

Shift-invariante Räume

Die Calderón-Identität und (2.15) liefern eine Darstellung von f mittels aller Werte der kontinuierlichen Wavelet-Transformierten $W_\psi f$ auf $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Diese Darstellung ist stark redundant: das Ziel der folgenden Kapitel ist, f bereits aus abzählbar vielen Werten $W_\psi f(a_j, b_{j,k})$ mit geeigneten $a_j, b_{j,k}$ (und $j, k \in \mathbb{Z}$) zu rekonstruieren. Mit anderen Worten genügt eine geeignete *Abtastung* der kontinuierlichen Wavelet-Transformierten, um f hieraus zurück zu erhalten. Ein wichtiger Schritt hierbei ist die Einführung shift-invarianter Teilräume.

DEFINITION 3.1. *Es sei $G \subset \mathbb{R}$ eine Untergruppe der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$. Ein Funktionenraum V komplexer Funktionen auf \mathbb{R} heißt G -shift-invariant (oder G -verschiebungsinvariant), wenn für alle $f \in V, y \in G$ auch $f(\cdot - y) \in V$ gilt.*

BEISPIEL 3.2. (i) *Die üblichen Funktionenräume $C(\mathbb{R}), C^k(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}, C^\infty(\mathbb{R}), C_0(\mathbb{R}), C_0^k(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}, C_0^\infty(\mathbb{R}), L_p(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty$, sind shift-invariant bzgl. $G = \mathbb{R}$. Z.B. gilt*

$$\|f\|_p = \|f(\cdot - y)\|_p \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

(ii) *Der Raum der bandbeschränkten Funktionen*

$$PW_B := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = 0 \text{ für alle } |\omega| > B\}$$

ist ebenfalls \mathbb{R} -shift-invariant. Dies folgt sofort aus den Rechenregeln für die Fourier-Transformierte.

Die Umkehrung ist das folgende berühmte Resultat (vgl. H. Helson, Lectures on Invariant Subspaces, New York [u.a.] Acad. Press, New York, 1964): Zu jedem shift-invarianten abgeschlossenen Teilraum $V \subset L^2(\mathbb{R})$ existiert eine messbare Menge Ω , so dass

$$V = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = 0 \text{ für alle } \omega \notin \Omega\}.$$

(iii) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ *ist eine additive Untergruppe. Der Raum der Treppenfunktionen mit Sprungstellen in \mathbb{Z} ist \mathbb{Z} -shift-invariant.*

ÜBUNG 3.3. *Zeigen Sie, dass der Raum*

$$V_0 = \{f \in L_1(\mathbb{R}); \hat{f}(0) = 0\}$$

shift-invariant bzgl. \mathbb{R} ist.

Wir behandeln im Folgenden spezielle shift-invariante Räume zu *diskreten* Untergruppen von \mathbb{R} der Form $G = h\mathbb{Z}$ mit $h > 0$. Der Einfachheit halber setzen wir zuerst $h = 1$, also $G = \mathbb{Z}$.

DEFINITION 3.4. Zur Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir den Vektorraum der endlichen Linearkombinationen ganzzahliger Shifts

$$(3.1) \quad S_0(\phi) = \text{span}(\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}),$$

sowie für $1 \leq p \leq \infty$ den Vektorraum

$$(3.2) \quad S_p(\phi) = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(\cdot - k); (c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Die (unendliche) Linearkombination in (3.2) wird als "semidiskrete Faltung" der Folge $c = (c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit der Funktion ϕ bezeichnet; wir schreiben dafür

$$(3.3) \quad c \tilde{*} \phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(\cdot - k).$$

HILFSSATZ 3.5. Es sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $1 \leq p < \infty$ gegeben. Die 1-periodische Funktion $\theta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\phi(x + k)|$ sei in $L^p(0, 1)$.

(a) Dann ist $S_p(\phi) \subset L^p(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\|c \tilde{*} \phi\|_p \leq \|c\|_p \|\theta\|_{L^p(0,1)}.$$

Weiterhin ist $S_0(\phi)$ dicht in $S_p(\phi)$.

(b) Die Räume $S_0(\phi)$ und $S_p(\phi)$ sind \mathbb{Z} -shift-invariant.

(c) Für $p = 2$ hat die Funktion $c \tilde{*} \phi \in L^2(\mathbb{R})$ die Fouriertransformierte

$$(3.4) \quad (c \tilde{*} \phi)^\wedge(\omega) = \hat{c}(\omega) \hat{\phi}(\omega) \quad \text{f.ü.,}$$

wobei $\hat{c}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i k \omega}$ die zugehörige Fourier-Reihe zur Folge $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$ bezeichnet.

Beweis: (a) Die Funktion $\theta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\phi(x + k)|$ ist 1-periodisch. Die Zusatzvoraussetzung $\theta \in L^p(0, 1)$ impliziert, dass $\theta(x)$ fast überall als Grenzwert der konvergenten Reihe definiert ist.

Zur Abschätzung der L^p -Norm gehen wir ähnlich vor wie beim Beweis zur gewöhnlichen Faltung in Bemerkung A.9. Für $1 \leq p < \infty$ verwenden wir dazu die Aufteilung

$$|\phi(x - k)| = |\phi(x - k)|^{1/p} |\phi(x - k)|^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dann folgt mit der Hölder-Ungleichung für Reihen

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k \phi(x - k)| \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^p |\phi(x - k)| \right)^{1/p} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\phi(x - k)| \right)^{1/q} = \theta(x)^{1/q} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^p |\phi(x - k)| \right)^{1/p}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(x - k) \right|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \theta(x)^{p/q} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^p |\phi(x - k)| dx \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \theta(x + \ell)^{p/q} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^p |\phi(x + \ell - k)| dx \\
&= \int_0^1 \theta(x)^{p/q} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^p \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\phi(x + \ell - k)| dx \quad \text{Periodizität von } \theta \\
&= \int_0^1 \theta(x)^{p/q} \theta(x) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^p dx \quad \text{Periodizität von } \theta \\
&= \|c\|_p^p \int_0^1 \theta(x)^p dx \quad \text{wegen } 1 + p/q = p.
\end{aligned}$$

Die Voraussetzung an θ liefert $c \tilde{*} \phi \in L^p(\mathbb{R})$ und die Abschätzung der Norm in (a). Die Dichtheit von $S_0(\phi)$ in $S_p(\phi)$ folgt nun aus der Dichtheit der endlichen Folgen in $\ell^p(\mathbb{Z})$.

(b) ist klar. (c) folgt aus den Rechenregeln (A.7); hierbei kann man sich wegen der Dichtheit in (a) auf endliche Linearkombinationen beschränken. \square

Wir wollen nun angeben, in welchem Sinne die Funktionen $\phi(\cdot - k)$ den Raum $S_2(\phi)$ aufspannen. Zur Vereinfachung vieler elementarer Rechnungen führen wir die folgende Notation eines ‘‘Klammerprodukts’’ ein.

BEZEICHNUNG 3.6. Für $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ definieren wir das Klammerprodukt (engl. ‘‘bracket product’’)

$$(3.5) \quad [f, g](x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + k) \overline{g(x + k)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Einige Eigenschaften des Klammerprodukts fasst der folgende Hilfssatz zusammen.

HILFSSATZ 3.7. Es seien $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

a) $[f, g]$ ist eine 1-periodische Funktion in $L^1(0, 1)$ mit

$$(3.6) \quad \int_0^1 |[f, g](x)| dx \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Insbesondere ist $[f, g](x)$ fast überall als Grenzwert der Reihe definiert. Weiterhin gilt die punktweise Abschätzung

$$(3.7) \quad |[f, g](x)| \leq ([f, f](x) \cdot [g, g](x))^{\frac{1}{2}}.$$

b) Es gilt

$$(3.8) \quad \int_0^1 [f, g](x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega = \int_0^1 [\hat{f}, \hat{g}](\omega) d\omega.$$

c) Es gelten die Eigenschaften eines inneren Produkts, also

1. $[f, f] \geq 0$ und $[f, f] \equiv 0 \iff f = 0$
2. $[f, g] = \overline{[g, f]}$,
3. $[af_1 + bf_2, g] = a[f_1, g] + b[f_2, g]$, $a, b \in \mathbb{C}$.

d) Für 1-periodische Funktionen $\sigma, \tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist

$$(3.9) \quad [\sigma f, \tau g](x) = \sigma(x)\overline{\tau(x)} \cdot [f, g](x).$$

Zur Berechnung des Klammerprodukts bietet sich in manchen Fällen die Anwendung der Poissonschen-Summenformel an: das Klammerprodukt $[f, g]$ ist ja eine Periodisierung der Funktion $h = f\overline{g}$ bzgl. x . Mit der Poissonschen Summenformel wird hieraus eine Fourierreihe mit den Koeffizienten $\hat{h}(k) = \hat{f} * \overline{\hat{g}}(k)$. Falls f und g bandbeschränkt sind, ist auch h bandbeschränkt und fast alle Koeffizienten $\hat{h}(k)$ sind Null.

HILFSSATZ 3.8. *E seien $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Falls die periodische Funktion $[f, g]$ stetig in \mathbb{R} und von beschränkter Variation in $[0, 1]$ ist, so gilt die Identität*

$$[f, g](x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i k x}$$

für alle $x \in [0, 1]$, wobei

$$c_k = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega - k)} d\omega, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Insbesondere ist

$$[\hat{f}, \hat{f}](\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\omega + k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{F(k)} e^{-2\pi i k \omega}$$

mit der Autokorrelaton F von f in Lemma A.10.

Beweis: Die Poissonsche Summenformel lautet (Übung)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(x + k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{h}(k) e^{-2\pi i k x}.$$

Die Identität gilt punktweise, wenn die periodische Funktion der linken Seite stetig in \mathbb{R} und von beschränkter Variation in $[0, 1]$ ist.

Mit den Rechenregeln A.7 ist für $h = f\overline{g}$

$$\hat{h}(k) = (\hat{f} * \overline{\hat{g}})(k) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(k - \omega)} d\omega = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega - k)} d\omega.$$

Hieraus folgt die erste Identität im Lemma. Ersetzen wir f und g beide durch \hat{f} und beachten $\hat{f}(x) = f(-x)$, so erhalten wir

$$\hat{h}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(-x) \overline{f(k - x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f(k + x)} dx.$$

Dies ergibt die zweite Identität im Lemma. \square

Besonders schöne Basen von shift-invarianten Räumen $S_2(\phi)$ sind natürlich wieder die Orthonormalbasen. Allerdings kommt man für viele Zwecke auch mit allgemeineren Basen aus, die jetzt definiert werden sollen.

DEFINITION 3.9. H sei ein separabler Hilbert-Raum und I eine endliche oder abzählbare Menge mit $|I| = \dim H$. Weiter sei $X = (x_j)_{j \in I}$ eine Familie von Elementen $x_j \in H$.

Die Familie X heißt Riesz-Basis von H , wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Die Menge der endlichen Linearkombinationen von Elementen von X ist dicht in H ; d.h. für jedes $h \in H$ und $\epsilon > 0$ existiert eine endliche Menge $J \subset I$ und Koeffizienten $c_j \in \mathbb{C}$, $j \in J$, so, dass

$$\left\| h - \sum_{j \in J} c_j x_j \right\| < \epsilon.$$

- (ii) Es gibt Konstanten $A, B > 0$ so, dass für jede endliche Menge $J \subset I$ und Koeffizienten $c_j \in \mathbb{C}$, $j \in J$, gilt

$$(3.10) \quad A \sum_{j \in J} |c_j|^2 \leq \left\| \sum_{j \in J} c_j x_j \right\|^2 \leq B \sum_{j \in J} |c_j|^2.$$

Die Konstanten $A, B > 0$ heißen Riesz-Schranken der Familie X .

BEMERKUNG 3.10. Beide Bedingungen garantieren, dass jedes Element $h \in H$ als Grenzwert einer (in H) konvergenten Reihe

$$h = \sum_{i \in I} c_i x_i$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $c_i \in \mathbb{C}$ geschrieben werden kann. Weiterhin sichert (ii) die Norm-Äquivalenz

$$A \|(c_i)_{i \in I}\|_{\ell^2(I)}^2 \leq \|h\|^2 \leq B \|(c_i)_{i \in I}\|_{\ell^2(I)}^2.$$

Durch die Riesz-Basis X ist also ein Hilbertraum-Isomorphismus

$$D : \ell^2(I) \rightarrow H, \quad D((c_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} c_i x_i,$$

gegeben. An die Stelle der Parseval-Identität für Orthonormalbasen treten hier die obigen Ungleichungen.

Der Operator D wird Synthese-Operator genannt, da er die Basiselemente zu einer Funktion h zusammensetzt. Er besitzt die Operatornorm $\|D\| = \sqrt{B}$. Der adjungierte Operator ist

$$C = D^* : H \rightarrow \ell^2(I), \quad Ch = (\langle h, x_i \rangle)_{i \in I}.$$

C wird Analyse-Operator genannt. Solche Operatoren haben wir im Kapitel 1 im Umgang mit Orthonormalbasen bereits kennengelernt.

Die duale Basis zur Riesz-Basis X lässt sich auf mehrere Arten bestimmen:

1. $Y = (y_j)_{j \in I}$ mit Elementen $y_j \in H$ ist duale Basis von X genau dann, wenn

$$\langle y_j, x_k \rangle = \delta_{j,k}, \quad j, k \in I,$$

gilt. Für jedes $j \in I$ legen diese Bedingungen $y_j \in H$ eindeutig fest.

2. Das Element y_j der dualen Basis ist das eindeutige Element in H , das die Darstellung des Koeffizientenfunktional

$$\ell_j : H \rightarrow \mathbb{C}, \quad h = \sum_{j \in I} c_j x_j \mapsto c_j$$

im Rieszschen Darstellungssatz liefert: $\ell_j(h) = \langle h, y_j \rangle$.

3. Das Element y_j der dualen Basis ist gegeben als

$$y_j = (C^*C)^{-1}x_j, \quad j \in I.$$

Damit gelten die Darstellungen

$$h = \sum_{j \in I} \langle h, y_j \rangle x_j = \sum_{j \in I} \langle h, x_j \rangle y_j,$$

und Y ist eine Riesz-Basis von H mit den Schranken $1/B, 1/A$.

Das Klammerprodukt erweist sich als besonders hilfreich zur Formulierung von Aussagen über die shift-invarianten Räume $S_2(\phi)$. Hierbei kommt die Darstellung der Funktionen in $S_2(\phi)$ mit Hilfe der Fourier-Transformation aus Lemma 3.5(c) zum Einsatz.

SATZ 3.11. Gegeben sei eine Funktion $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. Wir betrachten die Familie $\Phi = \{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\}$ als Teilmenge des Raums $S_2(\phi)$.

- a) Die Familie Φ ist genau dann eine Riesz-Basis von $S_2(\phi)$, wenn

$$0 < A = \operatorname{ess\,inf}_{\omega \in (0,1)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) \leq \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in (0,1)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) =: B < \infty$$

gilt. In diesem Fall gilt weiter:

- $S_2(\phi)$ ist abgeschlossener Teilraum von $L^2(\mathbb{R})$.
- A, B sind die optimalen Riesz-Schranken von Φ .

- b) Die Familie Φ ist genau dann eine Orthonormalbasis von $S_2(\phi)$, wenn

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) = 1 \quad f.ü.$$

Beweis: a) Wir betrachten zuerst endliche Linearkombinationen

$$f_c = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(\cdot - k), \quad c_k = 0 \text{ für } k \notin J \subset \mathbb{Z} \text{ endlich.}$$

Mit Lemma 3.5(c) ist

$$\hat{f}_c(\omega) = \hat{c}(\omega) \hat{\phi}(\omega), \quad \hat{c}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i k \omega}.$$

Die Rechenregeln in Lemma 3.7 ergeben

$$\|f_c\|^2 = \int_0^1 [\hat{f}_c, \hat{f}_c](\omega) d\omega = \int_0^1 |\hat{c}(\omega)|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) d\omega.$$

Damit erhalten wir sofort

$$\operatorname{ess\,inf}_{\omega \in (0,1)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) \int_0^1 |\hat{c}(\omega)|^2 d\omega \leq \|f_c\|^2 \leq \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in (0,1)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) \int_0^1 |\hat{c}(\omega)|^2 d\omega.$$

Die Parseval-Identität für periodische Funktionen besagt

$$\int_0^1 |\hat{c}(\omega)|^2 d\omega = \sum_{j \in J} |c_j|^2 = \|c\|_2^2.$$

Im Fall $A := \operatorname{ess\,inf}_{\omega \in (0,1)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) > 0$ und $B := \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in (0,1)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) < \infty$ sind also die Ungleichungen (3.10) mit diesen Konstanten A, B für alle endlichen Linearkombinationen erfüllt.

