randwerten $R_0(u;t) = R_L(u;t) = 0$ und der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x) - u_R(x,0) - u_L(x,0).$$

Die Gesamtlösung ist dann $u = u_A + u_R + u_L$.

Beispiel von vorher wird erweitert:

$u_t = \dfrac{1}{4} u_{xx}$ für $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $t > 0$, also $c = \frac{1}{2}$ und $L = \frac{\pi}{2}$.

$u(x,0) = \sin x + \sin 2x + \cos 3x$

$u(0,t) = e^{-9t/4}$ und $u(\dfrac{\pi}{2}, t) = e^{-t/4}$.

1. Bestimmung von u_R wurde erledigt: $u_R(x,t) = \sin x \, e^{-t/4}$.
2. Bestimmung von u_L analog: $u_L(x,t) = \sin 3(\frac{\pi}{2} - x)\, e^{-9t/4} = \cos 3x \, e^{-9t/4}$.
3. Die Anfangsbedingung für u_A lautet nun

$$u_A(x,0) = f(x) - u_R(x,0) - u_L(x,0) = \sin x + \sin 2x + \cos 3x - \sin x - \cos 3x = \sin 2x.$$

Dies ist schon die Sinus-"Reihe", daher ist

$$u_A(x,t) = \sin 2x \, e^{-t}.$$

Die Lösung des Anfangsrandwertproblems ist also

$$u(x,t) = u_A(x,t) + u_L(x,t) + u_R(x,t) = \sin 2x \, e^{-t} + \cos 3x \, e^{-9t/4} + \sin x \, e^{-t/4}$$

Weitere qualitative Aussagen stimmen mit der physikalischen Realität überein:

33.12 Satz: Maximumprinzip

Die Funktion $u : [0, L] \times [0, \infty)$ sei zweimal stetig differenzierbar in der offenen Menge $(0, L) \times (0, \infty)$, stetig in der abgeschlossenen Menge $[0, L] \times [0, \infty)$ und erfülle die Diffusionsgleichung

$$u_t(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0, \qquad x \in (0, L), \quad t > 0.$$

Für beliebiges $T > 0$ betrachten wir das Rechteck

$$G_T = \{(x, t) \mid \; 0 \leqslant x \leqslant L, \; 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

Dann nimmt die Einschränkung $u|_{G_T}$ ihr Minimum und ihr Maximum auf der Teilmenge $\Gamma_T = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ des Randes an, wobei

$$\Gamma_1 = \{(x, 0) \mid 0 \leqslant x \leqslant L\}, \qquad \Gamma_2 = \{(0, t) \mid 0 < t \leqslant T\},$$

$$\Gamma_3 = \{(L, t) \mid 0 < t \leqslant T\}.$$

Bemerkung: Der Satz besagt, dass im “Zeithorizont” $[0, T]$ das Maximum und Minimum entweder am Rand des Stabes (bei $x = 0$ oder $x = L$) oder am “Anfang” $t = 0$ vorliegen.

Beweis (für das Maximum von $u\,|_{G_T}$):

Die Funktion u ist stetig und die Menge Γ_T ist beschränkt und abgeschlossen. Also gibt es ein $(x_0, t_0) \in \Gamma_T$ mit

$$A := \max\{u(x,t) \mid (x,t) \in \Gamma_T\} = u(x_0, t_0).$$

Wir müssen zeigen:

$$A \geqslant u(x,t) \qquad \text{für alle } \ (x,t) \in G_T.$$

(i) Zu beliebigem $\epsilon > 0$ definieren wir $v(x,t) = u(x,t) - \epsilon t$. Wir setzen

$$A_\epsilon := \max\{v(x,t) \mid (x,t) \in G_T\}$$

und zeigen in (ii), dass die Einschränkung $v\,|_{G_T}$ ihr Maximum A_ϵ in einem Punkt von Γ_T annimmt. Dann haben wir die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \max_{(x,t)\in G_T} u(x,t) \leqslant \max_{(x,t)\in G_T} v(x,t) + \epsilon T \quad &= \quad \max_{(x,t)\in \Gamma_T} v(x,t) + \epsilon T \\ &\leqslant \quad \max_{(x,t)\in \Gamma_T} u(x,t) + \epsilon T = A + \epsilon T \end{aligned}$$

für jedes $\epsilon > 0$ gezeigt, also auch

$$\max_{(x,t)\in G_T} u(x,t) \leqslant A.$$

(ii) Für die Funktion $v(x,t) = u(x,t) - \epsilon t$ gilt:

- v ist zweimal stetig differenzierbar und erfüllt

$$v_t - c^2 v_{xx} = u_t - \epsilon - c^2 u_{xx} = -\epsilon, \qquad x \in [0,L], \quad t \in [0,\infty).$$

- Annahme: $v\,|_{G_T}$ hat sein Maximum nicht in Γ_T. Dann existiert ein Punkt (x_1, t_1) mit $0 < x_1 < L$ und $0 < t_1 \leqslant T$ mit $A_\epsilon = v(x_1, t_1)$. In x-Richtung liegt dann ein relatives Maximum vor, also folgt

$$v_x(x_1,t_1) = 0, \quad v_{xx}(x_1,t_1) \leqslant 0.$$

  Für $0 < t_1 < T$ liegt in t-Richtung ebenfalls ein relatives Maximum vor; für $t = T$ wissen wir nur $v_t(x_1,t_1) \geqslant 0$. Beides ergibt einen Widerspruch zu $v_{xx}(x_1,t_1) \leqslant 0$, denn hiermit folgt

$$v_t(x_1,t_1) = c^2 v_{xx}(x_1,t_1) - \epsilon < 0.$$

  Also nimmt die Einschränkung $v\,|_{G_T}$ sein Maximum A_ϵ in einem Punkt aus Γ_T an.

Hat man das Maximumprinzip, so folgen wichtige Eigenschaften "wie von selbst":

33.13 Eindeutigkeitssatz

Besitzt das Anfangs-Randwertproblem mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen eine stetige Lösung $u : [0, L] \times [0, \infty)$, so ist diese eindeutig.

Beweis: Sind u, v zwei stetige Lösungen desselben ARWP, so ist $w = u - v$ eine Lösung des ARWP zu homogenen Anfangs- und Randbedingungen. Wegen $w\,|_{\Gamma_T} \equiv 0$ folgt $w\,|_{G_T} \equiv 0$ für beliebiges $T > 0$.

Stetigkeit der Anfangs- und Randwerte sei im Folgenden immer gegeben.

33.14 Stabilitätssatz

Stetige Lösungen u und $\tilde{u} : [0, L] \times [0, \infty)$ von zwei Anfangs-Randwertproblemen zu unterschiedlichen Anfangswerten und inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen unterscheiden sich bis zum Zeithorizont T höchstens so viel, wie sich die Anfangs- und Randwerte der beiden Probleme bis zu diesem Zeithorizont unterscheiden.

Beweis: Wie bei 33.13.