KAPITEL A

Grundlagen der Fourier–Analysis

Wir definieren wie üblich die L^p-Räume

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} =: \|f\|_p < \infty \right\}$$

1. Fourier–Transformation in $L^1(\mathbb{R})$

Definition A.1. *(Fourier–Transformation, inverse FT)*

a) *Die Fourier–Transformierte einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist definiert als*

$$\hat{f}(\omega) = (\mathcal{F}f)(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt.$$

b) *Gegeben sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Dann definiert*

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega$$

die inverse Fourier–Transformierte von $\hat{f}$.

Grundlegende Eigenschaften der Fourier–Transformierten auf $L^1(\mathbb{R})$:

Satz A.2. *Es sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\hat{f}$ die Fourier–Transformierte von f. Dann gilt:*

a) *$\hat{f}$ ist gleichmäßig stetig und beschränkt, $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.*
b) *Falls f' existiert und in $L^1(\mathbb{R})$ liegt, so ist*

$$(f')\hat{}(\omega) = 2\pi i \omega \hat{f}(\omega), \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

c) *Riemann–Lebesgue:* $\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0.$

Beweis. (a) Für $\delta > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \sup_\omega |\hat{f}(\omega+\delta) - \hat{f}(\omega)| &= \sup_\omega \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega x} \left(e^{-2\pi i \delta x} - 1 \right) f(x) \, dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2\pi i \delta x} - 1| \cdot |f(x)| \, dx. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Wegen $|e^{-2\pi i\delta x} - 1| \leq 2$ und $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 2|f(x)|\,dx < \infty$ folgt aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2\pi i\delta x} - 1|\cdot|f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\lim_{\delta\to 0}|e^{-2\pi i\delta x} - 1|}_{=0}\cdot|f(x)|\,dx = 0.$$

Also ist die gleichmäßige Stetigkeit von $\hat{f}$ gezeigt. Die Ungleichung $\|\hat{f}\|_\infty = \sup_\omega |\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega x}dt| \leq \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt = \|f\|_1$ ist trivial.

Zum Beweis von (b) benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz A.3. *Aus $f \in L^1(\mathbb{R})$ und der Existenz von $f' \in L^1(\mathbb{R})$ folgt* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

Beweis Durch Betrachtung von $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ kann o.B.d.A. angenommen werden, dass f reellwertig ist. Der Beweis erfolgt durch Widerspruch. Wir nehmen an, es existiere eine Folge (x_n) mit $\lim x_n = \infty$ und $c > 0$ so, dass $f(x_n) \geq c > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wähle $R > 0$ so, dass $\int_R^\infty |f'(x)|\,dx < \frac{c}{2}$ erfüllt ist. Weiterhin wähle n_0 so, dass $x_{n_0} > R$ gilt. Dann gilt für alle $x > x_{n_0}$

$$f(x) = f(x_{n_0}) + \int_{x_{n_0}}^{x} f'(x)\,dx \geq c - \int_{x_{n_0}}^{x} |f'(x)|\,dx \geq \frac{c}{2}.$$

Damit wäre aber $f \notin L^1(\mathbb{R})$. □

Nun folgt die Aussage (b) in Satz A.2 durch partielle Integration (wieder begründet durch die Lebesgue–Integrierbarkeit von f und f'):

$$(f')\hat{}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-2\pi i\omega t}dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot(-2\pi i\omega)e^{-2\pi i\omega t}dt = 2\pi i\omega\hat{f}(\omega).$$

(c) 1. Falls f' existiert und in $L^1(\mathbb{R})$ liegt, folgt für $\omega \neq 0$ sofort

$$|\hat{f}(\omega)| = \frac{1}{|2\pi\omega|}\left|(f')\hat{}(\omega)\right| \leq \frac{1}{|2\pi\omega|}\|f'\|_1 \to 0, \qquad \text{für } |\omega| \to \infty.$$