Hieraus folgt dann sowohl die L^2 -Konvergenz der Reihen

$$f_c = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(\cdot - k) \quad \text{mit} \quad c = (c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

als auch die Dichtheit von $S_0(\phi)$ in $S_2(\phi)$ und die Abgeschlossenheit von $S_2(\phi)$. Also ist die Familie Φ eine Riesz-Basis von $S_2(\phi)$.

Gilt andernfalls $\operatorname{ess\,inf}_{\omega \in (0,1)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) = 0$, so kann zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Folge c konstruiert werden mit

$$\|f_c\|_2^2 = \int_0^1 |\hat{c}(\omega)|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) d\omega < \epsilon \|c\|_2^2.$$

Damit ist die erste Ungleichung in (3.10) für keine Konstante $A > 0$ erfüllt, also ist Φ keine Riesz-Basis von $S_2(\phi)$. Ebenso argumentiert man, falls $\operatorname{ess\,sup}_{\omega \in (0,1)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) = \infty$ gilt. Weiterhin wird mit gleichen Mitteln die Optimalität der Konstanten A, B im Satz gezeigt.

b) Ist Φ sogar eine Orthonormalbasis, so erfordert die Parseval-Identität

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(\cdot - k) \right\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$$

für alle ℓ^2 -Folgen $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Also gilt (3.10) mit Konstanten $A = B = 1$. Wegen Teil a) stimmen damit wesentliches Infimum und wesentliches Supremum von $[\hat{\phi}, \hat{\phi}]$ überein, diese Funktion ist also (f.ü.) konstant 1.

Andererseits liefert $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] = 1$ mit den Rechenregeln 3.7(b) und (d) die Beziehung

$$\langle \phi, \phi(\cdot - k) \rangle = \int_0^1 [\hat{\phi}, e^{-2\pi i k \cdot} \hat{\phi}](\omega) d\omega = \int_0^1 e^{2\pi i k \omega} d\omega = \delta_{0,k}.$$

Also ist Φ ein Orthonormalsystem und damit auch eine Orthonormalbasis von $S_2(\phi)$. \square

Die Berechnung von $[\hat{\phi}, \hat{\phi}]$ wird für ϕ mit kompaktem Träger besonders leicht: Die Autokorrelationsfunktion

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x)} \phi(x+k) dx$$

hat dann kompakten Träger und die Fourierreihe in Hilfssatz 3.8

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{F(k)} e^{-2\pi i k \omega}$$

ist ein trigonometrisches Polynom. Mit Mitteln der Kurvendiskussion lässt sich dann das Minimum und Maximum von $[\hat{\phi}, \hat{\phi}]$ bestimmen.

Drei wichtige Beispiele shift-invarianter Räume $S_2(\phi)$ sollen nun erläutert werden.

BEISPIEL 3.12. (*Shannon-Whittaker*)

Der Vektorraum $PW_{1/2}$ der bandbeschränkten Funktionen wurde in Beispiel 3.2(ii) beschrieben. Er besitzt die Orthonormalbasis $\Phi = (\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z})$ zur Sinus-cardinalis Funktion

$$(3.11) \quad \phi(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

d.h. es gilt $PW_{1/2} = S_2(\phi)$. Um dies einzusehen, beachtet man zunächst $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ und beweist mit der Formel zur inversen Fourier-Transformation

$$\hat{\phi}(\omega) = \chi_{(-1/2, 1/2)}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Hieraus ergibt sich sofort $[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) = 1$ (f.ü.), also ist Φ eine Orthonormalbasis von $S_2(\phi)$. Alle Funktionen $f \in S_2(\phi)$ besitzen die eindeutige Darstellung

$$(3.12) \quad f = c \tilde{*} \phi \quad \text{mit} \quad c \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

also lautet ihre Fouriertransformierte

$$\hat{f}(\omega) = \hat{c}(\omega) \hat{\phi}(\omega) = \hat{c}(\omega) \chi_{(-1/2, 1/2)}(\omega) \quad \text{mit} \quad \hat{c} \in L^2(-1/2, 1/2).$$

Dies ist genau die Eigenschaft der Funktionen in $PW_{1/2}$. Damit ist die Gleichheit $PW_{1/2} = S_2(\phi)$ gezeigt.

Sehr interessant ist noch die folgende Feststellung: die Sinus-cardinalis Funktion hat die Funktionswerte $\phi(k) = \delta_{k,0}$ für $k \in \mathbb{Z}$. Deshalb ist die Darstellung von f in (3.12) ganz konkret gegeben durch die Reihe

$$(3.13) \quad f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \phi(\cdot - k).$$

Diese Identität ist das Fundament der digitalen Signalverarbeitung, das Shannon-Whittaker Abtasttheorem: Eine bandbeschränkte Funktion $f \in PW_B$ ist bereits durch ihre Funktionswerte $f(k/(2B))$, $k \in \mathbb{Z}$, eindeutig bestimmt! (Dass diese Folge auch tatsächlich quadrat-summierbar ist, ergibt sich durch Betrachtung von \hat{f} als Funktion in $L^2(-B, B)$ und ihrer Fourier-Koeffizienten.)

BEISPIEL 3.13. (*Meyer*)

Y. Meyer¹ konstruierte die folgende Familie von Orthonormalbasen. Die Funktion $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ wird definiert durch Angabe der Fouriertransformierten

$$(3.14) \quad \hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq |\omega| \leq 1/3, \\ \sigma(|\omega|) & \text{für } 1/3 < |\omega| \leq 2/3, \\ 0 & \text{für } 2/3 < |\omega|, \end{cases}$$

¹Yves Meyer, geb. 1939, ist emeritierter Professor der École Normale Supérieure de Cachan und Mitglied der Académie des Sciences. Er wird als Mitbegründer der Wavelet-Theorie (franz. "Ondelettes") betrachtet.

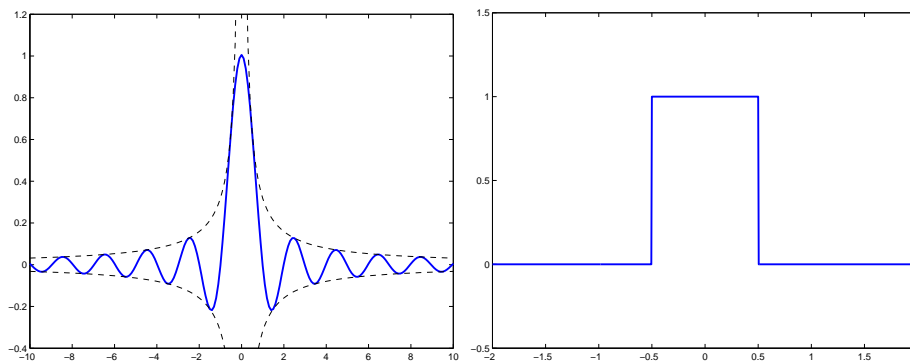


BILD 3.1. Die Sinus-cardinalis Funktion (links) und ihre Fourier-Transformierte (rechts)

wobei $0 \leq \sigma(\omega) \leq 1$ so gewählt wird, dass

- (i) $\hat{\phi} \in C^r(\mathbb{R})$ für ein $r \in \mathbb{N}_0$ und
- (ii) $\sigma^2(\omega) + \sigma^2(1 - \omega) \equiv 1$ für $1/3 \leq \omega \leq 2/3$ gilt.

Für $r = 0$ kann beispielsweise

$$\sigma(\omega) = \sin \pi \left(1 - \frac{3\omega}{2} \right) \geq 0, \quad 1/3 \leq \omega \leq 2/3,$$

gewählt werden. Wegen

$$\sigma(1/3) = 1, \quad \sigma(2/3) = 0$$

ist $\hat{\phi} \in C(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\sigma^2(\omega) + \sigma^2(1 - \omega) = \sin^2 \pi \left(1 - \frac{3\omega}{2} \right) + \cos^2 \pi \left(1 - \frac{3\omega}{2} \right) = 1.$$

Mit dieser Eigenschaft von σ folgt nun für ein volles Periodenintervall $\omega \in [-1/3, 2/3]$ der Länge 1, dass

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + k)|^2 = \begin{cases} 1 & \text{für } -1/3 \leq \omega \leq 1/3, \\ \sigma^2(\omega) + \sigma^2(1 - \omega) = 1 & \text{für } 1/3 < |\omega| \leq 2/3, \end{cases}$$

wobei im ersten Fall nur der Summand mit $k = 0$ und im zweiten Fall die Summanden mit $k = 0, -1$ von Null verschieden sind. Damit ist gezeigt, dass $\Phi = (\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z})$ eine Orthonormalbasis von $S_2(\phi)$ ist.

Weil ϕ bandbeschränkt ist mit $B = 2/3$, ist $S_2(\phi)$ ein abgeschlossener Teilraum von $PW_{2/3}$. Es kann nicht der ganze Raum sein, weil die Fouriertransformierten $\hat{f} = \hat{c}\hat{\phi}$ mit 1-periodischen Funktionen \hat{c} gebildet werden, ihr Träger aber die Länge $4/3$ hat; also besteht die Beziehung

$$\hat{f}(\omega + 1) = \frac{\hat{\phi}(\omega + 1)}{\hat{\phi}(\omega)} \hat{f}(\omega) = \frac{\sigma(1 - |\omega|)}{\sigma(|\omega|)} \hat{f}(\omega) \quad \text{für } -\frac{2}{3} < \omega < -\frac{1}{3}.$$

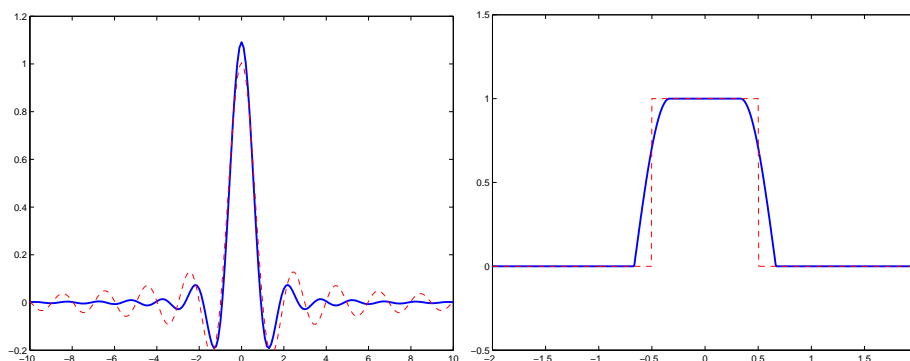


BILD 3.2. Meyer Funktion mit $r = 0$ (links) und ihre stetige Fourier-Transformierte (rechts); die Funktionen sind hinterlegt mit den Graphen zur Shannon-Funktion aus dem vorherigen Beispiel

BEISPIEL 3.14. Die kardinalen B-Splines sind definiert durch

$$N_1(x) = \chi_{[0,1)}(x), \quad N_{m+1}(x) = N_m * N_1(x) = \int_0^1 N_m(x-t) dt, \quad m \in \mathbb{N}.$$

(Beachte: Manchmal fängt die Nummerierung auch bei $m = 0$ an.) Es gilt $\text{supp } N_m = [0, m]$ sowie die Symmetrie $N_m(m-x) = N_m(x)$. Die Autokorrelationsfunktion F_m von N_m ist selbst wieder ein (zentrierter) B-spline, denn

$$\begin{aligned} F_m(y) &= \int_{\mathbb{R}} N_m(x)N_m(x+y) dx = \int_{\mathbb{R}} N_m(-x)N_m(y-x) dx \\ &= (N_m(-\cdot)) * N_m(y) = (N_m(\cdot + m)) * N_m(y) = N_m * N_m(y+m) = N_{2m}(y+m). \end{aligned}$$

Also hat F_m den Träger $[-m, m]$, ist stetig und erfüllt $F_m \geq 0$. Es gilt

$$[\hat{N}_m, \hat{N}_m](\omega) = \sum_{k=-m+1}^{m-1} F_m(k)e^{-2\pi i k \omega} = \sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(k+m)e^{-2\pi i k \omega}.$$

Eine Rekursion für $F_m(k)$ wird in den Übungen behandelt; es besteht ein Zusammenhang zu den sog. Euler-Zahlen. Bild 3.14 zeigt die periodische Funktion

$$[\hat{N}_2, \hat{N}_2](\omega) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}(e^{2\pi i \omega} + e^{-2\pi i \omega}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos(2\pi \omega).$$

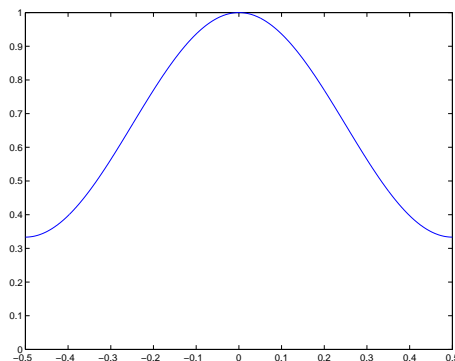
Die obere Riesz-Schranke für beliebiges m ist 1, denn

$$B = \text{esssup}_{\omega \in [0,1]} [\hat{N}_m, \hat{N}_m](\omega) = \text{esssup}_{\omega \in [0,1]} \sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(k+m)e^{-2\pi i k \omega} = \sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(k+m) = 1,$$

wegen der Positivität der Werte $N_{2m}(k)$ und der "Teilung-der-Eins" Eigenschaft der B-Splines.

Um die untere Riesz-Schranke zu berechnen, verwenden wir die Fouriertransformierte (berechnet mit dem Faltungssatz)

$$\hat{N}_m(\omega) = \left(\frac{1 - e^{-2\pi i \omega}}{2\pi i \omega} \right)^m, \quad \omega \neq 0.$$

BILD 3.3. Die Funktion $[\hat{N}_2, \hat{N}_2]$

Für $|\omega| \leq 1/2$ ist dann

$$[\hat{N}_m, \hat{N}_m](\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1 - e^{-2\pi i(\omega+k)}}{2\pi i(\omega+k)} \right|^{2m} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\sin \pi\omega}{\pi(\omega+k)} \right|^{2m} > 0.$$

Das Minimum tritt bei $\omega = 1/2$ auf (ohne Beweis). Die untere Riesz-Schranke ist also

$$A_m = [\hat{N}_m, \hat{N}_m] \left(\frac{1}{2} \right) = \sum_{k=-m+1}^{m-1} (-1)^m N_{2m}(k+m) = 2^{2m} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\pi(2k+1))^{2m}}.$$

Für kleine m wählen wir die erste Darstellung und erhalten mit Hilfe der Funktionswerte von N_{2m}

$$A_1 = N_2(1) = 1, \quad A_2 = -N_4(1) + N_4(2) - N_4(3) = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Für größere m erhalten wir den Reihenwert in der zweiten Darstellung als ein Vielfaches der Bernoulli-Zahl B_{2m} , genau

$$A_m = (-1)^{m+1} \frac{2^{2m}(2^{2m}-1)}{(2m)!} B_{2m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

(Vgl. hierzu A_1 und A_2 mit Hilfe der Bernoulli-Zahlen $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = -\frac{1}{30}$). Beachte: Mit Riesz-Schranken $A = B = 1$ für $m = 1$ ist die Familie $\Phi = (N_1(\cdot - k); k \in \mathbb{Z})$ tatsächlich eine Orthonormalbasis von $S_2(N_1)$. Für $m \geq 2$ ist dies nicht mehr der Fall.

Falls Φ eine Orthonormalbasis von $S_2(\phi)$ ist, haben alle Funktionen in $S_2(\phi)$ die Reihendarstellung

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi(\cdot - k) \rangle \phi(\cdot - k).$$

Zu einer Riesz-Basis existiert eine ähnliche Darstellung, allerdings benötigen wir dazu eine *duale Basis* zur Riesz-Basis Φ . Wir suchen hier speziell nach einer Funktion $\gamma \in S_2(\phi)$, für die die Beziehungen

$$\langle \phi(\cdot - k), \gamma(\cdot - \ell) \rangle = \delta_{k,\ell}, \quad k, \ell \in \mathbb{Z},$$

erfüllt sind. Dann haben wir für jede Funktion $f \in S_2(\phi)$ die Darstellungen

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \gamma(\cdot - k) \rangle \phi(\cdot - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi(\cdot - k) \rangle \gamma(\cdot - k).$$

Alternativ könnte man auch die gegebene Riesz-Basis Φ orthonormieren. All dies wird mit dem Klammerprodukt einfach möglich.

