

## Kontinuierliche Wavelet–Transformation

Bevor wir zur Konstruktion weiterer Wavelet-Basen (etwa von  $L^2(\mathbb{R})$ ) gehen, wollen wir genauer auf den Informationsgehalt der inneren Produkte  $\langle f, e_{j,k} \rangle$  wie in Bemerkung 1.17 eingehen. Dazu führen wir den folgenden Begriff ein.

**DEFINITION 2.1.** Gegeben sei ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  und eine (Lebesgue-)integrierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ .

a) Falls für  $\nu \in \mathbb{N}_0$  das Integral

$$M_\nu(f) := \int_I t^\nu f(t) dt$$

existiert, heißt es das  $\nu$ -te Moment von  $f$ .

b) Falls für ein  $L \in \mathbb{N}$  alle Momente  $M_k(f)$ ,  $0 \leq k \leq L - 1$ , existieren und gleich Null sind, so besitzt  $f$  mindestens  $L$  verschwindende Momente.

**HILFSSATZ 2.2.** Sei  $I = (a, b)$  ein (beschränktes oder unbeschränktes) Intervall. Eine stetige integrierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  besitzt genau dann ein verschwindendes Moment, wenn  $f = g'$  mit einer stetig differenzierbaren Funktion  $g : I \rightarrow \mathbb{C}$  gilt, die

$$\lim_{t \rightarrow a} g(t) = \lim_{t \rightarrow b} g(t) = 0$$

erfüllt.

**Beweis:** Die Stammfunktion  $g(t) = \int_a^t f(s) ds$  besitzt die geforderten Eigenschaften.  $\square$

**ÜBUNG 2.3.** Zeigen Sie, dass die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

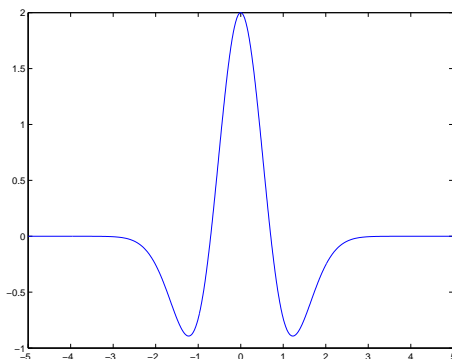
$$f_a(t) = 2\sqrt{a} (1 - 2a^2 t^2) e^{-a^2 t^2}$$

zwei verschwindende Momente besitzt. Diese Funktion heißt im Englischen “Mexican hat” (deutsch: Sombrero?), da der Graph bei Rotation um die  $y$ -Achse ein entsprechendes Bild liefert.

Eine weitere Möglichkeit, Funktionen auf  $I = \mathbb{R}$  mit verschwindendem Moment zu erhalten, wird in der folgenden Aufgabe behandelt.

**ÜBUNG 2.4.** Gegeben sei eine integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , für die die ersten  $L$  Momente existieren und die  $M_0(f) \neq 0$  erfüllt. Weiter seien  $c_k \in \mathbb{C}$ ,  $s_k \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq k \leq K$ . Dann gilt: Die Funktion

$$g(t) = \sum_{k=1}^K c_k f(t - s_k)$$

BILD 2.1. Mexican hat mit  $a = 1$ 

besitzt genau dann  $L$  verschwindende Momente, wenn

$$\sum_{k=1}^K c_k s_k^\nu = 0, \quad 0 \leq \nu \leq L-1,$$

gilt.

Wir kommen nun zur ersten, sehr allgemeinen Definition eines Wavelets.

DEFINITION 2.5. (Wavelet)

Eine Funktion  $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  heißt Wavelet, wenn  $M_0(\psi) = 0$  gilt.

Der englische Begriff “Wavelet” bezieht sich auf die Form des Grafen von  $\psi$ , den man sich als “kleine Welle” vorstellen kann. Wie beim Haar-Wavelet wird die Stauchung und Verschiebung der Funktion  $\psi$  eine wichtige Rolle spielen. Dazu die folgende Kurzschreibweise.

BEZEICHNUNG 2.6. Gegeben sei eine Funktion  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Für  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $b \in \mathbb{R}$  verwenden wir die Bezeichnung

$$\psi_{a,b} := |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right).$$

Ohne die Gefahr von Verwechslungen werden wir später für  $j, k \in \mathbb{Z}$  auch

$$\psi_{j,k} := 2^{j/2} \psi(2^j \cdot -k)$$

verwenden. Dies entspricht der Wahl  $a = 2^{-j}$  und  $b = 2^{-j}k$ . Bild 2.6 zeigt die Funktionen  $\psi_{a,0}$  zum Mexican-Hat Wavelet und  $a = 1, 3, 6$  (links) sowie die Fourier-Transformierten (rechts).

DEFINITION 2.7. Sei  $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  ein Wavelet. Die kontinuierliche Wavelet-Transformation (CWT) ist der lineare Operator  $W_\psi$  auf  $L_2(\mathbb{R})$  mit

$$(W_\psi f)(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad a \neq 0, b \in \mathbb{R}.$$

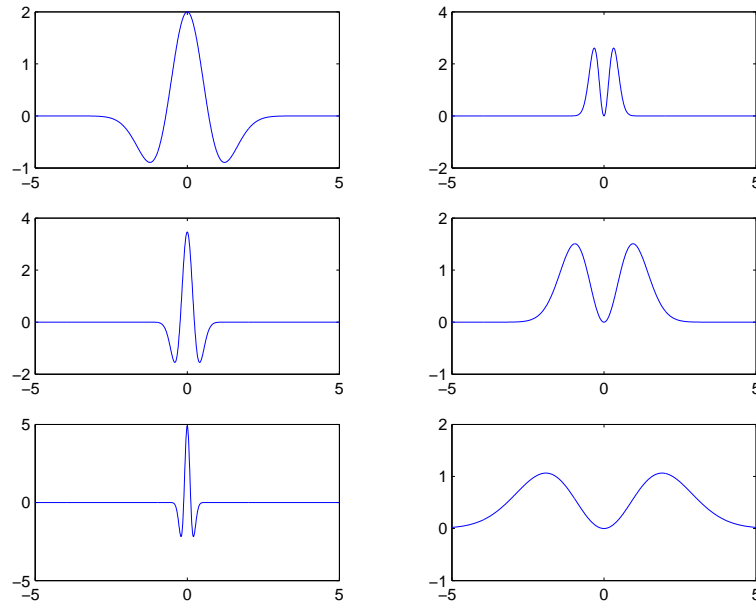


BILD 2.2. Mexican-hat Funktion mit Skalierung  $a = 1, 3, 6$  ohne Shift (links), sowie die Fouriertransformierte (rechts).