2. Andernfalls wählen wir zu $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $g' \in L^1(\mathbb{R})$ so, dass $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega)| &\leq |\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega)| + |\hat{g}(\omega)| \\ &\leq \|f - g\|_1 + |\hat{g}(\omega)| < \varepsilon + |\hat{g}(\omega)|. \end{aligned}$$

Mit Teil 1. folgt $\lim_{\omega\to\pm\infty}\hat{g}(\omega) = 0$ und hieraus die Behauptung. □

Bemerkung A.4. *Als Ergänzung zu Teil a) des obigen Satzes formulieren wir die folgende Verschärfung: Falls für ein $0 < \alpha \leq 1$ die Bedingung*

$$K_\alpha := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|(1 + |x|^\alpha)\,dx < \infty$$

erfüllt ist, so gilt $\hat{f} \in Lip^\alpha(\mathbb{R})$. Zum Beweis schätzen wir den Ausdruck in (A.1) *weiter ab gemäß*

$$\begin{aligned} \sup_\omega |\hat{f}(\omega + \delta) - \hat{f}(\omega)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2\pi i\delta x} - 1|\cdot|f(x)|\,dx \\ &\leq \int_{|x|\leq 1/(2\pi\delta)} |2\pi\delta x|\cdot|f(x)|\,dx + \int_{|x|>1/(2\pi\delta)} 2|f(x)|\,dx. \end{aligned}$$

Im ersten Integral folgt aus $|2\pi\delta x| \leq 1$ und $\alpha \in (0, 1]$ sofort $|2\pi\delta x| \leq |2\pi\delta x|^\alpha$, und im zweiten Integral folgt $2 \leq 2|2\pi\delta x|^\alpha$. Also erhalten wir die Abschätzung

$$\sup_\omega |\hat{f}(\omega + \delta) - \hat{f}(\omega)| \leq 2(2\pi\delta)^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha|f(x)|\,dx \leq 2K_\alpha(2\pi\delta)^\alpha.$$

Das Resultat lässt sich sogar auf beliebige $\alpha > 0$ und die zugehörigen Lip^α-Räume ausdehnen. Auf einen Beweis verzichten wir hier.

BEISPIEL A.5. a) *Obwohl $|\hat{f}(\omega)| \to 0$ für $\omega \to \pm\infty$, muss nicht $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ gelten:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \le x, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \text{hat } \hat{f}(\omega) = \frac{1}{1 + 2\pi i\omega}.$$

b) *Gauss–Funktion*

Für $a > 0$ sei $g_a(x) := \sqrt{a}e^{-a\pi x^2}$. Es gilt

$$\hat{g}_a(\omega) = e^{-\pi\omega^2/a}$$

(d.h. die Fourier–Transformierte der Gauss–Funktion ist wieder eine Gauss–Funktion).

Beweis. *Wir definieren die Funktion*

$$\begin{aligned} h(y) &:= \sqrt{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(ax^2-2xy)}dx \\ &= \sqrt{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\pi\left(x-\frac{y}{a}\right)^2} e^{\pi y^2/a}dx \\ &= e^{\pi y^2/a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}dt = e^{\pi y^2/a} \end{aligned}$$

zunächst für $y \in \mathbb{R}$, damit die Substitution $t = x - \frac{y}{a}$ durchgeführt werden kann. Beide Seiten der Identität definieren aber eine ganze (holomorphe) Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, also gilt die Identität sogar für alle $y \in \mathbb{C}$. Setzen wir $y = -i\omega$ mit $\omega \in \mathbb{R}$ ein, so gibt dies die Behauptung. □

Der folgende Satz erklärt, dass die formale Definition der "inversen Fourier-Transformieren" in Definition A.1 tatsächlich die inverse Transformation darstellt. Dies werden wir später auf den Raum der L^2-Funktionen verallgemeinern.

SATZ A.6. *Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ gilt*

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{2\pi i\omega x}d\omega$$

in allen Stetigkeitspunkten von f.