SATZ 3.15. *Es sei $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ sowie $\Phi = (\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z})$ eine Riesz-Basis von $S_2(\phi)$ mit Schranken $A, B > 0$.*

a) *Die duale Basis $\Gamma = (\gamma(\cdot - k); k \in \mathbb{Z})$ ist gegeben durch die Funktion $\gamma \in S_2(\phi)$ mit*

$$\hat{\gamma}(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega)}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Γ ist ebenfalls eine Riesz-Basis von $S_2(\phi)$ mit den Riesz-Schranken B^{-1} und A^{-1} .

b) *Durch*

$$\widehat{\phi^\perp}(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\sqrt{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega)}}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

ist eine Funktion $\phi^\perp \in S_2(\phi)$ definiert, für die die Familie $\Phi^\perp = (\phi^\perp(\cdot - k); k \in \mathbb{Z})$ eine Orthonormalbasis von $S_2(\phi)$ ist.

Weiterhin gilt

$$S_2(\phi) = S_2(\gamma) = S_2(\phi^\perp).$$

Beweis: Aufgrund der Voraussetzung an ϕ ist der Kehrwert

$$\frac{1}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-2\pi i k \omega} \in L^1(0, 1) \cap L^\infty(0, 1),$$

also auch quadrat-integrierbar auf $[0, 1]$. Die Koeffizientenfolge $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ist also quadrat-summierbar. Daher ist

$$\gamma := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi(\cdot - k) \in S_2(\phi),$$

und die Rechenregeln ergeben

$$\hat{\gamma}(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega)}.$$

Die Biorthogonalität der Familien Φ und Γ folgt mit den Rechenregeln 3.7:

$$\langle \phi(\cdot - k), \gamma \rangle = \int_0^1 \frac{e^{-2\pi i k \omega}}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) d\omega = \int_0^1 e^{-2\pi i k \omega} d\omega = \delta_{0, k}.$$

Die Riesz-Schranken von Γ ergeben sich mit

$$[\hat{\gamma}, \hat{\gamma}] = \frac{[\hat{\phi}, \hat{\phi}]}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}]^2} = \frac{1}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}]}.$$

Analog erhält man auch $\phi^\perp \in S_2(\phi)$ und die Orthonormiertheit der Familie Φ^\perp . Außerdem lassen sich die Beziehungen

$$S_2(\phi) = S_2(\gamma) = S_2(\phi^\perp)$$

durch das Umrechnen der entsprechenden Koeffizientenvektoren (besser: ihrer Fourierreihen) bestimmen:

$$f = c\tilde{*}\phi = d\tilde{*}\gamma = e\tilde{*}\phi^\perp$$

gilt mit

$$\hat{d} = \hat{c}[\hat{\phi}, \hat{\phi}], \quad \hat{e} = \hat{c}\sqrt{[\hat{\phi}, \hat{\phi}]},$$

wobei alle Folgen quadrat-summierbar sind. \square

BEISPIEL 3.16. Wir wollen den Satz auf die Riesz-Basis der B-Splines der Ordnung 2 anwenden. Zu bestimmen sind dabei die Koeffizienten α_k in der Darstellung der dualen Basisfunktion

$$\gamma = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k N_2(\cdot - k).$$

Die Überlegungen in Beispiel 3.14 liefern

$$[\hat{N}_2, \hat{N}_2](\omega) = \frac{1}{3}(2 + \cos 2\pi\omega), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

also ist die Fouriertransformierte von γ gegeben durch

$$\hat{\gamma}(\omega) = \frac{3\hat{N}_2(\omega)}{2 + \cos 2\pi\omega}.$$

Wir benötigen deshalb die Koeffizienten der Fourierreihe

$$\frac{3}{2 + \cos 2\pi\omega} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-2\pi i k \omega},$$

die wir mit einem Trick aus der Funktionentheorie (Stichwort Laurent-Reihen) explizit bestimmen können.

Wir verwenden hierzu die komplexe Variable $z = e^{2\pi i \omega}$ und schreiben $2 \cos 2\pi\omega = z + z^{-1}$, also

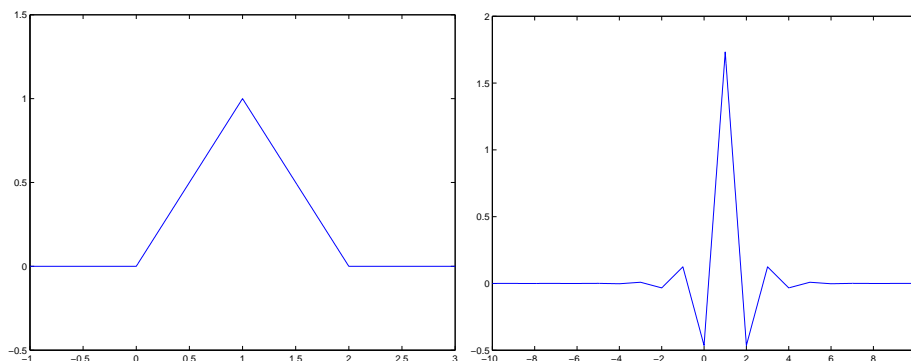
$$\frac{3}{2 + \cos 2\pi\omega} = \frac{6}{4 + z + z^{-1}} = \frac{6z}{z^2 + 4z + 1}.$$

Dann bilden wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{z^2 + 4z + 1} = \frac{A}{z - \beta_1} - \frac{A}{z - \frac{1}{\beta_1}}, \quad \beta_1 = -2 - \sqrt{3}, \quad A = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Für $|z| = 1$ konvergieren die folgenden geometrischen Reihen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - \beta_1} &= -\frac{1}{\beta_1} \frac{1}{1 - \frac{z}{\beta_1}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \beta_1^{-k-1} z^k, \\ \frac{1}{z - \frac{1}{\beta_1}} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{\beta_1 z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_1^{-k} z^{-k-1}. \end{aligned}$$

BILD 3.4. B-Spline N_2 (links) und dualer Spline γ (rechts)

Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} \frac{3}{2 + \cos 2\pi\omega} &= \frac{6z}{z^2 + 4z + 1} = -\frac{\sqrt{3}z}{z - \beta_1} + \frac{\sqrt{3}z}{z - \frac{1}{\beta_1}} \\ &= \sqrt{3} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_1^{-k-1} z^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_1^{-k} z^{-k} \right) \\ &= \sqrt{3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_1^{-|k|} z^k. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\gamma = \sqrt{3} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k (2 + \sqrt{3})^{-|k|} N_2(\cdot - k).$$

Die Funktion γ klingt exponentiell ab mit der Rate $\gamma(x) = \mathcal{O}(e^{-c|x|})$ und $c = \ln(2 + \sqrt{3})$.

BEMERKUNG 3.17. Eine nähere Analyse liefert auch für die B-Splines höherer Ordnung ein entsprechendes Resultat. Die Funktion $[\hat{N}_m, \hat{N}_m]$ ist ein trigonometrisches Polynom. Durch Übergang zur Variablen $z = e^{2\pi i\omega}$ entsteht ein Laurent-Polynom mit negativen reellen Nullstellen der Form

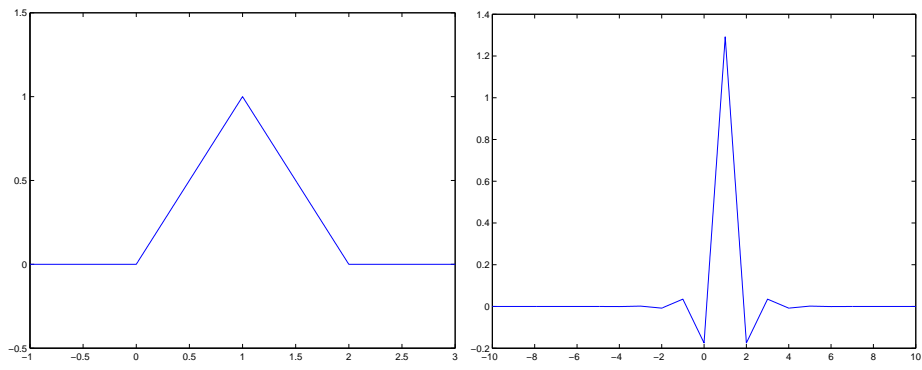
$$\beta_m < \dots < \beta_1 < -1 < \frac{1}{\beta_1} < \dots < \frac{1}{\beta_m} < 0.$$

Durch Partialbruchzerlegung des Kehrwerts und Umschreiben in geometrische Reihen ergibt sich die explizite Darstellung

$$\gamma = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k N_m(\cdot - k)$$

sowie das Abklingverhalten $\gamma(x) = \mathcal{O}(e^{-c|x|})$ mit $c = \ln(|\beta_1|)$.

Weitere Überlegungen liefern das gleiche Abklingverhalten für die orthonormierte Basisfunktion N_m^\perp . Hierbei wird zusätzlich ein Satz der Funktionentheorie verwendet, der den Konvergenzbereich von Laurent-Reihen beinhaltet.

BILD 3.5. B-Spline N_2 (links) und orthogonaler Spline N_2^\perp (rechts)

Multiskalen-Analyse und diskrete Wavelet-Transformation

Die Betrachtungen im vorherigen Kapitel haben bereits ein Merkmal beim Übergang von der kontinuierlichen zur diskreten Wavelet-Transformation dargelegt: die Diskretisierung des Verschiebungsparameters b in der CWT $W\psi f(a, b)$ führt auf shift-invariante Teilräume von $L^2(\mathbb{R})$. Nun tritt als zweites Merkmal die Diskretisierung des Skalierungsparameters a hinzu.

Als Grundlage für die diskrete Wavelet-Transformation dient die Multiskalen-Analyse, die vorwiegend aus der Bildverarbeitung stammt. In der Bildanalyse ist es üblich, dasselbe Bild in verschiedenen “Auflösungen” (engl. resolution) zu betrachten, um die Geometrie, ein Muster oder Kanten zu erkennen. Diese Methode wird mathematisch als Multiskalen-Analyse formuliert. Dabei werden Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ durch eine Folge ineinander geschachtelter Teilräume $V_j \subset V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, approximiert; bei Bildern wird z.B. die Auflösung in x - und y -Richtung verdoppelt. Die Orthogonalprojektionen $\mathcal{P}_j f \in V_j$ sollen dabei

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{P}_j f = f \quad \text{in } L^2(\mathbb{R})$$

erfüllen. Mit dieser Folge von Approximationen lässt sich sofort die orthogonale Zerlegung von f konstruieren: die Verschachtelungs-Eigenschaft $V_j \subset V_{j+1}$ ergibt (mit wenigen zusätzlichen Bedingungen) die Zerlegung von f in eine Teleskopsumme

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\mathcal{P}_{j+1} - \mathcal{P}_j) f.$$

Hierbei gilt die *paarweise Orthogonalität*

$$\langle (\mathcal{P}_{j+1} - \mathcal{P}_j) f, (\mathcal{P}_{k+1} - \mathcal{P}_k) f \rangle = 0 \quad \text{für } j \neq k;$$

denn wegen der Verschachtelung gilt für $j > k$

$$(\mathcal{P}_{j+1} - \mathcal{P}_j) f = (I - \mathcal{P}_j) \mathcal{P}_{j+1} f \in V_j^\perp, \quad (\mathcal{P}_{k+1} - \mathcal{P}_k) f \in V_{k+1} \subset V_j.$$

Zwei weitere wichtige Eigenschaften der Multiskalen-Analyse sind die Shift-Invarianz der Räume V_j sowie die “Verfeinerbarkeit” der Basisfunktionen von V_j . Sie bewirken, dass die Berechnungen der paarweise orthogonalen Komponenten $(\mathcal{P}_{j+1} - \mathcal{P}_j) f$ besonders effizient durchgeführt werden können.

Nach dieser kurzen Motivation wird in Abschnitt 4.1 die Multiskalen-Analyse erläutert. In Abschnitt 4.2 wird dann die diskrete Wavelet-Transformation behandelt.

1. Definition und Eigenschaften der Multiskalen-Analyse

Die Multiskalen-Analyse (MSA) (engl. multiresolution analysis (MRA), multiscale analysis or multiscale approximation (MSA)) wurde in ihrer heutigen Form von Y. Meyer und S. Mallat¹ in den Jahren 1988/89 formuliert. Sie dient als wichtigste Grundlage der Wavelet-Theorie.

DEFINITION 4.1. (*Multiskalen-Analyse (MRA)*)

Eine Multiskalen-Analyse von $L^2(\mathbb{R})$ ist definiert durch eine Folge abgeschlossener Teilräume $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$, mit folgenden Eigenschaften.

(i) *Verschachtelung:*

$$(4.1) \quad V_j \subset V_{j+1} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{Z}.$$

(ii) *Dichtheit und Trennungseigenschaft:*

$$(4.2) \quad \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \left(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j \right) = L^2(\mathbb{R}), \quad \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}.$$

(iii) *Skalierungsinvarianz:*

$$(4.3) \quad f \in V_j \iff f(2^{-j}\cdot) \in V_0.$$

(iv) *Shiftinvarianz von V_0 und Basisbedingung:* Es existiert $\phi \in V_0$ so, dass $\Phi = (\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z})$ eine Riesz-Basis von V_0 ist.

ϕ heißt Skalierungsfunktion der Multiskalen-Analyse.

BEMERKUNG 4.2. Mit dem Skalierungsparameter $j \in \mathbb{Z}$ und dem Verschiebungsparameter $k \in \mathbb{Z}$ bilden wir die Funktionen

$$\phi_{j,k} := 2^{j/2} \phi(2^j \cdot - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

sowie die Familien

$$\Phi_j := (\phi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Dann folgt aus der Skalierungsinvarianz (iii) und der Basiseigenschaft (iv), dass Φ_j eine Riesz-Basis von V_j ist, also auch

$$(4.4) \quad V_j = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \text{span}(\phi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}).$$

Denn für $f \in V_j$ gilt $2^{-j/2} f(2^{-j}\cdot) \in V_0$, also existiert wegen Eigenschaft (iv) eine eindeutige Folge $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$ mit

$$2^{-j/2} f(2^{-j}\cdot) = c \star \phi, \quad A\|c\|^2 \leq \|2^{-j/2} f(2^{-j}\cdot)\|^2 \leq B\|c\|^2,$$

wobei $A, B > 0$ Riesz-Schranken von $\Phi_0 = \Phi$ sind. Direkte Umrechnung des Arguments ergibt

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_{j,k}, \quad A\|c\|^2 \leq \|f\|^2 \leq B\|c\|^2,$$

¹Stephane Mallat, geb. 1963, ist Professor für Informatik an der École Normale Supérieure in Paris.

mit denselben Schranken A, B . Also ist die Familie Φ_j eine Riesz-Basis von V_j ; der Raum V_j ist G_j -shift-invariant mit der diskreten Untergruppe $G_j = 2^{-j}\mathbb{Z}$ von \mathbb{R} .

Eine Formulierung mit Hilfe der Fourier-Transformation lautet

$$(4.5) \quad V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} \hat{f}(\omega) = 2^{-j/2} \tau(2^{-j}\omega) \hat{\phi}(2^{-j}\omega) \text{ mit 1-periodischer} \\ \text{Funktion } \tau \in L^2(0, 1) \end{array} \right\}.$$

Einige Aussagen zur Redundanz der geforderten Eigenschaften (i)–(iv) wurden erst Jahre nach der ersten Definition einer MRA bewiesen. So folgt die Trennungseigenschaft in (ii) aus den Eigenschaften (i), (iii) und (iv).

SATZ 4.3. Gegeben sei $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ so, dass $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\}$ eine Riesz-Basis von $S_2(\phi)$ ist und die Räume

$$V_j = \text{clos}_{L_2(\mathbb{R})} \text{span} \{ \phi_{j,k}; k \in \mathbb{Z} \}$$

die Verschachtelung $V_j \subset V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, erfüllen. Dann gilt die Trennungseigenschaft

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}.$$

Beweis: (siehe Jia, Shen: “Multiresolution and Wavelets”, Proc. Edinburgh Math. Soc. **37** (1994), 271–309, Satz 2.2)

Sei $\mathcal{P}_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j$ die orthogonale Projektion auf V_j . Es genügt zu zeigen, dass $\lim_{j \rightarrow -\infty} \|\mathcal{P}_j f\|_2 = 0$ gilt, denn für $f \in \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ ist ja $f = \mathcal{P}_j f$ für beliebiges $j \in \mathbb{Z}$.

1. Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\mathcal{P}_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \gamma_{j,k} \rangle \phi_{j,k}$$

mit der dualen Basisfunktion γ in Satz 3.15. Mit den gemeinsamen Riesz-Schranken A, B aller Familien Φ_j gilt dann

$$\|\mathcal{P}_j f\|_2^2 \leq B \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \gamma_{j,k} \rangle|^2 = B \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^j \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\gamma(2^j x - k)} dx \right|^2.$$

2. Falls f kompakten Träger $\text{supp } f \subset [-R, R]$ hat, folgt

$$\begin{aligned} B^{-1} \|\mathcal{P}_j f\|_2^2 &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^j \left(\int_{-R}^R |f(x) \gamma(2^j x - k)| dx \right)^2 \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^j \|f\|_2^2 \int_{-R}^R |\gamma(2^j x - k)|^2 dx \\ &= \|f\|_2^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{I_{j,-k}} |\gamma(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 \int_{E_j} |\gamma(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

wobei wir die Mengen

$$I_{j,k} := [k - 2^j R, k + 2^j R], \quad E_j := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_{j,k}$$

verwenden. Wegen $E_j \subset E_{j+1}$ und

$$\bigcap_{j=-\infty}^0 E_j = \mathbb{Z}$$

konvergiert die Folge der Funktionen $h_j := |\gamma|^2 \chi_{E_j}$ für j gegen $-\infty$ punktweise fast überall gegen 0. Die Funktion $h := |\gamma|^2$ ist integrierbare Majorante. Also folgt nach dem Satz von Lebesgue

$$(4.6) \quad \lim_{j \rightarrow -\infty} \|\mathcal{P}_j f\|_2^2 = 0.$$

3. Die Folge der Orthogonalprojektionen \mathcal{P}_j , $j = 0, -1, \dots$, ist gleichmäßig beschränkt, denn die Operatornorm ist $\|\mathcal{P}_j\| = 1$. Da die Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegen, folgt aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, dass (4.6) für jedes $f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt. \square

Für die Dichtheitseigenschaft in (ii) geben Jia und Shen in der angegebenen Arbeit ebenfalls ein einfaches Kriterium an.

SATZ 4.4. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.3 gilt die Äquivalenz*

$$(4.7) \quad \text{clos}_{L_2(\mathbb{R})} \left(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j \right) = L_2(\mathbb{R}) \iff \lambda \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} (2^j \text{supp } \hat{\phi}) \right) = 0,$$

wobei λ das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R} bezeichnet.

Beweis: Wir skizzieren den Beweis, der im Wesentlichen auf der von Helson angegebenen Charakterisierung der \mathbb{R} -shift-invarianten abgeschlossenen Teilräume von $L_2(\mathbb{R})$ beruht, die in Beispiel 3.2 kurz erwähnt wurde.

Sei also

$$X := \text{clos}_{L_2(\mathbb{R})} \left(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j \right).$$

Laut Definition ist X ein abgeschlossener Teilraum von $L_2(\mathbb{R})$.

1. Wir zeigen, dass X sogar \mathbb{R} -shift-invariant ist.

Seien dazu $f \in X$ und $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir zeigen $f(\cdot - y) \in X$. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existieren $j_0 \in \mathbb{Z}$ und $g \in V_{j_0}$ mit $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$. Weiter folgt

- aufgrund der Verschachtelung der Räume V_j , dass $g \in V_j$ für alle $j \geq j_0$ gilt;
- aufgrund der Shiftinvarianz der Räume V_j , dass $g(\cdot - 2^{-j}k) \in X$ für alle $j \geq j_0$ und $k \in \mathbb{Z}$ (und damit für alle $j, k \in \mathbb{Z}$) gilt.

Die Menge der rationalen Zahlen der Form $\{2^j k; j, k \in \mathbb{Z}\}$ ist dicht in \mathbb{R} . Weiterhin gilt für jedes $f \in L_2(\mathbb{R})$ und jede konvergente Folge $t_n \rightarrow y$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(\cdot - t_n) - f(\cdot - y)\|_2 = 0.$$

(Der Beweis wird zuerst für stetige Funktionen mit kompaktem Träger gegeben, dann folgt die Aussage aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Operatorfolge $h \mapsto h(\cdot - t_n)$ auf $L^2(\mathbb{R})$.) Also existiert ein rationaler Punkt $t = 2^j k$ mit

$$\|f(\cdot - y) - f(\cdot - t)\|_2 \leq \varepsilon.$$

Insgesamt erhalten wir für die Funktion $g(\cdot - t) \in X$ die Abschätzung

$$\|f(\cdot - y) - g(\cdot - t)\| \leq \|f(\cdot - y) - f(\cdot - t)\| + \|f(\cdot - t) - g(\cdot - t)\| = \|f(\cdot - y) - f(\cdot - t)\| + \|f - g\| \leq 2\varepsilon.$$

Also existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g \in X$ mit $\|f(\cdot) - g\| \leq 2\varepsilon$. Weil X abgeschlossen ist, folgt $f(\cdot - y) \in X$.

2. Helson's Charakterisierung besagt, dass eine messbare Menge $B = B(X) \subset \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$X = \{f \in L_2(\mathbb{R}); \hat{f}(\omega) = 0 \text{ für alle } \omega \notin B\}.$$

Um die Äquivalenz in (4.7) zu beweisen, müssen wir nun die Äquivalenz

$$B(X) = \mathbb{R} \iff \lambda \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} (2^j \text{supp } \hat{\phi}) \right) = 0$$

zeigen. Dies folgt aus der expliziten Angabe von V_j in (4.5) und wegen

$$\text{supp } (\hat{\phi}(2^j \cdot)) = 2^{-j} \text{supp } \hat{\phi}.$$

□

- BEMERKUNG 4.5. a) Die Dichtheitsbedingung in Definition 4.1 ist automatisch erfüllt, wenn die Skalierungsfunktion ϕ kompakten Träger hat: Dann ist $\hat{\phi}$ eine ganze Funktion (Satz von Paley-Wiener), also $\hat{\phi}(\omega) \neq 0$ für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$ (sogar \mathbb{C}).
- b) Die Dichtheitsbedingung ist ebenfalls erfüllt, wenn $\text{supp } \hat{\phi}$ ein Intervall $[-\delta, \delta]$ mit $\delta > 0$ enthält. Denn dann gilt die Bedingung auf der rechten Seite in (4.7). Dies ist insbesondere der Fall, wenn $\hat{\phi}(0) \neq 0$ und $\hat{\phi}$ stetig bei $\omega = 0$ ist.

Eine wichtige Folgerung aus den Eigenschaften einer MRA ist die Tatsache, dass die Skalierungsfunktion ϕ sowohl zu V_0 als auch zu V_1 gehört. Wir können ϕ also durch die Basis Φ_1 von V_1 ausdrücken.

SATZ 4.6. Sei ϕ die Skalierungsfunktion einer MRA $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Dann gilt

$$(4.8) \quad \phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k)$$

mit einer Folge $p = (p_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ sowie

$$(4.9) \quad \hat{\phi}(\omega) = P_\phi \left(\frac{\omega}{2} \right) \hat{\phi} \left(\frac{\omega}{2} \right) \quad \text{mit} \quad P_\phi(\omega) = \frac{1}{2} \hat{p}(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k e^{-2\pi i k \omega}.$$

Beide Identitäten (4.8) und (4.9) heißen Skalierungsgleichung oder Verfeinerungsgleichung von ϕ .

Die Folge $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ heißt die Skalierungsmaske und die 1-periodische Funktion P_ϕ heißt das Skalierungssymbol von ϕ .

Beweis: Die Identität (4.8) ist klar, (4.9) folgt sofort mit den Rechenregeln der Fouriertransformation. \square

Wir wollen noch Beziehungen für die duale Basisfunktion γ von ϕ und die orthogonale Basisfunktion ϕ^\perp herleiten. Beide Funktionen erfüllen ebenfalls eine Verfeinerungsgleichung.

FOLGERUNG 4.7. Gegeben sei eine MRA V_j , $j \in \mathbb{Z}$, mit der Skalierungsfunktion ϕ und dem Skalierungssymbol $P_\phi \in L^2(0, 1)$.

(i) Die duale Basisfunktion γ von V_0 ist ebenfalls verfeinerbar; ihr Skalierungssymbol ist

$$P_\gamma(\omega) = \frac{P_\phi(\omega) [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega)}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](2\omega)},$$

und es gilt

$$(4.10) \quad P_\phi(\omega) \overline{P_\gamma(\omega)} + P_\phi\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \overline{P_\gamma\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} = 1 \quad \text{für fast alle } \omega \in (0, 1).$$

(ii) Die orthogonale Basisfunktion ϕ^\perp von V_0 ist ebenfalls verfeinerbar; ihr Skalierungssymbol ist

$$P^\perp(\omega) = \frac{P_\phi(\omega) \sqrt{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega)}}{\sqrt{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](2\omega)}},$$

und es gilt

$$(4.11) \quad |P^\perp(\omega)|^2 + \left| P^\perp\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1 \quad \text{für fast alle } \omega \in (0, 1).$$

Beweis: Die Verfeinerbarkeit von γ und ϕ^\perp folgt durch direktes Nachrechnen der Identitäten für die Fouriertransformierten.

Die Identitäten für die Skalierungssymbole ergeben sich aus folgender Überlegung zum Klammerprodukt: die Periodisierung zur Periodenlänge 1 und die Skalierung mit dem Faktor 1/2 hängen zusammen gemäß

$$\begin{aligned} & [f(2^{-1}\cdot), g(2^{-1}\cdot)](x) = \\ & = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2^{-1}(x+k)) \overline{g(2^{-1}(x+k))} \\ (4.12) \quad & = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2^{-1}x+k) \overline{g(2^{-1}x+k)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2^{-1}(x+1)+k) \overline{g(2^{-1}(x+1)+k)} \\ & = [f, g](2^{-1}x) + [f, g](2^{-1}(x+1)). \end{aligned}$$

Dabei wurde die Reihe in der ersten Gleichung aufgeteilt in die Reihe über gerade und ungerade $k \in \mathbb{Z}$. Damit folgt aus den Verfeinerungsgleichungen für ϕ und γ

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}, \hat{\gamma}](\omega) &= \left[P_\phi(2^{-1}\cdot)\hat{\phi}(2^{-1}\cdot), P_\gamma(2^{-1}\cdot)\hat{\gamma}(2^{-1}\cdot) \right](\omega) \\ &= \left[P_\phi\hat{\phi}, P_\gamma\hat{\gamma} \right](2^{-1}\omega) + \left[P_\phi\hat{\phi}, P_\gamma\hat{\gamma} \right](2^{-1}(\omega+1)). \end{aligned}$$

Die Faktoren P_ϕ, P_γ sind 1-periodisch und können aus den Klammerprodukten der letzten Zeile herausgezogen werden. Aufgrund der Dualität ist

$$[\hat{\phi}, \hat{\gamma}](\omega) = [\hat{\phi}, \hat{\gamma}](2^{-1}\omega) = [\hat{\phi}, \hat{\gamma}](2^{-1}(\omega+1)) = 1,$$

also erhalten wir

$$1 = P_\phi(2^{-1}\omega)\overline{P_\gamma(2^{-1}\omega)} + P_\phi(2^{-1}(\omega+1))\overline{P_\gamma(2^{-1}(\omega+1))}$$

für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$. Damit ist (4.10) gezeigt. Der Nachweis von (4.11) erfolgt ganz ähnlich. \square

BEMERKUNG 4.8. *Erwähnenswert sind auch die folgenden Darstellungen der Skalierungsmaske und des Skalierungssymbols. Die Koeffizienten der Skalierungsmaske von ϕ sind gegeben durch*

$$p_k = \sqrt{2}\langle \phi, \gamma_{1,k} \rangle = 2\langle \phi, \gamma(2 \cdot -k) \rangle, \quad k \in \mathbb{Z},$$

weil Γ_1 die duale Riesz-Basis zu Φ_1 ist. (Wir stellen also ϕ als Funktion in V_1 dar mit der Riesz-Basis Φ_1).

Das Skalierungssymbol P_ϕ ist wegen (4.9) gegeben durch

$$P_\phi(\omega) = \frac{\hat{\phi}(2\omega)}{\hat{\phi}(\omega)}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Hierbei ist $\frac{0}{0} = 0$ zu setzen, falls der Nenner auf einer Menge von positivem Maß verschwindet. Für die Verfeinerbarkeit von ϕ ist es also notwendig und hinreichend, dass der Quotient auf der rechten Seite

- eine 1-periodische Funktion definiert
- und im Intervall $(0, 1)$ quadrat-integrierbar ist.

So lässt sich in vielen Fällen die Verfeinerbarkeit einer Funktion $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ prüfen und das Skalierungssymbol angeben.

BEMERKUNG 4.9. *Die Konstruktion einer MRA geht üblicherweise folgendermaßen vor. Zuerst wählt man eine Funktion $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ mit*

- (1) $\hat{\phi}(0) \neq 0$ und $\hat{\phi}$ stetig an der Stelle 0,
- (2) $\text{essinf}[\hat{\phi}, \hat{\phi}] > 0$ und $\text{esssup}[\hat{\phi}, \hat{\phi}] < \infty$,
- (3) ϕ ist verfeinerbar.

Dann definieren die Räume

$$V_j = \left\{ f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_{j,k} : (c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

eine MRA, wobei $\phi_{j,k} = 2^{j/2}\phi(2^j \cdot -k)$ gesetzt wird, eine MRA. Denn:

- die Verschachtelung $V_j \subset V_{j+1}$ folgt aus Eigenschaft (3),
- die Shiftinvarianz und Basiseigenschaft von V_0 gelten wegen $V_0 = S_2(\phi)$ und der Bedingung (2),
- die Dichtheit folgt aus Eigenschaft (1) (vgl. Satz 4.4),
- die Trennungseigenschaft folgt mit Satz 4.3,
- die Skalierungsinvarianz ist per Definition der V_j erfüllt,
- die Abgeschlossenheit aller Teilräume V_j folgt aus der Abgeschlossenheit von V_0 .

BEMERKUNG 4.10. Ein weiterer Zusammenhang zwischen dem Skalierungssymbol einer verfeinerbaren Funktion ϕ und der Fouriertransformierten $\hat{\phi}$ soll noch erläutert werden. Die Skalierungsgleichung

$$\hat{\phi}(\omega) = P\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

in (4.9) kann iteriert werden zu

$$\hat{\phi}(\omega) = \hat{\phi}(2^{-J}\omega) \prod_{j=1}^J P(2^{-j}\omega), \quad J \in \mathbb{N}.$$

Falls $\hat{\phi}$ an der Stelle 0 stetig ist, ergibt sich sofort

$$(4.13) \quad \hat{\phi}(\omega) = \hat{\phi}(0) \prod_{j=1}^{\infty} P(2^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Dies liefert eine wichtige Erkenntnis für die Konstruktion neuer verfeinerbarer Funktionen ϕ : wir können eine periodische Funktion $P \in L^2(0,1)$ wählen, für die das unendliche Produkt in (4.13) für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$ konvergiert und eine Funktion in $L^2(\mathbb{R})$ liefert, und bestimmen ϕ sodann als inverse Fouriertransformierte des Grenzwerts. Diese Konstruktion von ϕ ist das Herzstück der Wavelet-Konstruktionen von I. Daubechies, die wir detailliert im Kapitel 5 behandeln werden.

Zum Abschluss des Abschnitts über Multiskalen-Analyse geben wir noch mehrere Beispiele an.

BEISPIEL 4.11. Als Skalierungsfunktion wählen wir $\phi = \chi_{[0,1]}$. Offensichtlich ist ϕ verfeinerbar, denn

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1), \quad x \in \mathbb{R},$$

ist die Verfeinerungsgleichung mit der endlichen Skalierungsmaske $(p_0, p_1) = (1, 1)$. Gleichbedeutend ist die Identität der Fouriertransformierten

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1 - e^{-2\pi i\omega}}{2\pi i\omega} = \underbrace{\frac{1 + e^{-\pi i\omega}}{2}}_{=P(\omega/2)} \underbrace{\frac{1 - e^{-\pi i\omega}}{\pi i\omega}}_{=\hat{\phi}(\omega/2)},$$

woraus wir ebenfalls das Skalierungssymbol und die Skalierungsmaske

$$P(\omega) = \frac{1 + e^{-2\pi i\omega}}{2} = \frac{1}{2}(p_0 + p_1 e^{-2\pi i\omega})$$

ablesen.