ÜBUNG 2.8. Man berechne (mit Matlab) die kontinuierliche Wavelet-Transformation  $W_\psi f$  zum Mexican-Hat Wavelet  $\psi$  und der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & t \in [-1, 1], \\ 2/3, & t \in (1, \pi/2), \\ 2 \sin(50t) + 3 \cdot \text{rand}(1), & t \in [\pi/2, 2\pi]. \end{cases}$$

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $f$ . Zum Zeichnen der Wavelet-Transformation  $W_\psi f$  verwende man die Darstellung der Funktionswerte auf einem Rechteck mit Achsen  $-10 \leq \log_2 a \leq 0$  und  $-5 \leq b \leq 10$  durch Grau- oder Farbwerte.

BEMERKUNG 2.9. (i) Für festes  $a \neq 0$  ist die Funktion  $b \mapsto (W_\psi f)(a, b)$  die Faltung von  $f$  mit der Funktion

$$\tilde{\psi}_a(x) = |a|^{-1/2} \overline{\psi\left(-\frac{x}{a}\right)},$$

d.h.

$$(W_\psi f)(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = f * \tilde{\psi}_a(b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \tilde{\psi}_a(b-t) dt.$$

Für die  $L_1$ - und die  $L_2$ -norm von  $\tilde{\psi}_a$  gilt

$$\|\tilde{\psi}_a\|_2 = \|\psi\|_2, \quad \|\tilde{\psi}_a\|_1 = |a|^{1/2} \|\psi\|_1.$$

Die Cauchy-Schwarz Ungleichung liefert die punktweise Abschätzung

$$(2.1) \quad |(W_\psi f)(a, b)| \leq \|\tilde{\psi}_a\|_2 \|f\|_2.$$

Weiterhin gilt mit den üblichen Abschätzungen für die Faltung von Funktionen

$$\|(W_\psi f)(a, \cdot)\|_2 = \|f * \tilde{\psi}_a\|_2 \leq \|\tilde{\psi}_a\|_1 \|f\|_2 = |a|^{1/2} \|\psi\|_1 \|f\|_2.$$

Insbesondere ist also die Funktion  $(W_\psi f)(a, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  quadrat-integrierbar. Zur Integrierbarkeit über den gesamten Parameterbereich  $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  werden wir später eine genaue Aussage kennen lernen.

- (ii) Der Wert  $(W_\psi f)(a, b)$  bestimmt (im Fall  $\|\psi\|_2 = 1$ ) die Korrelation von  $f$  und  $\tilde{\psi}_a$ .

DEFINITION 2.10. Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt Hölder- (oder Lipschitz-) stetig zum Exponenten  $0 < \alpha \leq 1$ , geschrieben  $f \in \text{Lip}^\alpha(\mathbb{R})$ , wenn  $K > 0$  existiert mit

$$(2.2) \quad |f(x) - f(y)| \leq K \cdot |x - y|^\alpha$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .  $f$  heißt Hölder-stetig zum Exponenten  $\alpha$  an der Stelle  $x_0$ , falls  $K > 0$  existiert mit

$$(2.3) \quad |f(x) - f(x_0)| \leq K \cdot |x - x_0|^\alpha$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

BEISPIEL 2.11. a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(x) = \sqrt{|x|}$  ist in jedem Punkt  $x_0 \neq 0$  Hölder-stetig zum Exponenten 1, in  $x_0 = 0$  jedoch nur Hölder-stetig zum Exponenten  $\frac{1}{2}$ .

b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar und  $f'$  beschränkt impliziert  $f \in H^1(\mathbb{R})$  (Beweis mit MWS).

Die Einschränkung des Hölder-Exponenten  $\alpha$  auf  $(0, 1]$  in der obigen Definition ist sinnvoll, da aus der Bedingung 2.2 mit  $\alpha > 1$  sofort die Differenzierbarkeit von  $f$  sowie die Beziehung  $f' \equiv 0$  folgt,  $f$  also eine konstante Funktion ist. Um trotzdem Hölder-Klassen zu beliebigem Exponenten  $\alpha > 0$  zu betrachten, verwendet man Ableitungen von  $f$ .

DEFINITION 2.12. Für  $\alpha > 0$ ,  $\alpha = r + \beta$  mit  $r \in \mathbb{N}_0$  und  $\beta \in (0, 1]$ , definieren wir

$$\text{Lip}^\alpha(\mathbb{R}) := \{f \in C^r(\mathbb{R}); f^{(r)} \in \text{Lip}^\beta(\mathbb{R})\}.$$

$f$  heißt Hölder-stetig zum Exponenten  $\alpha$  an der Stelle  $x_0$ , falls  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$   $r$ -mal differenzierbar ist und  $f^{(r)}$  an der Stelle  $x_0$  Hölder-stetig zum Exponenten  $\beta$  ist.

Sowohl für die globale wie auch für die lokale Hölder-Stetigkeit liefert die kontinuierliche Wavelet-Transformation (fast) scharfe Charakterisierungen.

SATZ 2.13. (Globale Hölder-Stetigkeit) Gegeben sei ein Wavelet  $\psi$  mit  $r + 1$  verschwindenden Momenten sowie beschränktem Moment  $M_{r+1}(\psi)$ . Weiter sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$  beschränkt und stetig.