Beweis von Satz A.6. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Weiter sei f stetig in x. Setze $h_a(t) = e^{2\pi itx}e^{-\pi at^2}$ mit $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $\hat{h}_a(y) = a^{-1/2}e^{-(y-x)^2/a} = g_{1/a}(y - x)$, wobei $g_{1/a}$ wie in Beispiel A.5(b) definiert ist. Wir verwenden die folgenden Eigenschaften von $g_{1/a}$:

(i) Normierung und gleichmäßige Beschränktheit:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g_{1/a}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} |g_{1/a}(y)|\,dy = 1, \qquad a > 0.$$

(ii) Lokalität bei $y = 0$: für festes $\delta > 0$ ist

$$\lim_{a\to 0}\sup_{|y|>\delta} |g_{1/a}(y)| = 0.$$

Man nennt die Familie $(g_{1/a})_{a>0}$ eine *approximative Einheit*, weil für jede Funktion $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, gilt

$$\lim_{a\to 0} \|f - (f * g_{1/a})\|_p = 0,$$

und in Stetigkeitspunkten von f auch die punktweise Konvergenz vorliegt (Nachweis mit Sätzen der Integrationstheorie). Also ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{a\to 0} f * g_{1/a}(x) = \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g_{1/a}(x-y) dy \\ &= \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\hat{h}_a(y)\, dy. \end{aligned}$$

Einfache Anwendung des Satzes von Fubini ergibt (beachte $f, \hat{f}, h_a, \hat{h}_a \in L^1(\mathbb{R})$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\hat{h}_a(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} h_a(u) e^{-2\pi i u y}\, du\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(u)\hat{f}(u)\, du.$$

Also haben wir

$$f(x) = \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} h_a(u)\hat{f}(u)\, du.$$

Der Grenzwert $a \to 0$ kann in das Integral hereingezogen werden, weil $|h_a(u)\hat{f}(u)| \le |\hat{f}(u)|$ für alle $a > 0$ gilt und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ist (Satz von der majorisierten Konvergenz des Lebesgue-Integrals). Mit $\lim_{a\to 0} h_a(u) = e^{2\pi i u x}$ folgt die Behauptung. □

Weitere Eigenschaften und Rechenregeln der Fourier-Transformation für Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ lassen sich unter "natürlichen" Voraussetzungen (etwa an die Existenz der Ableitungen und deren Integrierbarkeit) formulieren.

Eigenschaften und Rechenregeln A.7. *Es gelten die folgenden Rechenregeln:*

Eigenschaft	*Funktion* $f(t)$	*Fourier–Transformierte* $\hat{f}(\omega)$
Translation	$f(t-u)$	$e^{-2\pi i u\omega}\hat{f}(\omega)$
Modulation	$e^{2\pi i\xi t} f(t)$	$\hat{f}(\omega - \xi)$
Skalierung	$f(t/s)$	$\lvert s\rvert \hat{f}(s\omega)$
Ableitung in der Zeit–Komponente	$f^{(k)}(t)$	$(2\pi i\omega)^k \hat{f}(\omega)$
Ableitung in der Frequenz–Komponente	$(-2\pi i t)^k f(t)$	$\frac{d^k}{d\omega^k}\hat{f}(\omega)$
Komplex–Konjugierte	$\overline{f(t)}$	$\overline{\hat{f}(-\omega)}$
Reelle Funktion	$f = Re\, f$	$\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$
Faltung	$f * g(t)$	$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$
Produkt	$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}(\omega)$
Inverse	$\hat{f}(t)$	$f(-\omega)$

Übung A.8. *Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Fourier-Transformierten:*

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(t)](\omega) = (2\pi i\omega)^k \hat{f}(\omega) \qquad \text{(Ableitungsformel im Zeit-Bereich)},$$

$$\mathcal{F}[(-2\pi i t)^k f(t)](\omega) = \hat{f}^{(k)}(\omega) \qquad \text{(Ableitungsformel im Frequenz-Bereich)}.$$

BEMERKUNG A.9. *Für $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ist die Faltung definiert als*

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Offensichtlich ist $f * g$ eine Funktion in $L^1(\mathbb{R})$, denn mit dem Satz von Fubini gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f*g(x)|\,dx \le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,|g(x-t)|\,dt\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)|\,dx}_{=\|g\|_1} dt = \|g\|_1\,\|f\|_1.$$