Wir wissen bereits, dass $\Phi_0 = (\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z})$ eine Orthonormalbasis von $V_0 = S_2(\phi)$ ist (vgl. Beispiel 3.14). Weil $\hat{\phi}$ stetig ist und $\hat{\phi}(0) = 1$ erfüllt, definieren die Räume

$$V_j = \left\{ f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_{j,k} : (c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

eine MRA. Man beachte, dass V_j der Vektorraum aller quadrat-integrierbaren Treppenfunktionen mit Sprungstellen in $2^{-j}\mathbb{Z}$ ist. Anhand dieser Darstellung mache man sich die Eigenschaften der MRA noch einmal klar.

Die Identität (4.11) ist einfach

$$1 = |P(\omega)|^2 + |P(\omega + 1/2)|^2 = \left| \frac{1 + e^{-2\pi i \omega}}{2} \right|^2 + \left| \frac{1 - e^{-2\pi i \omega}}{2} \right|^2 = \cos^2(\pi \omega) + \sin^2(\pi \omega),$$

also ein typisches $\cos^2 \dots + \sin^2 \dots = 1$. Schöner ist die Identität (4.13)

$$\frac{1 - e^{-2\pi i \omega}}{2\pi i \omega} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 + e^{-2^{1-j} \pi i \omega}}{2}.$$

Sie lässt sich auch direkt beweisen durch die Darstellung der endlichen Produkte

$$\prod_{j=1}^J \frac{1 + e^{-2^{1-j} \pi i \omega}}{2} = 2^{-J} \sum_{k=0}^{2^J-1} e^{-k 2^{1-J} \pi i \omega} = \frac{1 - e^{-2\pi i \omega}}{2^J (1 - e^{-2^{1-J} \pi i \omega})},$$

wobei im ersten Schritt nur ausmultipliziert und nach Potenzen von $e^{-2^{1-J} \pi i \omega}$ sortiert wird und im zweiten Schritt die Formel für endliche geometrische Summen verwendet wird. Der Grenzübergang $J \rightarrow \infty$ liefert im Nenner des letzten Bruches $2\pi i \omega$.

BEISPIEL 4.12. Nun geben wir die Skalierungsfunktion $\phi(x) = \text{sinc } x = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ aus Beispiel 3.12 vor, die im Nullpunkt durch $\phi(0) = 1$ analytisch fortgesetzt wird. Wir können die Verfeinerungsgleichung auf zwei Arten ermitteln:

- Wegen $\text{supp } \hat{\phi} = [-1/2, 1/2]$ ist ϕ eine bandbeschränkte Funktion im Paley-Wiener Raum $PW_{1/2}$, und damit erst recht in PW_1 . Das Abtasttheorem zur Bandbreite $\tilde{B} = 1$ liefert die Darstellung

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{k}{2}\right) \text{sinc}(2x - k),$$

die wir auch als Verfeinerungsgleichung

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k) \quad \text{mit} \quad p_k = \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, \\ 0 & \text{für } k = 2m \neq 0, \\ \frac{(-1)^m}{\pi(m+1/2)} & \text{für } k = 2m + 1, \end{cases}$$

schreiben können.

- Alternativ berechnen wir das Skalierungssymbol

$$P(\omega) = \frac{\hat{\phi}(2\omega)}{\hat{\phi}(\omega)} = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| \leq \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{für } \frac{1}{4} < |\omega| < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

im Periodenintervall $[-1/2, 1/2]$ und setzen P periodisch fort mit der Periodenlänge 1. Dann gilt

$$\hat{\phi}(2\omega) = P(\omega)\hat{\phi}(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

(Per Konstruktion gilt die Identität zunächst für $|\omega| < 1/2$, und für $|\omega| > 1/2$ steht hier $0 = 0$.)

Wiederum liegt mit $\Phi_0 = (\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z})$ eine Orthonormalbasis von $V_0 = S_2(\phi)$ vor (vgl. Beispiel 3.12); dies wird ebenfalls durch die Identität (4.11) ausgedrückt. Die Skalenräume der MRA sind die Paley-Wiener Räume

$$V_j = PW_{2^j-1}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Weil $P(\omega) = 0$ für $\frac{1}{4} < |\omega| < \frac{3}{4}$ gilt, hat das unendliche Produkt

$$\prod_{j=1}^{\infty} P(2^{-j}\omega)$$

in Identität (4.13) den Wert 0 für

$$\frac{1}{2} < |\omega| < \frac{3}{2} \quad (\text{Faktor } P(\omega/2)), \quad 1 < |\omega| < 3 \quad (\text{Faktor } P(\omega/4)), \quad \text{etc.}$$

Daher ist das Produkt gleich $\chi_{(-1/2, 1/2)} = \hat{\phi}$.

BEISPIEL 4.13. Wir gehen kurz auf die Klasse der Meyer-Funktionen ϕ in Beispiel 3.13 ein. ϕ ist verfeinerbar mit dem Skalierungssymbol

$$P(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| < \frac{1}{6}, \\ \sigma(2|\omega|) & \text{für } \frac{1}{6} < |\omega| < \frac{1}{3}, \\ 0 & \text{für } \frac{1}{3} < |\omega| < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Wir wissen bereits, dass $\Phi_0 = (\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z})$ eine Orthonormalbasis von $V_0 = S_2(\phi)$ ist. Der Skalenraum V_j der MRA ist echter Teilraum des Paley-Wiener Raums $PW_{2^{j+1}/3}$.

BEISPIEL 4.14. Auch der B-Spline N_m ist verfeinerbar. Die Verfeinerungsgleichung

$$N_m(x) = 2^{1-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} N_m(2x - k)$$

wurde bereits in den Übungen bewiesen. Ein zweiter Beweis erfolgt wieder mit der Berechnung des Skalierungssymbols

$$P(\omega) = \frac{\hat{N}_m(2\omega)}{\hat{N}_m(\omega)} = \left(\frac{2\pi i \omega (1 - e^{-4\pi i \omega})}{4\pi i \omega (1 - e^{-2\pi i \omega})} \right)^m = 2^{-m} (1 + e^{-2\pi i \omega})^m,$$

hier kommt die 3. binomische Formel zum Einsatz:

$$1 - e^{-4\pi i \omega} = (1 - e^{-2\pi i \omega})(1 + e^{-2\pi i \omega}).$$

Der Quotient ist tatsächlich periodisch, also ist ϕ verfeinerbar. Die Fourierreihe von P wird direkt mit der binomischen Formel angegeben:

$$P(\omega) = 2^{-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} e^{-2\pi i k \omega}.$$

Hieran liest man die Verfeinerungsmaske $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ab:

$$p_k = 2^{1-m} \binom{m}{k} \text{ für } 0 \leq k \leq m, \quad p_k = 0 \text{ sonst.}$$

Der Skalenraum V_j besteht aus Splines der Ordnung m mit Knoten in $2^{-j}\mathbb{Z}$. Die Approximationstheorie behandelt nicht nur die Dichtheitseigenschaft, sondern gibt auch viele quantitative Aussagen zur Approximation mit Splinefunktionen.

ÜBUNG 4.15. Seien X_j und Y_j definiert durch

$$\begin{aligned} X_j &= \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f(t) = 0 \text{ für fast alle } |t| \leq 2^{-j}\}, \\ Y_j &= \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\omega) = 0 \text{ für fast alle } |\omega| \leq 2^{-j}\}. \end{aligned}$$

Welche der Axiome einer MRA sind jeweils verletzt?

ÜBUNG 4.16. Die Funktion $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ sei die Skalierungsfunktion einer MRA mit dem Skalierungssymbol P_ϕ . Weiter sei $\hat{\phi}$ stetig an der Stelle $\omega = 0$ und $\hat{\phi}(0) \neq 0$. Beweisen Sie:

- a) P_ϕ ist stetig an der Stelle 0 und es gilt $P(0) = 1$.
b) Es gilt

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}](2\omega) = |P_\phi(\omega)|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) + \left| P_\phi\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \right|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\omega + \frac{1}{2}\right).$$

- c) Es gilt $P_\phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, also erfüllt die Skalierungsmaske die sog. Summenregel

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1}.$$

- d) Im Fall $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \equiv 1$ gilt für die Skalierungsmaske

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \overline{p_{k+2\ell}} = 2\delta_{\ell,0}, \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$

2. Diskrete Wavelet-Transformation

Wir kommen nun zu unserem Ziel dieses Kapitels, nämlich der passenden Diskretisierung der Wavelet-Transformation $W_\psi f(a, b)$ aus Definition 2.7.

Dazu sei $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ein Wavelet gemäß Definition 2.17, also gilt

$$(4.14) \quad 0 < C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

Wie schon im vorherigen Abschnitt verwenden wir die Notation

$$(4.15) \quad \psi_{j,k} := 2^{j/2} \psi(2^j \cdot -k) = 2^{j/2} \psi(2^j(\cdot - k2^{-j})), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

DEFINITION 4.17. (Wavelet-Basis)

Die Funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ erfülle die Bedingung (4.14)². Dann heißt die Familie

$$\Psi = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} \Psi_j = (\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z})$$

Wavelet-Basis, wenn sie eine Riesz-Basis von $L_2(\mathbb{R})$ ist. Die Funktion ψ heißt Mutter-Wavelet der Wavelet-Basis Ψ .

Zu dieser speziellen Riesz-Basis von $L^2(R)$ bekommt der Analyse-Operator in Bemerkung 3.10 einen eigenen Namen.

DEFINITION 4.18. (*Diskrete Wavelet-Transformation (DWT)*)

Zu einem Mutter-Wavelet $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ heißt der lineare Operator

$$C_\psi : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^2), \quad C_\psi f = (\langle f, \psi_{j,k} \rangle)_{j,k \in \mathbb{Z}}$$

diskrete Wavelet-Transformation.

Neben den Eigenschaften und der Charakterisierung von Wavelet-Basen werden wir auch Methoden der Konstruktion solcher Basen behandeln. Besonders wünschenswert sind dabei gewisse Zusatz-Eigenschaften von ψ :

- beliebig hohe Anzahl verschwindender Momente,
- beliebig hohe Glattheit,
- die Eigenschaft, dass ψ kompakten Träger hat, oder
- die Eigenschaft, dass ψ bandbeschränkt ist.

Die Konstruktion von Wavelet-Basen mit den ersten drei Eigenschaften wurde in den 1980'er Jahren als wichtiges Problem der "Harmonischen Analysis" angesehen. 1988 gab I. Daubechies³ die erste erfolgreiche Konstruktion solcher Funktionen ψ an. Ähnliche Konstruktionen wurden unter dem Namen " ϕ -Transformation" fast zeitgleich von M. Frazier und B. Jawerth⁴ angegeben. Seither nimmt die Wavelet-Analyse (oder Wavelet-Theorie) einen wichtigen Platz in der Angewandten Mathematik ein.

Wir führen die folgenden Notationen ein.

BEZEICHNUNG 4.19. Zu einem Wavelet $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ definieren wir die Waveleträume

$$(4.16) \quad W_j := \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \text{span} \{ \psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z} \}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

Zu $f \in L^2(\mathbb{R})$ setzen wir

$$(4.17) \quad d_j(f) = (d_{j,k}(f))_{k \in \mathbb{Z}}, \quad d_{j,k}(f) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle.$$

Einige einfache Aussagen folgen direkt aus der Definition.

²Die Bedingung (4.14) folgt bereits daraus, dass Ψ eine Riesz-Basis von $L^2(\mathbb{R})$ ist; man kann also auf diese Voraussetzung komplett verzichten [C. K. Chui und X. Shi, Inequalities of Littlewood-Paley type for frames and wavelets, SIAM J. Math. Anal. 24, (1993), 263277]

³Ingrid Daubechies, geb. 1954 in Belgien, seit 1993 Professorin an der Princeton University

⁴Michael Frazier, Michigan State University, Björn Jawerth, University of South Carolina

FESTSTELLUNG 4.20. Die Funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ sei Mutter-Wavelet einer Wavelet-Basis Ψ mit Riesz-Schranken $A, B > 0$. Dann gilt:

a) Die Familie W_j ist skalierungsinvariant gemäß

$$f \in W_j \iff f(2^{-j}\cdot) \in W_0.$$

b) Für $j \in \mathbb{Z}$ ist die Familie $(\psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z})$ eine Riesz-Basis von W_j mit Riesz-Schranken A, B , und W_j ist G_j -shift-invariant zur Untergruppe $G_j = 2^{-j}\mathbb{Z}$.

c) Es gilt die Zerlegung

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j,$$

wobei \oplus die direkte Summe der Vektorräume W_j bezeichnet. Mit anderen Worten: jedes $f \in L^2(\mathbb{R})$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j \quad \text{mit} \quad f_j \in W_j$$

als Grenzwert der Reihe in $L^2(\mathbb{R})$.

Der Skalierungsparameter $a = 2^{-j}$, $j \in \mathbb{Z}$, aus der Wavelet-Transformation

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = W_\psi f(2^{-j}, 2^{-j}k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

wird also zur ‘Sortierung’ der Wavelet-Basis Ψ verwendet. Wir zeigen zuerst, dass die Struktur der Wavelet-Basis sich auf die duale Riesz-Basis von $L^2(\mathbb{R})$ überträgt.

SATZ 4.21. Die Funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ sei Mutter-Wavelet einer Wavelet-Basis Ψ mit Riesz-Schranken $A, B > 0$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Die duale Basis von Ψ ist ebenfalls eine Wavelet-Basis, d.h. es existiert eine Funktion $\tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$, so dass $\tilde{\Psi} = (\tilde{\psi}_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z})$ die duale Basis von Ψ ist. Hierbei ist wie üblich

$$\tilde{\psi}_{j,k} = 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j \cdot -k), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Der Vektorraum

$$V_0 := \bigoplus_{j=-\infty}^{-1} W_j$$

ist \mathbb{Z} -shift-invariant

In diesem Fall gilt weiter:

- $\tilde{\psi}$ ist die eindeutige Lösung der Biorthogonalitätsrelationen

$$(4.18) \quad \langle \tilde{\psi}_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'}, \quad j, k, j', k' \in \mathbb{Z}.$$

- $\tilde{\Psi}$ ist eine Riesz-Basis von $L^2(\mathbb{R})$ mit Riesz-Schranken $1/B, 1/A$.
- Die Räume

$$(4.19) \quad \tilde{W}_j = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \text{span} \{ \tilde{\psi}_{j,k}; k \in \mathbb{Z} \}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

besitzen die Eigenschaften in Feststellung 4.20.

- Für jedes $f \in L^2(\mathbb{R})$ gelten die Darstellungen

$$(4.20) \quad f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k} = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

mit unbedingter Konvergenz beider Reihen in $L^2(\mathbb{R})$.

Man nennt dann ψ und $\tilde{\psi}$ biorthogonale Wavelets.

Beweis: Die Riesz-Basis Ψ von $L^2(\mathbb{R})$ besitzt eine duale Basis, deren Elemente $\gamma^{j,k}$ durch die Biorthogonalitätsrelationen

$$\langle \gamma^{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'}, \quad j, j', k, k' \in \mathbb{Z},$$

eindeutig gegeben sind. Man beachte, dass die hochgestellten Indizes noch nicht ausdrücken sollen, dass es sich hier um Skalierung und Shift einer Funktion handeln soll. Die allgemeine Erläuterung zur dualen Basis einer Riesz-Basis in Bemerkung 3.10 besagt, dass $\Gamma = (\gamma^{j,k}; j, k \in \mathbb{Z})$ ebenfalls eine Riesz-Basis von $L^2(\mathbb{R})$ ist und dass $1/B$ und $1/A$ Riesz-Schranken von Γ vorliegen.

Es sei die Voraussetzung (i) erfüllt, also

$$\gamma^{j,k} = \tilde{\psi}_{j,k} = 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j \cdot -k).$$

Dann sind die Wavelet-Räume \tilde{W}_j in (4.19) shift-invariant bzgl. $2^{-j}\mathbb{Z}$, also alle Räume \tilde{W}_j mit $j \geq 0$ zumindest \mathbb{Z} -shift-invariant. An der Darstellung in (4.20) liest man sofort

$$V_0 = \left(\bigoplus_{j=0}^{\infty} \tilde{W}_j \right)^{\perp}$$

ab. Also ist auch V_0 als orthogonales Komplement eines \mathbb{Z} -shift-invarianten Raumes \mathbb{Z} -shift-invariant.