- (i) Falls  $f$  Hölder-stetig zum Exponenten  $r < \alpha \leq r + 1$  ist und  $f^{(r)}$  beschränkt ist, so existiert  $K > 0$  mit

$$(2.4) \quad |W_\psi f(a, b)| \leq K \cdot |a|^{\alpha + \frac{1}{2}}, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

- (ii) Die Umkehrung gilt für  $r < \alpha < r + 1$  und  $\psi$  mit kompaktem Träger: Falls eine Konstante  $K > 0$  so existiert, dass (2.4) gilt, so ist  $f$  Hölder-stetig zum Exponenten  $\alpha$ .

Die Aussage über die lokale Hölder-Stetigkeit wird etwas komplizierter.

SATZ 2.14. Gegeben sei ein Wavelet  $\psi$  mit kompakten Träger und  $r + 1$  verschwindenden Momenten (sowie beschränktem Moment  $M_{r+1}(\psi)$ ). Weiter sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$  sowie  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

- (i) Falls  $f$  Hölder-stetig zum Exponenten  $r < \alpha = r + \beta \leq r + 1$  an der Stelle  $x_0$  ist, so existieren  $a_0 > 0$  und  $K > 0$  so, dass für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $0 < |a| < a_0$  gilt

$$(2.5) \quad |W_\psi f(a, b)| \leq K \cdot |a|^{r+\frac{1}{2}} (|a|^\beta + |b - x_0|^\beta).$$

- (ii) Es gilt die folgende Umkehrung: Falls es Konstanten  $a_0, K > 0$  sowie  $\gamma > r$  so gibt, dass

$$(2.6) \quad |W_\psi f(a, b)| \leq K \cdot |a|^{\gamma+\frac{1}{2}},$$

für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $0 < |a| < a_0$  gilt, und falls darüber hinaus  $0 < \beta < 1$  existiert mit

$$(2.7) \quad |W_\psi f(a, b)| \leq K \cdot |a|^{r+\frac{1}{2}} \left( |a|^\beta + \frac{|b - x_0|^\beta}{1 + |\log |b - x_0||} \right)$$

für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $0 < |a| < a_0$ , so ist  $f$  Hölder-stetig zum Exponenten  $\alpha = r + \beta$  an der Stelle  $x_0$ .

Die Beweise der Umkehrungen (ii) der obigen Sätze können wir erst nach weiteren Vorbereitungen (insb. Hilfsmittel aus der Fourier-Transformation) in Kapitel 3 angeben. Ohne weitere Vorbereitung können aber die Teile (i) schon mit einfachen Hilfsmitteln der Analysis bewiesen werden.

**Beweis.** Zu  $x_0 \in \mathbb{R}$  wählen wir eine Umgebung  $U$  so, dass  $f$  in  $U$  mindestens  $r$ -mal differenzierbar und die  $r$ -te Ableitung Hölder-stetig zum Exponenten  $\beta$  ist. Unter den Voraussetzungen von Satz 2.13 kann  $U = \mathbb{R}$  gewählt werden, ansonsten werde  $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  mit  $\delta > 0$  gewählt. Die Taylorentwicklung von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $b \in U$  lautet

$$f(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{f^{(j)}(b)}{j!} (x-b)^j + \int_b^x \frac{f^{(r)}(t)}{(r-1)!} (x-t)^{r-1} dt, \quad x \in U.$$

Die Voraussetzungen an  $\psi$  liefern für beliebige  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , die Identität

$$(2.8) \quad \int_{\mathbb{R}} \psi_{a,b}(x) (x-b)^j dx = 0, \quad 0 \leq j \leq r.$$

Hieraus folgt insbesondere für  $j = r$  und  $U = \mathbb{R}$

$$(2.9) \quad \int_{\mathbb{R}} \left( \int_b^x \frac{f^{(r)}(t)}{(r-1)!} (x-t)^{r-1} dt \right) \psi_{a,b}(x) dx = 0.$$

Dann erhalten wir weiter für  $U = \mathbb{R}$  aus den Voraussetzungen von Satz 2.13(i)

$$\begin{aligned}
|W_\psi f(a, b)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} \left( \int_b^x \frac{f^{(r)}(t) - f^{(r)}(b)}{(r-1)!} (x-t)^{r-1} dt \right) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx \right| \\
&\leq K |a|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left( \int_b^x \frac{|t-b|^\beta}{(r-1)!} (x-t)^{r-1} dt \right)}_{\leq |x-b|^{\beta+r}/(r-1)!} \left| \psi \left( \frac{x-b}{a} \right) \right| dx \\
&= \tilde{K} |a|^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |y|^\alpha |\psi(y)| dy.
\end{aligned}$$

Die Existenz von  $M_{r+1}(\psi)$  sichert zu, dass das letzte Integral endlich ist. Die Konstante  $K$  in (2.4) hängt also nur von  $r$ ,  $\psi$  und der Lipschitz-Konstante  $K$  der  $r$ -ten Ableitung von  $f$  ab. Damit ist Satz 2.13(i) bewiesen.