Auch für $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $g \in L^p(\mathbb{R})$ ist $f * g \in L^p(\mathbb{R})$: zum Beweis führen wir mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Aufteilung $|f(t)| = |f(t)|^{1/q}\,|f(t)|^{1/p}$ durch und erhalten mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f * g(x)|^p\,dx &\le \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{1/q}(|f(t)|^{1/p}|g(x-t)|\,dt\right)^p dx \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt\right)^{p/q}}_{=\|f\|_1^{p/q}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,|g(x-t)|^p\,dt\right)^{p/p} dx \\
&= \|f\|_1^{p/q} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)|^p\,dx\ dt \\
&= \|f\|_1^{1+(p/q)} \|g\|_p^p.
\end{aligned}$$

Wegen $1 + \frac{p}{q} = p(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) = p$ ergibt sich also

$$\|f * g\|_p^p = \|f\|_1^p\ \|g\|_p^p.$$

Noch etwas allgemeiner ist die Youngsche Ungleichung *(siehe z.B. Zygmund, Trigonometric Series, Satz II.1.15, Seite 37):*

Für $1 \le p, q, r \le \infty$ gelte die Beziehung $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Dann gilt für alle $f \in L^p$ und $g \in L^q$

$$f * g \in L^r \qquad \text{sowie} \qquad \|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

2. Fourier–Transformation in $L^2(\mathbb{R})$

Der "natürliche" Definitionsbereich der Fourier-Transformation ist der Raum $L^2(\mathbb{R})$ der quadrat–integrierbaren Funktionen. Wegen $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ ist die Definition der FT auf $L^2(\mathbb{R})$ etwas komplizierter, liefert aber dafür eine Isometrie!

HILFSSATZ A.10. *Die* Autokorrelation *von $f \in L^2(\mathbb{R})$ ist definiert als*

$$F(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} f(x+t)\,dt.$$

F ist gleichmäßig stetig und beschränkt mit $|F(x)| \le \|f\|_2^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Den Beweis führen wir in der Übung.

SATZ A.11. *Für $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ gilt $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$; genauer: es gilt die* Parseval–Identität

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2.$$

Beweis. $\hat{f}$ ist stetig und beschränkt nach Satz A.2 a). Wir verwenden den Gauß-Kern $g_a(x) = \sqrt{a}e^{-\pi a x^2}$, $a > 0$, aus Beispiel A.5(b) zur Faltung mit f. Beachte $\hat{g}_a(y) = e^{-\pi y^2/a}$.

1. Wegen $f \in L^2(\mathbb{R})$ ist $\hat{g}_a|\hat{f}|^2 \in L^1(\mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_a(y)|\hat{f}(y)|^2 dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_a(y)\hat{f}(y)\overline{\hat{f}(y)}\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_a(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i y t}\, dt\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)}e^{2\pi i y u}\, du\right) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(u)} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_a(y)e^{2\pi i y(u-t)}\, dy\right)}_{=g_a(u-t),\ \text{wie in Beispiel A.5}} du\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)}g_a(u-t)\, du\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g_a(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(x+t)}\, dt}_{=:\overline{F(x)}\ \text{(Autokorrelation)}}\quad dx.
\end{aligned}$$

2. Die Autokorrelation F ist laut Lemma A.10 stetig und beschränkt. Für $a \to \infty$ erhält man mit Mitteln der Integrationstheorie (hier: Approximation der δ-Distribution)

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(x)F(x)\, dx = F(0) = \|f\|_2^2.$$

3. Andererseits gilt die punktweise Konvergenz

$$\lim_{a\to\infty} \hat{g}_a(y)|\hat{f}(y)|^2 = |\hat{f}(y)|^2$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Die Integrationstheorie (hier: Fatous Lemma) liefert zunächst die Abschätzung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(y)|^2\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{a\to\infty} \hat{g}_a(y)|\hat{f}(y)|^2\, dy \le \liminf_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_a(y)|\hat{f}(y)|^2\, dy = \liminf_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(x)F(x)\, dx = \|f\|_2^2.$$

Also gilt $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ und $\|\hat{f}\|_2 \le \|f\|_2$.