Sei nun die Voraussetzung (ii) erfüllt. Wir definieren

$$\tilde{\psi} := \gamma^{0,0}$$

und weisen für beliebiges $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ die Biorthogonalität

$$(4.21) \quad \langle \tilde{\psi}_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'}, \quad j', k' \in \mathbb{Z},$$

nach. Dann ist nämlich $\tilde{\psi}_{j,k} = \gamma^{j,k}$ aufgrund der Eindeutigkeit der dualen Basis. Durch Anwendung der Substitutionsregel erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\psi}_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} 2^{(j+j')/2} \tilde{\psi}(2^j x - k) \overline{\psi(2^{j'} x - k')} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2^{(j'-j)/2} \tilde{\psi}(x - k) \overline{\psi(2^{j'-j} x - k')} dx \\ &= \langle \gamma^{0,0}(\cdot - k), \psi_{j'-j, k'} \rangle. \end{aligned}$$

Damit folgt (4.21) bereits für alle $(j', k') \in \mathbb{Z}^2$ mit $j' \geq j$, denn erneute Substitution ergibt

$$\langle \tilde{\psi}_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \langle \gamma^{0,0}, \psi_{j'-j, k'-2^{j'-j}k} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'}.$$

Für $j' < j$ verwenden wir die Voraussetzung (ii), dass nämlich

$$\psi_{j'-j, k'}(\cdot + k) \in V_0$$

gilt. Also erhalten wir wegen $\gamma^{0,0} \perp V_0$ auch

$$\langle \tilde{\psi}_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \langle \gamma^{0,0}, \psi_{j'-j, k'}(\cdot + k) \rangle = 0.$$

Insgesamt folgt also (4.21) für alle $(j', k') \in \mathbb{Z}^2$ aus der Voraussetzung (ii).

Die zusätzlichen Aussagen ergeben sich sofort als Eigenschaften der Wavelet-Basis $\tilde{\Psi}$. \square

BEMERKUNG 4.22. *Bedingung (ii) in Satz 4.21 ist im Weiteren von großer Bedeutung: sie stellt den Zusammenhang einer Wavelet-Basis zu einer verallgemeinerten Multiskalen-Analyse her. Wir definieren die Skalenräume V_j , $j \in \mathbb{Z}$, mit*

$$V_j := \bigoplus_{\ell=-\infty}^{j-1} W_\ell$$

zu den Waveleträumen W_j einer Wavelet-Basis Ψ . Die V_j sind abgeschlossene Teilräume von $L^2(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften der

- (i) Verschachtelung $V_j \subset V_{j+1}$ per Definition,
- (ii) Dichtheit

$$\text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \left(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j \right) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j = L^2(\mathbb{R}),$$

und Trennungseigenschaft

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = L^2(\mathbb{R}) \setminus \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j = \{0\},$$

- (iii) Skalierungsinvarianz, wegen der Skalierungsinvarianz der W_j ,

Es fehlt nur noch die Eigenschaft (iv), also die \mathbb{Z} -Shift-Invarianz von V_0 UND die Bedingung, dass V_0 eine Riesz-Basis $\Phi_0 = (\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z})$ mit zugehöriger Skalierungsfunktion $\phi \in V_0$ besitzt. Beide Bedingungen oder auch nur die zweite Bedingung können verletzt sein. (Zur zweiten Bedingung werden wir ein Beispiel in den Übungen behandeln, siehe "Wavelet-Sets".) Bei fast allen praktisch relevanten Wavelet-Basen gibt es aber eine solche Skalierungsfunktion $\phi \in V_0$. Man nennt diese Mutter-Wavelets ψ dann MRA-Wavelet.

Mit dieser Überlegung zum Zusammenhang von Wavelet-Basen und Multiskalen-Analyse lassen sich nun ganze Klassen von Wavelet-Basen konstruieren. Dahinter steckt die Beziehung zweier benachbarter Skalierungsstufen

$$(4.22) \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

die die Skalenräume $V_j = \bigoplus_{\ell \leq j-1} W_\ell$ einer Wavelet-Basis Ψ offensichtlich erfüllen. Gehen wir andersherum vor, indem wir die Skalenräume einer MRA direkt vorgeben, so suchen wir nach den Wavelet-Räumen W_j , die die Identität (4.22) erfüllen. Die Skalierungsinvarianz reduziert diese Aufgabe auf die Zerlegung

$$(4.23) \quad V_1 = V_0 \oplus W_0,$$

und die Shift-Invarianz von W_0 reduziert dies weiter auf die Suche nach einem Mutter-Wavelet $\psi \in V_1 \setminus V_0$ mit $W_0 = S_2(\psi)$. Hierbei haben wir aber eine wichtige Eigenschaft außer Acht gelassen: am Ende muss die Stabilität der gesamten Familie Ψ über alle Skalierungsstufen und Shifts $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ als Riesz-Basis von $L^2(\mathbb{R})$ vorliegen.

Eine Situation, in der diese Stabilität wieder leicht zu prüfen ist, liegt vor, wenn

$$(4.24) \quad W_0 \perp V_0, \quad V_1 = V_0 \oplus W_0$$

gilt.

SATZ 4.23. *Es sei $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ eine Multiskalen-Analyse mit Skalierungsfunktion ϕ . Weiter sei W_0 das orthogonale Komplement von V_0 in V_1 , siehe (4.24).*

Zur Funktion $\psi \in V_1$ sei die Familie $\Psi_0 = (\psi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z})$ eine Riesz-Basis von W_0 mit Riesz-Schranken $\tilde{A}, \tilde{B} > 0$.

Dann ist ψ ein Mutter-Wavelet mit Riesz-Schranken \tilde{A}, \tilde{B} der Wavelet-Basis Ψ von $L^2(\mathbb{R})$.

Die Funktion ψ heißt semi-orthogonales Wavelet zur gegebenen MRA.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $W_0 = S_2(\psi)$ und die Wavelet-Räume sind

$$W_j = \{f; f(2^{-j}\cdot) \in W_0\}.$$

Dann gilt wie in Bild 4.1 veranschaulicht

$$W_j \perp V_j, \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Wir zeigen nun die paarweise Orthogonalität

$$(4.25) \quad W_j \perp W_k \quad \text{für } k \neq j.$$

Mit der Skalierungsinvarianz genügt es, dies für $j = 0$, $k \neq 0$ zu prüfen. Für $k < 0$ erhalten wir

$$W_k \subset V_{k+1} \subset V_0 \perp W_0, \quad \text{also } W_k \perp W_0.$$

Für $k > 0$ gilt entsprechend

$$W_0 \subset V_1 \subset V_k \perp W_k, \quad \text{also } W_0 \perp W_k.$$

Also ist (4.25) erfüllt.

Mit den Riesz-Schranken $\tilde{A}, \tilde{B} > 0$ der Familie Ψ_0 von W_0 folgt aus der Skalierungsinvarianz

$$\tilde{A} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{j,k}|^2 \leq \left\| \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}}_{\in W_k} \right\|^2 \leq \tilde{B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{j,k}|^2, \quad c_j := (c_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Die paarweise Orthogonalität ("Satz des Pythagoras") ergibt

$$\tilde{A} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{j,k}|^2 \leq \left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k} \right\|^2 \leq \tilde{B} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{j,k}|^2, \quad (c_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}^2).$$

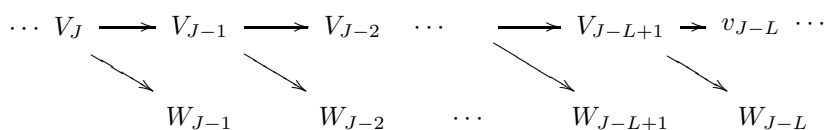


BILD 4.1. Orthogonale Zerlegung der Skalenräume V_j mit einem semi-orthogonalen Wavelet

Also sind \tilde{A}, \tilde{B} auch Riesz-Schranken der gesamten Familie Ψ .

Dass der Abschluss des Aufspans von Ψ der gesamte Raum $L^2(\mathbb{R})$ ist, prüft man anhand der Dichtheits- und Trennungseigenschaft der MRA. Denn es gilt

$$(4.26) \quad L^2(\mathbb{R}) = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j.$$

Dies wird in Bild 4.1 veranschaulicht. \square

BEMERKUNG 4.24. Die rekursive Anwendung der orthogonalen Zerlegung $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ führt auf die Baumstruktur in Bild 4.1, also

$$V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1} = V_{J-2} \oplus W_{J-2} \oplus W_{J-1} = \cdots = V_{J-L} \oplus \bigoplus_{j=J-L}^{J-1} W_j.$$

Die Grenzübergänge $J \rightarrow \infty$ und $L \rightarrow \infty$ zeigen, dass die Identität (4.26) gilt.

Die konkrete Konstruktion semi-orthogonaler Wavelets gelingt wieder mit den Methoden aus Kapitel 3.

SATZ 4.25. (Konstruktion von MRA-Wavelets)

Es sei $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ eine Multiskalen-Analyse mit Skalierungsfunktion $\phi \in V_0$. Weiter sei P_ϕ das Skalierungssymbol von ϕ .

Die periodische Funktion $Q \in L^2(0, 1)$ erfülle

$$(4.27) \quad P_\phi(\omega) \overline{Q(\omega)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) + P_\phi\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \overline{Q\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\omega + \frac{1}{2}\right) = 0$$

sowie

$$(4.28) \quad 0 < \tilde{A} \leq |Q(\omega)|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) + \left| Q\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \right|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \leq \tilde{B} < \infty$$

für fast alle $\omega \in (0, 1)$. Dann ist $\psi \in V_1$ mit

$$(4.29) \quad \hat{\psi}(\omega) = Q\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

ein Mutter-Wavelet, und die Wavelet-Basis Ψ von $L^2(\mathbb{R})$ besitzt die Riesz-Schranken \tilde{A}, \tilde{B} .

BEMERKUNG 4.26. Die Darstellung von ψ im Zeitbereich erhalten wir mit der Fourier-Entwicklung

$$Q(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k e^{-2k\pi i \omega}.$$

Dann ergibt (4.29) die Darstellung

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k \phi(2x - k).$$

Wegen $(q_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ist $\psi \in V_1$. Die Folge (q_k) nennen wir auch Waveletmaske, die Funktion Q nennen wir Waveletsymbol von ψ .

Beweis: Die Rechenregeln für das Klammerprodukt ergeben für beliebige $k, \ell \in \mathbb{Z}$

$$\langle \phi(\cdot - k), \psi(\cdot - \ell) \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i(\ell - k)\omega} [\hat{\phi}, \hat{\psi}](\omega) d\omega.$$

Mit der gleichen Umformung des Klammerprodukts wie in (4.12) erhalten wir

$$[\hat{\phi}, \hat{\psi}](2\omega) = P_\phi(\omega) \overline{Q(\omega)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) + P_\phi\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \overline{Q\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\omega + \frac{1}{2}\right).$$

Also impliziert die Eigenschaft (4.27) die Orthogonalität

$$\psi(\cdot - \ell) \perp V_0, \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$

Weiterhin folgt mit der gleichen Rechenregel

$$(4.30) \quad [\hat{\psi}, \hat{\psi}](2\omega) = |Q(\omega)|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) + \left| Q\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \right|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\omega + \frac{1}{2}\right).$$

Die Bedingung (4.28) ist also äquivalent dazu, dass $\Psi_0 = (\psi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z})$ eine Riesz-Basis von $S_2(\psi)$ mit den Riesz-Schranken \tilde{A}, \tilde{B} ist.

Wir müssen nur noch beweisen, dass V_1 die Zerlegung

$$V_1 = V_0 \oplus S_2(\psi)$$

besitzt, dann sind alle Voraussetzungen von Satz 4.23 erfüllt. Weil dies auf eine praktisch relevante Zerlegungsformel für $f \in V_1$ führt, formulieren wir dieses Ergebnis separat. \square

SATZ 4.27. (Zerlegungsformel)

Die Voraussetzungen in Satz 4.25 seien erfüllt. Weiter sei $f \in V_1$, d.h. es gilt

$$\hat{f}(\omega) = \tau\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

mit einer periodischen Funktion $\tau \in L^2(0, 1)$ der Periodenlänge 1. Dann gilt

$$(4.31) \quad \hat{f}(\omega) = a(\omega) \hat{\phi}(\omega) + d(\omega) \psi(\omega)$$

mit den 1-periodischen Funktionen $a, d \in L^2(0, 1)$

(4.32)

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{1}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega)} \left(\overline{P_\phi\left(\frac{\omega}{2}\right)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2}\right) \tau\left(\frac{\omega}{2}\right) + \overline{P_\phi\left(\frac{\omega+1}{2}\right)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\frac{\omega+1}{2}\right) \tau\left(\frac{\omega+1}{2}\right) \right), \\ d(\omega) &= \frac{1}{[\hat{\psi}, \hat{\psi}](\omega)} \left(\overline{Q\left(\frac{\omega}{2}\right)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2}\right) \tau\left(\frac{\omega}{2}\right) + \overline{Q\left(\frac{\omega+1}{2}\right)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\frac{\omega+1}{2}\right) \tau\left(\frac{\omega+1}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Beweis: Formen wir (4.31) mit dem Skalierungs- und Wavelet-Symbol um und ersetzen ω durch 2ω , so erhalten wir die Gleichung

$$\tau(\omega)\hat{\phi}(\omega) = (a(2\omega)P_\phi(\omega) + d(2\omega)Q(\omega))\hat{\phi}(\omega)$$

zur Bestimmung der Funktionen a und d . Schreiben wir diese Gleichung erneut für $\omega + \frac{1}{2}$, so erhalten wir wegen der Periodizität von a, d das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} P_\phi(\omega) & Q(\omega) \\ P_\phi(\omega + \frac{1}{2}) & Q(\omega + \frac{1}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(2\omega) \\ b(2\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(\omega) \\ \tau(\omega + \frac{1}{2}) \end{pmatrix}.$$

Mit der Rechenregel in (4.12) haben wir die Identität

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}](2\omega) = |P_\phi(\omega)|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) + \left| P_\phi\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \right|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\omega + \frac{1}{2}\right)$$

(vgl. auch Übung 4.16). Zusammen mit (4.27) und (4.30) erhalten wir, dass die Inverse der obigen Matrix gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](2\omega)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{[\hat{\psi}, \hat{\psi}](2\omega)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{P_\phi(\omega)} & \overline{P_\phi(\omega + \frac{1}{2})} \\ \overline{Q(\omega)} & \overline{Q(\omega + \frac{1}{2})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) & 0 \\ 0 & [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega + \frac{1}{2}) \end{pmatrix}.$$

Die Darstellung von a, d ergibt sich nun durch Multiplikation der rechten Seite des obigen Gleichungssystems mit dieser Matrix. \square

FOLGERUNG 4.28. *Es sei $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ eine Multiskalen-Analyse mit Skalierungsfunktion $\phi \in V_0$. Weiter sei P_ϕ das Skalierungssymbol von ϕ .*

a) *Die periodische Funktion*

$$(4.33) \quad Q_1(\omega) = e^{-2\pi i \omega} \overline{P_\phi\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\omega + \frac{1}{2}\right)$$

erfüllt die Identität (4.27) und liefert die Schranken

$$(4.34) \quad \left. \begin{matrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{essinf}_{\omega \in (0,1)} \\ \text{esssup}_{\omega \in (0,1)} \end{matrix} \right\} [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\omega + \frac{1}{2}\right) [\hat{\phi}, \hat{\phi}](2\omega).$$

b) *Die periodische Funktion*

$$(4.35) \quad Q_2(\omega) = \frac{e^{-2\pi i \omega} \overline{P_\phi\left(\omega + \frac{1}{2}\right)}}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega)}$$

erfüllt die Identität (4.27) und liefert die Schranken

$$(4.36) \quad \left. \begin{matrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{essinf}_{\omega \in (0,1)} \\ \text{esssup}_{\omega \in (0,1)} \end{matrix} \right\} \frac{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](2\omega)}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\omega + \frac{1}{2}\right)}.$$

Die Darstellung der Schranken \tilde{A}, \tilde{B} weisen wir in den Übungen nach. Man beachte, dass wir zwar verschiedene Mutter-Wavelets ψ_1 und ψ_2 erhalten, aber die Wavelet-Räume W_j , $j \in \mathbb{Z}$, die gleichen sind: Diese sind bereits durch die MRA (V_j) und die Orthogonalitätsbedingung (4.24) eindeutig festgelegt.