In Satz 2.14 wird vorausgesetzt, dass  $\psi$  kompakten Träger besitzt. Also existiert  $a_0 > 0$  so, dass für alle  $|a| \leq a_0$  und  $b \in [x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]$  die Beziehung  $\text{supp } \psi_{a,b} \subset U$  gilt. Wegen  $0 < \beta \leq 1$  gilt die allgemeine Ungleichung

$$|x-y|^\beta \leq |x-z|^\beta + |z-y|^\beta.$$

Für alle  $|a| \leq a_0$  und  $b \in [x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]$  folgt dann wie beim vorherigen Beweisteil

$$\begin{aligned}
|W_\psi f(a, b)| &= \left| \int_U f(x) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx \right| \\
&= \left| \int_U \left( \int_b^x \frac{f^{(r)}(t) - f^{(r)}(x_0)}{(r-1)!} (x-t)^{r-1} dt \right) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx \right| \\
&\leq K |a|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left( \int_b^x \frac{|t-x_0|^\beta}{(r-1)!} (x-t)^{r-1} dt \right)}_{\leq (|x-b|^\beta + |b-x_0|^\beta) |x-b|^{r-1}/(r-1)!} \left| \psi \left( \frac{x-b}{a} \right) \right| dx \\
&= \tilde{K} \left( |a|^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |y|^\alpha |\psi(y)| dy + |b-x_0|^\beta |a|^{r+\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |y|^r |\psi(y)| dy \right).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung von Satz 2.14(i).  $\square$

**BEMERKUNG 2.15.** Der Term  $|b-x_0|^\alpha$  in der Charakterisierung der lokalen Lipschitz-Stetigkeit gibt den "Einflussbereich" einer isolierten Singularität von  $f$  an einer Stelle  $x_0$  an. Nehmen wir an, dass  $f$  stetig differenzierbar in  $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$  und Hölderstetig zum Exponenten  $0 < \alpha < 1$  an der Stelle  $x_0$  ist. Weiter gelte  $\text{supp } \psi \subset [-c, c]$  mit einem  $c > 0$ . Dann wirkt sich die Singularität überhaupt nicht auf die Werte  $W_\psi f(a, b)$  mit  $|b-x_0| > ac$  aus. Also erhalten wir die Abschätzung genau wie in der globalen Lipschitz-Stetigkeit

$$|W_\psi f(a, b)| \leq K |a|^{3/2}, \quad \text{falls } |b-x_0| > ac.$$

Für kleine Werte von  $|a|$  wird sich die Singularität von  $f$  nur innerhalb des Kegels

$$K_{x_0, c} \{(a, b); a \neq 0, b \in [x_0 - ac, x_0 + ac]\}$$

anhand der Größe  $\mathcal{O}(|a|^{\alpha+1/2})$  zeigen.

Man kann also einen Schätzwert für den lokalen Hölder-Exponenten an der Stelle  $x_0$  erzielen, indem man

$$\liminf_{a \rightarrow 0} \max_{|b-x_0| \leq ac} \left( \frac{\ln |W_\psi f(a, b)|}{\ln |a|} - 1/2 \right)$$

bestimmt.

Hierbei ist eine natürliche Grenze durch die Anzahl  $L$  der verschwindenden Momente von  $\psi$  gegeben. Will man also einen großen Bereich von Hölder-Exponenten abdecken, muss man von vornherein ein Wavelet  $\psi$  mit mehreren verschwindenden Momenten verwenden.

BEISPIEL 2.16. Das Signal `hoelder.mat` lautet

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - x, & 2 \leq x \leq 4, \\ 2\sqrt{1 - (7-x)^2}, & 6 \leq x \leq 8, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir haben die lokale Lipschitz-Ordnung  $\alpha = 1/2$  bei  $x = 6$  und  $x = 8$ ,  $\alpha = 1$  bei  $x = 0, 2, 4$ . Dazwischen ist die Funktion unendlich oft differenzierbar. Zur Wavelet-Transformation rufen wir in `matlab` die Wavelet-Toolbox auf mit `wavemenu`, laden die Funktion  $f$  mit dem Menüeintrag `file/load signal`, und stellen das Wavelet `sym4` ein. Die Standardeinstellung ist die Zeit-Schrittweite 1, so dass wir den  $x$ -Bereich  $[0, 10]$  auf  $t \in [0, 1024]$  gestreckt sehen. Damit ist  $a = 1$  die kleinste Skalierung, dies entspricht  $a = 2^{-10}$  in unserer Definition. Mit `analyze` erhalten wir den Graphen von  $|W_\psi f(a, b)|$  mit  $1 \leq a \leq 64$  und  $0 \leq b \leq 1024$ . Die gewählte Farbeinstellung verwendet weiß für die maximalen Werte von  $|W_\psi f(a, \cdot)|$  und schwarz für die minimalen Werte von  $|W_\psi f(a, \cdot)|$  entlang jeder horizontalen Linie  $a = \text{const}$ . Man erkennt deutlich die Kegel der Einzugsbereiche zur kleinsten Lipschitz-Ordnung  $\alpha = 1/2$  mit der weissen Spitze bei  $x = 6$  und  $x = 8$ . Hier gilt "nur"  $|W_\psi f(a, \cdot)| = \mathcal{O}(|a|)$ . Die anderen drei Kegel bei  $x = 0, 2, 4$  zeigen stärkeres Abklingverhalten  $|W_\psi f(a, \cdot)| = \mathcal{O}(|a|^{3/2})$ , dazwischen ist  $|W_\psi f(a, \cdot)|$  nahezu null.

Wir benötigen als weiteres Hilfsmittel die Fourier-Transformation, um auch die Umkehrungen der Sätze 2.13 und 2.14 zu beweisen. Grundlagen der Fourier-Transformation werden im Anhang ?? gegeben. Mit Hilfe der Fourier-Transformation wird nun die folgende neue Definition eines Wavelets angegeben.