4. Wir verwenden schließlich ein weiteres Mittel der Integrationstheorie (Satz über die majorisierte Konvergenz): wegen $0 \le \hat{g}_a(y) \le 1$ ist $\hat{g}_\alpha(y)|\hat{f}(y)|^2 \le |\hat{f}(y)|^2$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Die Majorante $|\hat{f}(y)|^2$ ist integrierbar, also gilt in der Rechnung in 3. sogar

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(y)|^2\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{a\to\infty} \hat{g}_a(y)|\hat{f}(y)|^2\, dy = \lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_a(y)|\hat{f}(y)|^2\, dy = \|f\|_2^2. \qquad \square$$

Betrachten wir im obigen Satz auch die L^2-Norm im Definitionsbereich der Founrier-Transformation $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$, so ist hierdurch ein linearer beschränkter Operator definiert. Seine Operatornorm ist

$$\|\mathcal{F}\|_{L^1\cap L^2 \to L^2} = \sup_{\substack{f\in L^1\cap L^2\\ \|f\|_2=1}} \|\mathcal{F}f\|_2 = 1.$$

Weil $L^1 \cap L^2$ dicht in L^2 liegt, kann $\mathcal{F}$ eindeutig auf $L^2(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden, u.z. unter Beibehaltung der Operatornorm. Konkret lässt sich diese Fortsetzung durch verschiedene Approximationen $f_n \overset{\Longrightarrow}{L^2} f$ mit $f_n \in L^2 \cap L^1$ angeben. Dies führt zu folgenden äquivalenten Definitionen der Fourier-Transformierten von $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Die Fourier-Transformation $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ist definiert als

(i) eindeutige Fortsetzung von $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$, oder

(ii)
$$\hat{f}(\omega) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(t)e^{-2\pi it\omega}\, dt,$$
oder

(iii)
$$\hat{f}(\omega) = \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-a\pi t^2} e^{-it\omega}\, dt.$$

Für festes $N \in \mathbb{N}$ existieren die Integrale in (ii) und (iii) für jedes $\omega \in \mathbb{R}$. Für $N \to \infty$ liegt Konvergenz in der L^2-Norm gegen $\hat{f}$ vor.

Mit den bisherigen Vorbereitungen folgt nun der Hauptsatz der Fourier-Transformation.

Satz A.12. *(Hauptsatz zur FT)*

Der Operator $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ist ein isometrischer Isomorphismus des Hilbertraums $L^2(\mathbb{R})$; d.h. $\mathcal{F}$ ist eine lineare beschränkte bijektive Abbildung mit
$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2, \qquad f \in L^2(\mathbb{R}).$$
Die Umkehrabbildung ist der adjungierte Operator $\mathcal{F}^*$,
$$\mathcal{F}^{-1}g = \mathcal{F}^*g = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{2\pi i\omega\cdot}\, d\omega, \qquad g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Beweis. Zu beweisen ist nur die Surjektivität und die Formel für $\mathcal{F}^{-1}$. Zu $g \in L^2(\mathbb{R})$ setze $h(x) = (\mathcal{F}g)(-x)$ und zeige $\|\hat{h} - g\|_2 = 0$. □

Korollar A.13. *Für $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ gelten*

a) $\|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2$ *(Parseval–Identität);*

b) $\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$ *(Plancherel-Identität)*

Beweis (a) wurde bereits gezeigt. Die übliche Polarisierung gibt
$$\langle f, g\rangle = \frac{\|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2}{4} + \frac{\|f-ig\|_2^2 - \|f+ig\|_2^2}{4i}.$$
Damit folgt (b) aus (a). □

Übung A.14. *Sei*
$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & -1 \le t < 1, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

a) *Bestimmen Sie die Fourier–Transformierte von ϕ.*

b) *Bestimmen Sie den Wert des Integrals*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2} dy$$

unter Anwendung der Parsevalschen Gleichung.