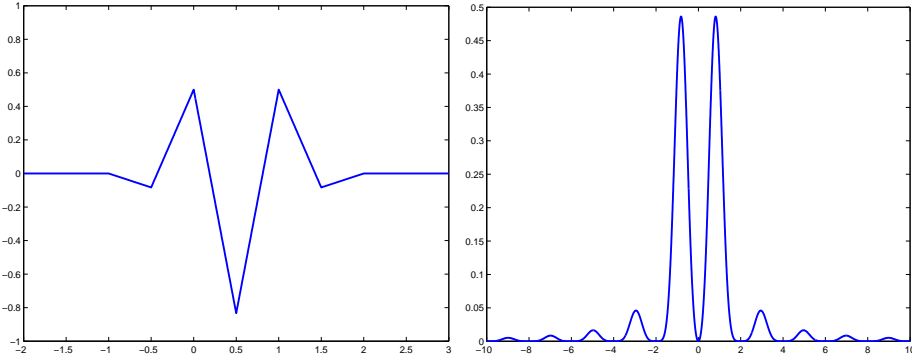


BILD 4.2. Das Spline-Wavelet ψ_1 (links) und der Betrag der Fourier-Transformierten (rechts)

BEISPIEL 4.29. Im konkreten Beispiel $\phi = N_2$ ist

$$P_\phi(\omega) = \frac{1}{4} (1 + 2e^{-2\pi i\omega} + e^{-4\pi i\omega}), \quad [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) = \frac{1}{6} (e^{2\pi i\omega} + 4 + e^{-2\pi i\omega}).$$

Das Waveletsymbol

$$Q_1(\omega) = \frac{1}{24} (-e^{4\pi i\omega} + 6e^{-2\pi i\omega} - 10 + 6e^{2\pi i\omega} - e^{4\pi i\omega})$$

erfüllt die Bedingungen (4.27) und (4.28). Das Mutter-Wavelet ist der lineare Spline

$$\psi_1(x) = \frac{1}{12} (-N_2(x+2) + 6N_2(x+1) - 10N_2(x) + 6N_2(x-1) - N_2(x-2))$$

mit kompaktem Träger $\text{supp } \psi_1 = [-1, 2]$, Knickstellen in $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ und Werten $\frac{1}{12}(-1, 6, -10, 6, -1)$ an den Stellen $\frac{1}{2}(-1, 0, 1, 2, 3)$. Die Riesz-Schranken berechnet man als

$$\tilde{A} = \frac{4}{27}, \quad \tilde{B} = \frac{1}{3}.$$

Alternative: mit Hilfe der Darstellung von $1/[\hat{N}_2, \hat{N}_2]$ in Beispiel 3.16 ist das Waveletsymbol

$$Q_2(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{4} (e^{2\pi i\omega} - 2 + e^{-2\pi i\omega}) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_1^{-|k|} e^{-2k\pi i\omega} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k e^{-2k\pi i\omega}$$

mit $\beta_1 = -(2 + \sqrt{3})$ und $q_k = \frac{\sqrt{3}}{4} (\beta_1^{-|k-1|} - 2\beta_1^{-|k|} + \beta_1^{-|k+1|})$. Das Mutter-Wavelet

$$\psi_2(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k N_2(x - k)$$

hat unbeschränkten Träger, klingt aber zumindest exponentiell ab. Die Riesz-Schranken der zugehörigen Wavelet-Basis sind

$$\tilde{A} = \frac{3}{4}, \quad \tilde{B} = 3.$$

Die duale Wavelet-Basis zu einem semi-orthogonalen Wavelet ψ erhält man durch die Dualisierung der Riesz-Basis Ψ_0 auf der Skalierungsstufe $j = 0$. Dies ist ein weiterer Vorteil der Orthogonalitätsbedingung (4.24).

SATZ 4.30. *Es sei $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ eine Multiskalen-Analyse mit Skalierungsfunktion $\phi \in V_0$. Weiter sei $\psi \in V_1$ ein semi-orthogonales Wavelet wie in Satz 4.23 und W_j bezeichne die zugehörigen Wavelet-Räume.*

a) Dann ist $\tilde{\psi}$ mit

$$\widehat{\tilde{\psi}}(\omega) = \frac{\widehat{\psi}(\omega)}{[\widehat{\psi}, \widehat{\psi}](\omega)}$$

das Mutter-Wavelet der dualen Waveletbasis in Satz 4.21; die Wavelet-Räume zu $\tilde{\psi}$ sind ebenfalls W_j , $j \in \mathbb{Z}$.

b) Die Funktion ψ^\perp mit

$$\widehat{\psi^\perp}(\omega) = \frac{\widehat{\psi}(\omega)}{\sqrt{[\widehat{\psi}, \widehat{\psi}](\omega)}}$$

ist Mutter-Wavelet einer orthonormalen Waveletbasis mit den gleichen Wavelet-Räumen W_j , $j \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Die Semi-Orthogonalität der Wavelet-Basis Ψ ist gleichbedeutend mit der Orthogonalität verschiedener Wavelet-Räume

$$W_j \perp W_k, \quad j \neq k.$$

Um die Biorthogonalität

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j',k'} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'}, \quad j, j', k, k' \in \mathbb{Z},$$

über alle Skalierungsstufen zu erhalten, benötigt man also nur die Dualität innerhalb der einzelnen Stufen. Durch Skalierungsinvarianz genügt hierzu die Betrachtung der Stufe $j = 0$, und dafür verwendet man das Ergebnis in Satz 3.15 für den shift-invarianten Raum W_0 . \square

BEISPIEL 4.31. *Zum Mutter-Wavelet ψ_1 in Folgerung 4.28 erhalten wir*

$$[\widehat{\psi}_1, \widehat{\psi}_1](2\omega) = [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\omega) [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}]\left(\omega + \frac{1}{2}\right) [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](2\omega).$$

Das duale Mutter-Wavelet $\tilde{\psi}_1$ ist gegeben durch

$$\widehat{\tilde{\psi}_1}(\omega) = \tilde{Q}_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

mit dem Wavelet-Symbol

$$\tilde{Q}_1(\omega) = \frac{e^{-2\pi i \omega} \overline{P_\phi\left(\omega + \frac{1}{2}\right)}}{[\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\omega) [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](2\omega)}.$$

Im konkreten Beispiel $\phi = N_2$ ergibt sich exponentielles Abklingverhalten für $x \rightarrow \infty$.

Alternative: das duale Mutter-Wavelet $\tilde{\psi}_2$ ist gegeben durch das Wavelet-Symbol

$$\tilde{Q}_2(\omega) = \frac{e^{-2\pi i \omega} \overline{P_\phi\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}]\left(\omega + \frac{1}{2}\right)}{[\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](2\omega)}.$$

Im konkreten Beispiel $\phi = N_2$ ergibt sich sowohl für $\tilde{\psi}_1$ als auch für $\tilde{\psi}_2$ exponentielles Abklingverhalten für $x \rightarrow \infty$.

Die Konstruktion wird besonders einfach, wenn Φ_0 bereits eine Orthonormalbasis des Skalenraums V_0 ist, wenn also

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \equiv 1$$

gilt. Dann ergeben sich stark vereinfachte Formeln für die Wavelet-Konstruktion.

FOLGERUNG 4.32. *Es sei $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ eine Multiskalen-Analyse mit Skalierungsfunktion $\phi \in V_0$, für die Φ_0 eine Orthonormalbasis von V_0 ist.*

Wir wählen das Wavelet-Symbol $Q \in L^2(0, 1)$ so, dass

$$(4.37) \quad P_\phi(\omega)\overline{Q(\omega)} + P_\phi\left(\omega + \frac{1}{2}\right)\overline{Q\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} = 0$$

sowie

$$(4.38) \quad |Q(\omega)|^2 + \left|Q\left(\omega + \frac{1}{2}\right)\right|^2 = 1$$

für fast alle $\omega \in (0, 1)$ gilt. Dann ist Ψ eine orthonormale Wavelet-Basis von $L^2(\mathbb{R})$.

Beweis: Die Familie Ψ_0 ist eine Orthonormalbasis von W_0 , weil $[\hat{\psi}, \hat{\psi}] \equiv 1$ gilt. Mit der Orthogonalität der Wavelet-Räume folgt dann, dass die Familie Ψ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$ ist. (Alternativ hätte man auch die Riesz-Schranken $\tilde{A} = \tilde{B} = 1$ als Argument verwenden können.) \square

BEISPIEL 4.33. *Häufig wählt man*

$$Q(\omega) = e^{-2\pi i \omega} \overline{P_\phi\left(\omega + \frac{1}{2}\right)}$$

wie in (4.33). Dann sind beide Identitäten (4.37) und (4.38) erfüllt. Besonders schön ist hieran auch die Darstellung von ψ im Zeitbereich. Mit der Skalierungsmaske (p_k) von ϕ erhalten wir

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{1-k} \overline{p_{1-k}} \phi(2x - k).$$

In den folgenden konkreten Beispielen haben wir also orthonormale Wavelet-Basen:

a) *Shannon-Wavelet:* Zur Skalierungsfunktion $\phi(x) = \text{sinc } x$ in Beispiel 4.12 erhalten wir das Mutter-Wavelet ψ mit der Fouriertransformierten

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) &= e^{-i\pi\omega} \overline{P_\phi\left(\frac{\omega+1}{2}\right)} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= e^{-i\pi\omega} (\chi_{(-1,1)}(\omega) - \chi_{(-1/2,1/2)}(\omega)) = \begin{cases} e^{-i\pi\omega}, & \frac{1}{2} < |\omega| < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der ersten Darstellung erkennt man

$$\psi(x) = h\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{mit} \quad h(x) = 2\text{sinc}(2x) - \text{sinc}(x).$$

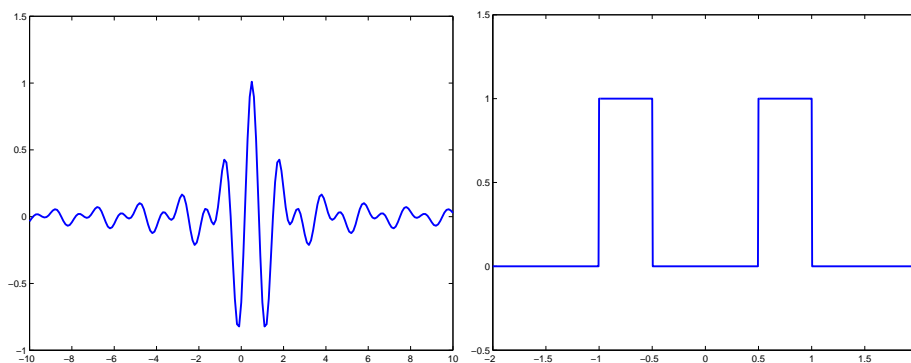


BILD 4.3. Das Shannon-Wavelet (links) und der Betrag der Fourier-Transformierten (rechts)

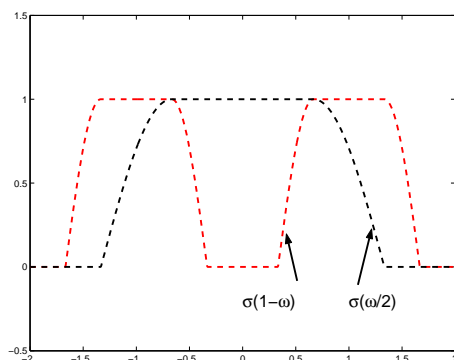


BILD 4.4. Die Faktoren $P((\omega + 1)/2)$ (rot) und $\hat{\phi}(\omega/2)$ (schwarz) zur Fouriertransformierten des Meyer-Wavelets.

Der Wavelet-Raum $W_0 = S_2(\psi)$ ist der Raum der bandbeschränkten Funktionen in PW_1 , die orthogonal sind zum Teilraum $V_0 = PW_{1/2}$. Die Orthogonalität der Wavelet-Räume erkennt man sofort daran, dass die Träger der Fourier-Transformierten zu Funktionen aus verschiedenen W_k disjunkt sind.

- b) Meyer-Wavelet: Das Mutter-Wavelet zur Meyer-Skalierungsfunktion in Beispiel 4.13 hat die Fourier-Transformierte

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} e^{-i\pi\omega\sigma(1-|\omega|)}, & \frac{1}{3} < |\omega| < \frac{2}{3}, \\ e^{-i\pi\omega\sigma(|\omega|/2)}, & \frac{2}{3} < |\omega| < \frac{4}{3}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies wird in Bild 4.33 veranschaulicht, das die beiden Faktoren $P((\omega + 1)/2)$ und $\hat{\phi}(\omega/2)$ darstellt.

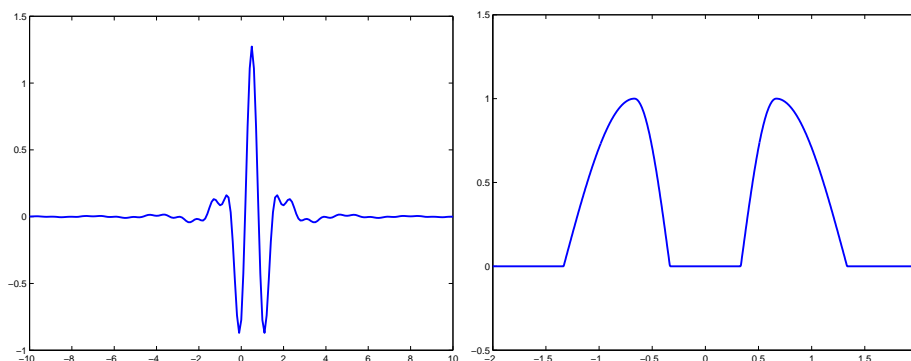


BILD 4.5. Das Meyer-Wavelet (links) und der Betrag der Fourier-Transformierten (rechts)

3. Algorithmen zur diskreten Wavelet-Transformation

Wir haben bereits in Satz 4.27 die Zerlegung von Funktionen $f \in V_1$ in ihre beiden Komponenten $f = f_0 + g_0$ mit $f_0 \in V_0$ und $g_0 \in W_0$ kennengelernt. Weiterhin wurde in Bild 4.1 die rekursive Zerlegung von $f \in V_J$ gemäß

$$(4.39) \quad f = g_{J-1} + g_{J-2} + \cdots + g_{J-L} + f_{J-L}$$

mit $g_j \in W_j$ und $f_{J-L} \in V_{J-L}$ dargestellt. Wir nennen f_j die *Approximation* der Stufe j sowie g_j die *Detailkomponente* der Stufe j von f .

Mit Hilfe der Riesz-Basen von V_j und W_j schreiben wir im Folgenden

$$(4.40) \quad \begin{aligned} f_j &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi_{j,k}, & \text{kurz } a_j &= (a_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}, \\ g_j &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}, & \text{kurz } d_j &= (d_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

Die Berechnung der Folgen a_j , d_j soll nun in Form von Algorithmen herausgearbeitet werden.

Für die Beschreibung der Algorithmen benötigen wir insgesamt 4 Masken, davon sind zwei die Skalierungsmaske p und die Waveletmaske q aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k), \\ \psi(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k \phi(2x - k), \end{aligned}$$

die wir auch durch die zugehörigen Symbole P , Q ausdrücken können. Hinzu kommen die zwei Masken aus der Zerlegungsformel (4.32), die wir mit \check{p} , \check{q} bezeichnen

wollen. Ihre Symbole sind

$$(4.41) \quad \tilde{P}(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{p}_k e^{-2\pi i k \omega} = \frac{P(\omega)[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega)}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](2\omega)},$$

$$(4.42) \quad \tilde{Q}(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{q}_k e^{-2\pi i k \omega} = \frac{Q(\omega)[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega)}{[\hat{\psi}, \hat{\psi}](2\omega)}.$$

HILFSSATZ 4.34. *Es sei ϕ Skalierungsfunktion einer MRA mit Skalierungssymbol $P = P_\phi$ und ψ ein semi-orthogonales Wavelet dieser MRA mit Waveletsymbol Q . Weiter seien $\tilde{\phi}$ und $\tilde{\psi}$ die dualen Basisfunktionen von V_0 bzw. W_0 in Satz 3.15. Mit den Symbolen \tilde{P} , \tilde{Q} in (4.41) gilt dann*

$$(4.43) \quad \begin{aligned} \hat{\phi}(2\omega) &= P(\omega)\hat{\phi}(\omega), & \widehat{\tilde{\phi}}(2\omega) &= \tilde{P}(\omega)\widehat{\tilde{\phi}}(\omega), \\ \hat{\psi}(2\omega) &= Q(\omega)\hat{\phi}(\omega), & \widehat{\tilde{\psi}}(2\omega) &= \tilde{Q}(\omega)\widehat{\tilde{\phi}}(\omega). \end{aligned}$$

Beweis: Die Identitäten auf der linken Seite sind durch die Definitionen von P und Q erfüllt, die erste Identität der rechten Seite wurde in Folgerung 4.7 bewiesen, die zweite folgt mit der Darstellung von $\tilde{\psi}$ in Satz 4.30. \square

Mit diesen Symbolen lässt sich nun die Zerlegung (4.39) in Form der Fourier-Transformierten von f_j , g_j angeben.