DEFINITION 2.17. (Wavelet)

Eine Funktion  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  heißt Wavelet, wenn

$$(2.10) \quad 0 < C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

BEMERKUNG 2.18. Wegen  $\hat{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$  ist das Integral in (2.10) genau dann endlich, wenn

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

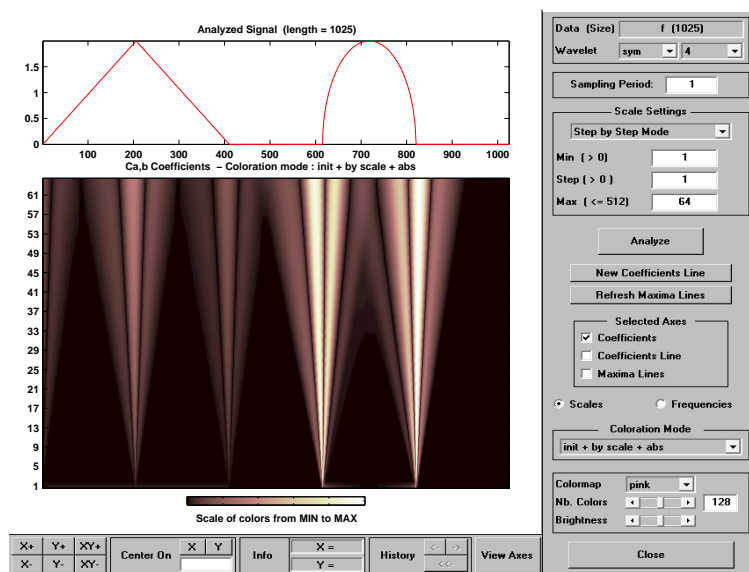


BILD 2.3. Die Funktion  $f$  (oben) und der Betrag der kontinuierlichen Wavelet-Transformation  $W_\psi f$ .

für ein  $\delta > 0$  gilt. Entscheidend ist also das Verhalten von  $\hat{\psi}$  in einer Umgebung von  $\omega = 0$ .

- a) Falls  $\psi \in L^1(\mathbb{R})$  gilt (also  $\hat{\psi}$  stetig ist), so ist  $\hat{\psi}(0) = M_0(\psi) = 0$  notwendig für die Existenz des Integrals. Also hat  $\psi$  mindestens ein verschwindendes Moment. Dies zeigt, dass beide Definitionen 2.5 und 2.17 ungefähr die gleiche Funktionenklasse beinhalten.
- b) Mit Hilfe der Rechenregeln A.7 lassen sich auch höhere verschwindende Momente von  $\psi$  durch die Fourier-Transformierte angeben: Falls  $t^\nu \psi$  ebenfalls in  $L^1(\mathbb{R})$  liegt, gilt

$$M_\nu(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} t^\nu \psi(t) dt = (-2\pi i)^{-\nu} \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi i t)^\nu \psi(t) dt = (\hat{\psi})^{(\nu)}(0).$$

ÜBUNG 2.19. Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  so, dass

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 = \text{konstant} =: D_\psi.$$

Zeigen Sie, dass  $\psi$  ein Wavelet ist mit  $C_\psi = 2 \ln 2 \cdot D_\psi$ .

BEMERKUNG 2.20. (Zusammenhang von Wavelet- und Fourier-Transformation)

Die kontinuierliche Wavelet-Transformation ist definiert als

$$(2.11) \quad W_\psi f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle, \quad \psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Die Fourier-Transformierte von  $\psi_{a,b}$  lässt sich mit den Rechenregeln A.7 berechnen als

$$(2.12) \quad \hat{\psi}_{a,b}(\omega) = |a|^{1/2} e^{-2\pi i b \omega} \hat{\psi}(a\omega).$$



Die Plancherel-Identität führt (2.11) über in

$$(W_\psi f)(a, b) = \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{a,b} \rangle = \sqrt{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)} e^{2\pi i b \omega} d\omega.$$

Dies kann als eine Formel der “Kurzzeit-Fouriertransformation” (oder Fenster-FT) für  $\hat{f}$  interpretiert werden, wobei die Fensterfunktion  $h_a(\omega) := \sqrt{|a|} \hat{\psi}(a\omega)$  mit dem Skalierungsparameter  $a$  gedehnt oder gestaucht wird.

Bei der Kurzzeit-FT würde das Fenster  $h_a$  zusätzlich noch verschoben. Stattdessen wirkt hier der Skalierungsfaktor  $a$  auf die Fensterfunktion. Nun kommt die Gestalt von  $h_a$  ins Spiel: wegen  $h_a(0) = \hat{\psi}(0) = 0$  hat  $h_a$  seine “Zentren” auf der positiven bzw. negativen  $\omega$ -Achse. Wir setzen z.B.

$$(2.13) \quad \omega_+^*(\hat{\psi}) = \frac{\int_0^\infty \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^\infty |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega}, \quad \Delta_+(\hat{\psi})^2 = \frac{\int_0^\infty (\omega - \omega_+^*)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^\infty |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega}.$$

Wird  $\psi$  nun mit  $a \neq 0$  skaliert und  $b \in \mathbb{R}$  verschoben, so ergibt sich durch einfache Rechnung

$$\omega_+^*(\hat{\psi}_{a,b}) = \frac{\omega_+^*(\hat{\psi})}{a}, \quad \Delta_+(\hat{\psi}_{a,b})^2 = \frac{\Delta_+(\hat{\psi})^2}{a^2}.$$

Das Frequenz-Fenster von  $\psi$  auf der positiven  $\omega$ -Achse ist das Intervall

$$J_+(\hat{\psi}) = [\omega_+^*(\hat{\psi}) - \Delta_+(\hat{\psi}), \omega_+^*(\hat{\psi}) + \Delta_+(\hat{\psi})].$$

Die Skalierung mit  $a > 0$  führt also sowohl zu einer Verschiebung als auch einer Änderung der Breite des Fensters,

$$J_+(\hat{\psi}_{a,b}) = \left[ \frac{\omega_+^*(\hat{\psi}) - \Delta_+(\hat{\psi})}{a}, \frac{\omega_+^*(\hat{\psi}) + \Delta_+(\hat{\psi})}{a} \right].$$

Skaliert man z.B. mit Zweierpotenzen  $a = 2, 4, 8, \dots$ , so entstehen “Oktaven” im Frequenzbereich, die zur Analyse akustischer Signale sinnvoll verwendet werden können. Diese Bedeutung des Skalierungsparameters  $a$  als gleichzeitiger Dehnungs- und Verschiebungs-Parameter im Frequenzbereich ist zentral zum Verständnis der Wavelet-Transformation.

Ähnlich zum Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation für die Fourier-Transformation gilt (mit entsprechender Definition von  $\Delta(\psi)$  über die ganze Zeit-Achse)

$$(2.14) \quad \Delta(\psi) \Delta_+(\hat{\psi}) > \frac{1}{4\pi}$$

für alle  $\psi$ ; Gleichheit wird nie erreicht.

Die Frage nach der Injektivität von  $W_f$  wird durch die Calderon<sup>1</sup>-Identität beantwortet, die für die CWT von Grossmann und Morlet (1984) angegeben wurde.

SATZ 2.21. Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  ein Wavelet mit  $C_\psi$  in (2.10). Dann gilt für alle  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(a, b) \overline{(W_\psi g)(a, b)} db \frac{da}{a^2} = C_\psi \langle f, g \rangle.$$

<sup>1</sup>Alberto P. Calderón, 1920–1998, berühmt für Arbeiten zu “Singulären Integralen”

**Beweis.** Die Funktionen  $F_a(\omega) = |a|^{1/2} \hat{f}(\omega) \cdot \overline{\hat{\psi}(a\omega)}$  und  $G_a(\omega) = |a|^{1/2} \hat{g}(\omega) \cdot \overline{\hat{\psi}(a\omega)}$  sind in  $L^2(\mathbb{R})$  (weil  $\psi \in L^1$ , also  $\hat{\psi}$  beschränkt). Die Plancherel-Identität liefert

$$\begin{aligned} (W_\psi f)(t, a) &= \langle f, \psi_{t,a} \rangle = \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{t,a} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_a(\omega) e^{2\pi i t \omega} d\omega = \hat{F}_a(-t). \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir  $(W_\psi g)(t, a) = \hat{G}_a(-t)$ . Nochmalige Anwendung der Plancherel-Identität ergibt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(t, a) \overline{(W_\psi g)(t, a)} dt &= \langle \hat{F}_a, \hat{G}_a \rangle \\ &= \langle F_a, G_a \rangle \\ &= |a| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} \cdot |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Aus

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = |a| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(a\omega)|^2}{|a\omega|} d\omega$$

folgt weiter

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(t, a) \overline{(W_\psi g)(t, a)} dt \frac{da}{a^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} \cdot |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega \frac{da}{|a|} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(a\omega)|^2}{|a|} da \right] d\omega \\ &= C_\psi \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = C_\psi \langle f, g \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

**BEMERKUNG 2.22.** a) Auf  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (= multiplikative Gruppe von  $\mathbb{R}$ ) ist durch  $\frac{da}{a^2}$  das kanonische Maß definiert. Das kartesische Produkt  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  wird mit dem Maß  $\frac{da}{a^2} dt$  versehen. Der Raum  $L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \frac{da}{a^2} dt)$  enthält alle quadrat-integrierbaren Funktionen bzgl. dieses Maßes, d.h.

$$h \in L^2\left(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \frac{da}{a^2} dt\right) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |h(a, t)|^2 \frac{da}{a^2} dt < \infty.$$

Die Bilder  $W_\psi f$  des Operators  $W_\psi$  bilden also einen Teilraum  $V \subset L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \frac{da}{a^2} dt)$ .

Satz 2.21 erklärt, dass  $\frac{1}{\sqrt{C_\psi}} W_\psi$  eine Isometrie von  $L^2(\mathbb{R})$  auf  $V$  ist, daher ist  $V$  sogar abgeschlossen.

b) Die Calderón-Identität kann auch geschrieben werden als

$$(2.15) \quad f = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(t, a) \psi_{t,a} dt \frac{da}{a^2}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

wobei die Gleichheit im Sinne der schwachen Konvergenz zu verstehen ist. Deshalb wird die Formel auch "resolution of identity" (ROI) genannt.

c) Die Calderón-Identität gilt sogar allgemeiner: Seien  $\psi_1$  und  $\psi_2$  Wavelets. Falls

$$C_{\psi_1, \psi_2} := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \overline{\hat{\psi}_2(\omega)}}{|\omega|} d\omega \neq 0$$

gilt, so erhalten wir die Identität

$$C_{\psi_1, \psi_2} \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_{\psi_1} f)(t, a) \overline{(W_{\psi_2} g)(t, a)} dt \frac{da}{a^2}.$$

Damit kann (bei Wahl von  $\psi_1 \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\psi_2 \in L^2(\mathbb{R})$  mit  $t\psi_2(t), \omega\hat{\psi}_2(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ ) sogar punktweise Konvergenz in der ROI-Identität erzielt werden, i.e.,

$$C_{\psi_1, \psi_2} f(x) = \lim_{\substack{A_1 \rightarrow 0 \\ A_2 \rightarrow \infty}} \int_{A_1 \leq |a| \leq A_2} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi_1} f(t, a) \psi_{2,t,a}(x) dt \frac{da}{a^2}$$

für beschränktes  $f \in L^2(\mathbb{R})$  in jedem Stetigkeitspunkt von  $f$  (siehe Daubechies "Ten Lectures on Wavelets", Proposition 4.2).

Wir kommen nun zu den noch ausstehenden Beweisen der zweiten Teile in Satz 2.13 und Satz 2.14.

**Beweis.** Es seien  $r \in \mathbb{N}_0$  und  $r < \alpha = r + \beta < r + 1$  gegeben. Die Teile (ii) von Satz 2.13 und Satz 2.14 werden in 4 Schritten bewiesen.

Schritt 1. Wir verwenden die Identität (2.15) mit einem zweiten Wavelet  $\psi_1 \in L^2(\mathbb{R})$ , das beschränkt,  $(r+1)$ -mal stetig differenzierbar ist und kompakten Träger hat. Weiterhin sei  $\psi_1$  so normalisiert, dass  $C_{\psi, \psi_1} = 1$  gilt. Aus (2.15) folgt dann  $f(x) = f_S(x) + f_L(x)$  mit

$$f_S(x) = \int_{|a| \leq 1} |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi} f(a, b) \psi_1 \left( \frac{x-b}{a} \right) db \frac{da}{a^2}$$

für "feine" Skalen (engl. 'small scales'), und

$$f_L(x) = \int_{|a| > 1} |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi} f(a, b) \psi_1 \left( \frac{x-b}{a} \right) db \frac{da}{a^2}$$

für "grobe" Skalen (engl. 'large scales').

Schritt 2. Wir zeigen, dass  $f_L$  und  $f_S$   $r$ -mal differenzierbar sind und dass alle Ableitungen bis zur Ordnung  $r$  stetig und beschränkt sind. Hierzu zeigen wir, dass die Ableitungen durch Differenzieren des Integranden (nach  $x$ ) erzielt werden. Da  $\psi_1$  kompakten Träger besitzt, sind sowohl  $\psi_1$  als auch die Ableitungen  $\psi_1^{(k)}$ ,  $0 \leq k \leq r+1$ , beschränkt. Aus  $|W_{\psi} f(a, b)| \leq \|\psi\|_2 \|f\|_2$  (siehe (2.1)) folgt für  $0 \leq k \leq r+1$

$$\begin{aligned} & \int_{|a| \geq 1} |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\psi} f(a, b)| \left| a^{-k} \psi_1^{(k)} \left( \frac{x-b}{a} \right) \right| db \frac{da}{a^2} \\ & \leq \|\psi\|_2 \|f\|_2 \int_{|a| \geq 1} |a|^{-k-3/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \left| a^{-1} \psi_1^{(k)} \left( \frac{x-b}{a} \right) \right| db}_{=\|\psi_1^{(k)}\|_1} da < \infty. \end{aligned}$$

Also ist die Funktion  $f_L$  sogar  $r+1$ -mal stetig differenzierbar. Die Ableitungen bis zur Ordnung  $r+1$  sind beschränkt durch

$$|f_L^{(k)}(x)| \leq \frac{2}{2k+1} \|\psi_1^{(k)}\|_1 \|\psi\|_2 \|f\|_2.$$

Zur Diskussion von  $f_S$  verwenden wir den Parameter  $\gamma$  aus (2.6) in Satz 2.14 bzw.  $\gamma := \alpha$  aus (2.4). Dann erhalten wir für  $0 \leq k \leq r$  ganz ähnlich

$$\begin{aligned} & \int_{|a| \leq 1} |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |W_\psi f(a, b)| \left| a^{-k} \psi_1^{(k)} \left( \frac{x-b}{a} \right) \right| db \frac{da}{a^2} \\ & \leq K \int_{|a| \leq 1} |a|^{\gamma-k-1} \|\psi_1^{(k)}\|_1 da < \infty. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus  $\gamma - r - 1 > -1$ . Damit sind auch die Ableitungen von  $f_S$  bis zur Ordnung  $r$  gegeben durch die Differentiation unter dem Integral. Sie sind jeweils beschränkt durch

$$|f_S^{(k)}(x)| \leq \frac{2K}{\gamma - k} \|\psi_1^{(k)}\|_1.$$

Schritt 3. Die Beschränktheit der  $r$ -ten Ableitungen ergibt bereits die Lipschitz Bedingung zum Exponenten 1 für große Differenzen  $h := |x - y|$ . Ist  $\text{supp } \psi_1 \subset [-R, R]$  mit  $R > 0$ , so wählen wir  $h_0 = 1/(2R + 2)$  und erhalten für alle  $|h| \geq h_0$  und  $x \in \mathbb{R}$  (bzw.  $x = x_0$  für die lokale Abschätzung)

$$|g(x+h) - g(x)| \leq |g(x+h)| + |g(x)| \leq 2\|g\|_\infty \leq (4R+4)\|g\|_\infty \cdot |h|.$$

Darüber hinaus ist  $f_L^{(r)}$  sogar (global) Hölder-stetig mit Exponent 1, da  $f_L^{(r+1)}$  beschränkt ist.

Schritt 4. Wir betrachten nun die Hölder-Stetigkeit der  $r$ -ten Ableitung

$$(2.16) \quad f_S^{(r)}(x) = \int_{|a| \leq 1} |a|^{-r-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(a, b) \psi_1^{(r)} \left( \frac{x-b}{a} \right) db \frac{da}{a^2}.$$

Dazu sei wieder  $\text{supp } \psi_1 \subset [-R, R]$  vorausgesetzt. Unter der Voraussetzung  $W_\psi f(a, b) \leq K|a|^{\alpha+\frac{1}{2}}$  aus Satz 2.13 folgt für  $0 < h < 1$ , dass

$$\begin{aligned} & |f_S^{(r)}(x+h) - f_S^{(r)}(x)| \\ & \leq K \int_{0 < |a| \leq h} |a|^{\alpha-r} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left| \psi_1^{(r)} \left( \frac{x+h-b}{a} \right) \right| + \left| \psi_1^{(r)} \left( \frac{x-b}{a} \right) \right| \right) db \frac{da}{a^2} \\ & \quad + K \int_{h < |a| \leq 1} |a|^{\alpha-r} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left| \psi_1^{(r)} \left( \frac{x+h-b}{a} \right) - \psi_1^{(r)} \left( \frac{x-b}{a} \right) \right|}_{=0, \text{ falls } |x-b| > |a|R+h} db \frac{da}{a^2} \\ & \leq 2K \int_{0 < |a| \leq h} |a|^{\alpha+1-r} \|\psi_1^{(r)}\|_1 \frac{da}{a^2} + 2K \int_{h < |a| \leq 1} |a|^{\alpha-r} (|a|R+h)h \|\psi_1^{(r+1)}\|_\infty \frac{da}{a^2} \\ & = 4K \|\psi_1^{(r)}\|_1 \frac{h^{\alpha-r}}{\alpha-r} + 4K \|\psi_1^{(r+1)}\|_\infty \left( Rh \frac{1-h^{\alpha-r}}{\alpha-r} + h^2 \frac{h^{\alpha-1-r}-1}{r+1-\alpha} \right) \\ & = \tilde{C} h^{\alpha-r}. \end{aligned}$$

Also ist auch  $f_S$  Hölder-stetig zum Exponenten  $\alpha$ .

Wir verwenden nun die Voraussetzungen aus Satz 2.14(ii) sowie die Bezeichnungen  $\gamma = r + \sigma$ ,  $\alpha = r + \beta$  und die vereinfachende Annahme  $x_0 = 0$ . Weiterhin können wir o.B.d.A. auch  $\beta > \sigma$  annehmen, da die Aussage sonst schon aus Satz 2.13 folgt.

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
& |f_S^{(r)}(h) - f_S^{(r)}(0)| \\
& \leq K \int_{0 < |a| \leq h^{\beta/\sigma}} |a|^\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \left| \psi_1^{(r)} \left( \frac{h-b}{a} \right) \right| db \frac{da}{a^2} \\
& \quad + K \int_{h^{\beta/\sigma} < |a| \leq h} \int_{-\infty}^{\infty} \left( |a|^\beta + \frac{|b|^\beta}{1+|\log|b||} \right) \left| \psi_1^{(r)} \left( \frac{h-b}{a} \right) \right| db \frac{da}{a^2} \\
& \quad + K \int_{0 < |a| \leq h} \int_{-\infty}^{\infty} \left( |a|^\beta + \frac{|b|^\beta}{1+|\log|b||} \right) \left| \psi_1^{(r)} \left( \frac{-b}{a} \right) \right| db \frac{da}{a^2} \\
& \quad + K \int_{h < |a| \leq 1} \int_{-\infty}^{\infty} \left( |a|^\beta + \frac{|b|^\beta}{1+|\log|b||} \right) \left| \psi_1^{(r)} \left( \frac{h-b}{a} \right) - \psi_1^{(r)} \left( \frac{-b}{a} \right) \right| db \frac{da}{a^2}.
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die vier Integrale auf der rechten Seite mit  $T_1$  bis  $T_4$ , so wird weiter abgeschätzt

$$T_1 \leq K \int_{0 < |a| \leq h^{\beta/\sigma}} |a|^{\sigma-1} \|\psi_1^{(r)}\|_1 da \leq C_1 |h|^\beta.$$

Betrachten wir nun  $T_2$ . Mit  $h_0 = 1/(2R+2)$  aus Schritt 3 und  $|a| \leq |h| \leq h_0$  folgt aus  $\psi_1^{(r)} \left( \frac{h-b}{a} \right) \neq 0$  sofort  $|b| \leq |a|R + h \leq h(R+1) \leq 1/2$ . Die Monotonie der Funktion  $\frac{|b|^\beta}{1+|\log|b||}$  auf  $(0, 1/2]$  ergibt

$$\frac{|b|^\beta}{1+|\log|b||} \leq \frac{(h(R+1))^\beta}{1+|\log(h(R+1))|} \leq \frac{(h(R+1))^\beta}{|\log h|}.$$

Nun folgt

$$\begin{aligned}
T_2 & \leq K \int_{h^{\beta/\sigma} < |a| \leq h} \left( |a|^{\beta-1} + |a|^{-1} \frac{(h(R+1))^\beta}{|\log h|} \right) \|\psi_1^{(r)}\|_1 da \\
& \leq C_2 |h|^\beta \left[ 1 + \frac{1}{\log h} \underbrace{\int_{h^{\beta/\sigma} < |a| \leq h} |a|^{-1} da}_{=2|\log h|(\beta/\sigma-1)} \right] \\
& \leq C'_2 |h|^\beta.
\end{aligned}$$

Für  $T_3$  erhalten wir analog aus  $\psi_1(-b/a) \neq 0$  die Beziehung  $|b| \leq |a|R \leq 1/2$ , also auch

$$\frac{|b|^\beta}{1+|\log|b||} \leq \frac{(|a|R)^\beta}{1+|\log(|a|R)|} \leq C|a|^\beta.$$

Daraus folgt einfacher als bei  $T_2$  die Abschätzung

$$T_3 \leq C_3 \int_{0 < |a| \leq h} |a|^{\beta-1} da = C'_3 h^\beta.$$

Bei  $T_4$  verwenden wir wieder

$$\left| \psi_1^{(r)} \left( \frac{x+h-b}{a} \right) - \psi_1^{(r)} \left( \frac{x-b}{a} \right) \right| \begin{cases} = 0, & \text{falls } |b| > |a|R+h, \\ \leq \frac{h}{|a|} \|\psi_1^{(r+1)}\|_\infty, & \text{falls } |b| \leq |a|R+h. \end{cases}$$

Wegen  $|a|R+h \leq (R+1)|a|$  für alle  $h \leq |a| \leq 1$  ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
T_4 & \leq 2Kh \|\psi_1^{(r+1)}\|_\infty \int_{h < |a| \leq 1} |a|^{-3} (|a|R+h) (|a|^\beta + (|a|R+h)^\beta) da \\
& \leq C_4 h \int_{h < |a| \leq 1} |a|^{-2+\beta} da \leq C'_4 h^\beta.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt also die Behauptung von Satz 2.13(ii).  $\square$

**BEMERKUNG 2.23.** *Eine Vermutung von Mallat besagt: Die relativen Extrema von  $W_\psi f(2^j, t)$  mit  $j \in \mathbb{Z}$  (als Funktionen von  $t$ ) liefern eine vollständige Beschreibung von  $f$ . Diese Vermutung ist falsch, dennoch führen auf diesen Extrema basierende Rekonstruktionsalgorithmen (ähnlich zur ROI) häufig auf gute Approximationen von  $f$ .*

**ÜBUNG 2.24.** *Führen Sie die Untersuchung zur Schätzung des lokalen Hölder-Exponenten für die Funktion aus Übung 2.8 durch.*