SATZ 4.35. (Wavelet-Zerlegung im Frequenz-Bereich)

Zur Funktion $f = f_J \in V_J$ mit $\hat{f}(\omega) = \hat{a}_J(2^{-J}\omega)2^{-J/2}\hat{\phi}(2^{-J}\omega)$ sind die Komponenten f_j , g_j der Zerlegung (4.40) gegeben durch

$$(4.44) \quad \begin{aligned} \hat{a}_j(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{\tilde{P}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \hat{a}_{j+1}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \overline{\tilde{P}\left(\frac{\omega+1}{2}\right)} \hat{a}_{j+1}\left(\frac{\omega+1}{2}\right) \right), \\ \hat{d}_j(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{\tilde{Q}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \hat{a}_{j+1}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \overline{\tilde{Q}\left(\frac{\omega+1}{2}\right)} \hat{a}_{j+1}\left(\frac{\omega+1}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Beweis: Die Zerlegungsformel in (4.32) verwendet $j = 0$ und $\tau = \sqrt{2}\hat{a}_1$. So ergibt sich die Form von \hat{a}_0 und \hat{d}_0 direkt aus (4.32). Durch Skalierung erhalten wir die Gültigkeit für beliebiges $j < J$. \square

Als Übergang zum Zeitbereich schicken wir das Beispiel des Haar-Wavelets voraus.

BEISPIEL 4.36. *Die Skalierungsfunktion $\phi = \chi_{[0,1]}$ hat das Skalierungssymbol $P(\omega) = \frac{1}{2}(1+z)$ (mit $z = e^{-2\pi i\omega}$) und erfüllt $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] = 1$. Das Wavelet-Symbol $Q(\omega) = \frac{1}{2}(1-z)$ liefert die orthonormale Wavelet-Basis Ψ zum Haar-Wavelet*

$$\psi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}.$$

Aufgrund der Orthonormiertheit ist $\tilde{P} = P$ und $\tilde{Q} = Q$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\hat{a}_j(2\omega) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(1 + \frac{1}{z}\right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k} z^k + \left(1 - \frac{1}{z}\right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k a_{j+1,k} z^k \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_{j+1,k} + a_{j+1,k+1}) (z^k + (-1)^k z^k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_{j+1,2k} + a_{j+1,2k+1}) z^{2k},\end{aligned}$$

also sind die Koeffizienten von \hat{a}_j gegeben durch

$$a_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{j+1,2k} + a_{j+1,2k+1}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ganz analog erhält man

$$d_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{j+1,2k} - a_{j+1,2k+1}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die wichtigste Erkenntnis im obigen Beispiel ist die Form der neuen Koeffizienten $a_{j,k}$ und $d_{j,k}$: die Folge a_{j+1} wird mit der Maske $\tilde{p} = (1, 1)$ bzw. $\tilde{q} = (1, -1)$ gefaltet, anschließend wird das Ergebnis der Faltung ausgedünnt, indem nur Koeffizienten mit geradem Index erhalten bleiben. Diese beiden Operationen liefern die Bausteine zur diskreten Wavelet-Transformation.

DEFINITION 4.37. (*Faltung, Downsampling, Upsampling*)

a) Zu $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$ definieren wir den linearen Operator

$$F_c : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}), \quad F_c(x) = c * x = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k x_{m-k} \right)_{m \in \mathbb{Z}},$$

also die Faltung mit c .

b) Wir definieren die linearen Operatoren $D, U, S : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ mit

$$\begin{aligned}D(\dots, x_{-2}, x_{-1}, \boxed{x_0}, x_1, x_2, \dots) &= (\dots, x_{-6}, x_{-4}, x_{-2}, \boxed{x_0}, x_2, x_4, x_6, \dots), \\ U(\dots, x_{-2}, x_{-1}, \boxed{x_0}, x_1, x_2, \dots) &= (\dots, x_{-2}, 0, x_{-1}, 0, \boxed{x_0}, 0, x_1, 0, x_2, \dots), \\ S(\dots, x_{-2}, x_{-1}, \boxed{x_0}, x_1, x_2, \dots) &= (\dots, \overline{x_3}, \overline{x_2}, \overline{x_1}, \boxed{\overline{x_0}}, \overline{x_{-1}}, \overline{x_{-2}}, \overline{x_{-3}}, \dots).\end{aligned}$$

Wir nennen D den Downsampling-, U den Upsampling-Operator und S eine *Involution*. Die Box soll jeweils den Koeffizienten mit Index 0 angeben.

Der Übergang vom Frequenzbereich zum Zeitbereich wird durch die Identitäten für die Fourierreihen klar, die wir in den Übungen behandeln:

$$\begin{aligned}(Dx)^\wedge(\omega) &= \frac{1}{2} \left(\hat{x} \left(\frac{\omega}{2} \right) + \hat{x} \left(\frac{\omega+1}{2} \right) \right), \\ (Ux)^\wedge(\omega) &= \hat{x}(2\omega), \\ (Sx)^\wedge(\omega) &= \overline{\hat{x}(\omega)}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich sofort der folgende Satz zur Wavelet-Zerlegung.

SATZ 4.38. (Algorithmus: Wavelet-Zerlegung im Zeit-Bereich)

Zur Funktion $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{J,k} \phi_{J,k} \in V_J$ sind die Komponenten f_j, g_j der Zerlegung (4.40) gegeben durch die Koeffizientenfolgen

$$\begin{aligned} a_j &= D \circ F_{S\tilde{p}}(a_{j+1}), & a_{j,k} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{\tilde{p}_{-m}} a_{j+1,2k-m}, \\ d_j &= D \circ F_{S\tilde{q}}(a_{j+1}), & d_{j,k} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{\tilde{q}_{-m}} a_{j+1,2k-m}, \end{aligned}$$

mit den Masken \tilde{p} und \tilde{q} in (4.41).

Bei praktischen Anwendungen gibt man noch die Anzahl $L \in \mathbb{N}$ der gewünschten Zerlegungsschritte vor. Ein typischer Befehl in `matlab` zum Eingabevektor $A = a_J$ lautet

$$[D,K] = \text{wavedec}(A,L,'Haar')$$

Dabei kann `'Haar'` durch andere verfügbare Typen von Wavelets ersetzt werden (siehe `wfilters`-Befehl). Der Ausgabevektor D enthält die Vektoren $a_{J-L}, d_{J-L}, \dots, d_{J-1}$ in dieser Reihenfolge und der Vektor K gibt die Längen der einzelnen Vektoren sowie als letzten Eintrag die Länge des Eingabevektors A an.

BEMERKUNG 4.39. *Der Rechenaufwand der Wavelet-Zerlegung wird meist mit $\mathcal{O}(N)$ angegeben, wobei N die Anzahl der Koeffizienten des Vektors a_J ist ($N = \text{length}(A)$ in `matlab`). Damit ist die Wavelet-Zerlegung sogar effizienter als die "schnelle Fourier-Transformation" (FFT), deren Rechenaufwand bei $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ liegt. Sie wird daher in vielen Anwendungen eingesetzt, z.B. bei der Signal- und Bildanalyse, Datenkompression, Statistik. Bild- und Videostandards wie JPEG2000 und MPEG4 verwenden die Wavelet-Transformation ebenso wie die statistische Analyse von Zeitreihen.*

Die Abschätzung des Rechenaufwands erfolgt unter der Voraussetzung, dass die Masken \tilde{p} und \tilde{q} nur m von Null verschiedene Koeffizienten haben. Dann erfordert die Berechnung eines Koeffizienten

$$a_{J-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_m \overline{\tilde{p}_{-m}} a_{J,2k-m}$$

m Operationen (= Multiplikation und anschließende Addition). Die Anzahl der von Null verschiedenen Koeffizienten bei der Faltung ist höchstens

$$\text{length}((S\tilde{p}) * a_J) = \text{length}(a_J) + m - 1.$$

Durch das Downsampling bleiben maximal $(N+m)/2 \approx N/2$ von Null verschiedene Koeffizienten von a_{J-1} und d_{J-1} übrig, so dass im ersten Zerlegungsschritt ca. mN Operationen anfallen. Da der Vektor a_{J-1} ca. die Länge $N/2$ besitzt, ergeben sich im zweiten Schritt dann $mN/2$, im dritten Schritt $mN/4$ Operationen usw. Insgesamt sind also (unabhängig von der Anzahl L der Zerlegungsschritte) nur

$$\sum_{\ell=0}^L \frac{mN}{2^\ell} \leq 2mN$$

Operationen erforderlich.

Konkret: Das Wavelet ‘db4’ in der Wavelet-Toolbox von matlab hat $m = 8$ Koeffizienten in \tilde{p}, \tilde{q} . Für das Signal `hoelder.mat` der Länge 1025 erhalten wir bei 5 Zerlegungsschritten die folgenden Vektorlängen:

a_0	d_{-1}	d_{-2}	d_{-3}	d_{-4}	d_{-5}	a_{-5}
1025	516	261	134	70	38	38

Die Abweichung von der jeweiligen Halbierung in jedem Schritt ist maximal $m/2 = 4$. Für jeden Koeffizienten gab es 8 Operationen, also insgesamt

$$8 * (516 + 261 + 134 + 70 + 38 + 3) = 8 * 1057$$

Operationen.

Nun wollen wir noch die ursprüngliche Funktion $f \in V_J$ aus ihren einzelnen Komponenten wieder zusammensetzen (sog. *Rekonstruktion, Synthese*). In der Praxis wird man die einzelnen Koeffizientenfolgen d_j der Detailkomponenten g_j von f mit gewissen Methoden behandeln (z.B. führt *Thresholding* ein Annullieren einzelner Koeffizienten $d_{j,k}$ von sehr kleinem Betrag durch, um Speicher zu sparen oder um Rauschen im Signal f zu unterdrücken, siehe späteres Kapitel). Liegen sowohl die Koeffizientenfolgen einer Approximation a_{J-L} und der Detailkomponenten d_j , $J-L \leq j \leq J-1$, vor, so lässt sich mit den Skalierungs- und Waveletmasken p bzw. q die Folge a_J der Approximationsstufe J rekonstruieren. Die Skalierungsgleichungen für ϕ und ψ werden zunächst auf die Skalierungsstufe $j \in \mathbb{Z}$ übertragen gemäß

$$\begin{aligned} \phi_{j,k}(x) &= 2^{j/2} \phi(2^j x - k) = 2^{j/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} p_m \phi(2^{j+1} x - 2k - m) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} p_m \phi_{j+1, 2k+m} \\ \psi_{j,k}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} q_m \phi_{j+1, 2k+m}. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir für die Komponenten

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi_{j,k} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \sum_{m \in \mathbb{Z}} p_m \phi_{j+1, 2k+m} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} p_{m-2k} \right) \phi_{j+1, 2k+m}, \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} p_{m-2k} \right) \phi_{j+1, 2k+m}. \end{aligned}$$

Die innere Summe kann sofort als Faltung der Maske p (bzw. q) mit der aufgefüllten Koeffizientenfolge Ua_j (bzw. Ud_j) identifiziert werden.

SATZ 4.40. (Algorithmus: Wavelet-Rekonstruktion im Zeit-Bereich)

Zur Funktion $f \in V_J$ und $L \in \mathbb{N}$ seien die Koeffizientenfolgen a_{J-L} der Approximation der Stufe $J-L$ sowie d_j , $J-L \leq j \leq J-1$, der Detailkomponenten gegeben.

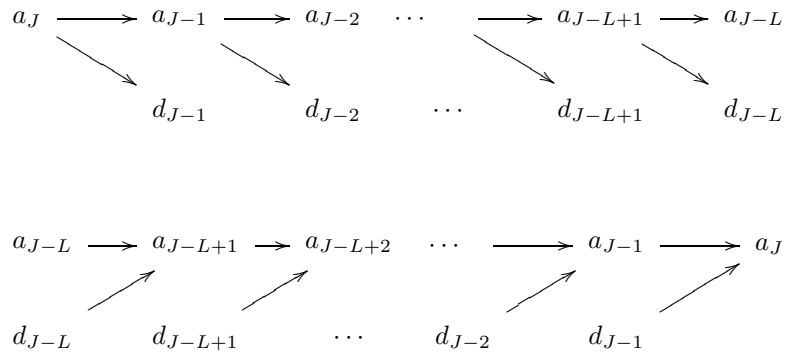


BILD 4.6. Wavelet-Zerlegung (oben) und Rekonstruktion (unten)

Dann sind die Folgen a_j der Approximation der Stufe $J - L + 1 \leq j \leq J$ gegeben durch

$$(4.45) \quad a_{j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (F_p \circ U(a_j) + F_q \circ U(d_j)),$$

mit der Skalierungsmaske p von ϕ und der Waveletmaske q von ψ .

Der entsprechende Befehl in `matlab` zur oben beschriebenen Datenstruktur aus der Wavelet-Zerlegung lautet

```
A = waverec(D,K,'Haar')
```

Zerlegungs- und Rekonstruktions-Algorithmus bilden zusammen eine "Perfect Reconstruction Filter Bank"; damit bezeichnet man die Anwendung von digitalen Filteroperationen (z.B. der Faltung mit vorgegebenen "Masken", hier (p_k) und (q_k)), die nach vollständiger Ausführung wieder zum Ursprungssignal (hier a_J) zurückführen. Eine einfache Darstellung dieser Filterbank ist durch den Graphen in Abbildung 4.6 gegeben.

In der Signalverarbeitung sind Diagramme üblich, um die verwendeten Operationen in diesem Schema zu veranschaulichen. Die Faltung wird dabei durch Angabe des Symbols P bzw. Q bezeichnet. Zahlen an Knotenpunkten des Graphen bedeuten Multiplikation der Folge mit dem Skalar, das Rechenzeichen $+$ bedeutet Addition der Folgen, die sich in diesem Knoten treffen. Statt der Buchstaben D und U für die Down- bzw. Upsampling-Operatoren verwendet man lieber die Symbole \downarrow_2 und \uparrow_2 . Die Wavelet-Zerlegung wird dann durch die *Filterbank* in Abbildung 4.7 dargestellt, die Rekonstruktion in Abbildung 4.7.

Eine zweite Beschreibung des Algorithmus zur Rekonstruktion in Satz 4.40 ist in Anwendungen des Computer Aided Design (CAD) unter der Bezeichnung *Unterteilungs-Algorithmus* (engl. *Subdivision*) bekannt. Dazu schreiben wir die Gleichung

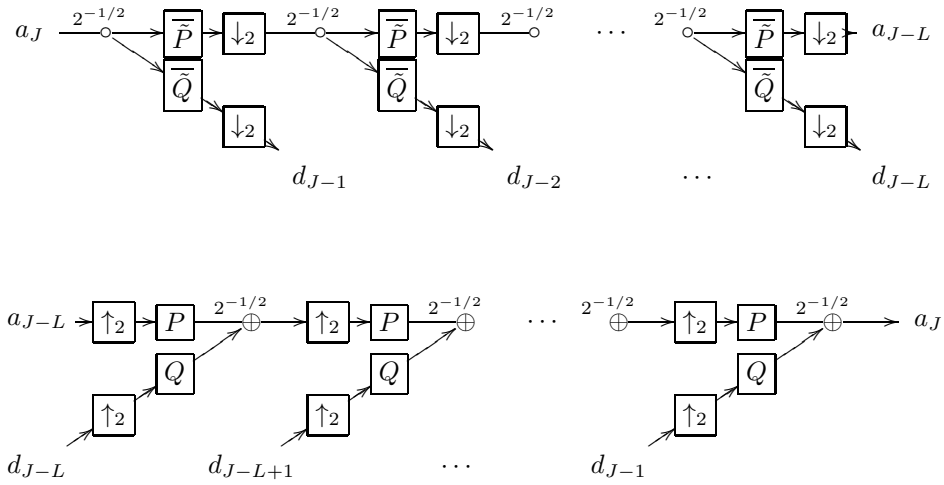


BILD 4.7. Filterbank der DWT-Zerlegung (oben) und Rekonstruktion (unten)

(4.45) getrennt für gerade und ungerade Indizes $k \in \mathbb{Z}$ auf, also

$$(4.46) \quad a_{j+1,2k} = 2^{-1/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (p_{2\ell} a_{j,k-\ell} + q_{2\ell} d_{j,k-\ell}),$$

$$(4.47) \quad a_{j+1,2k+1} = 2^{-1/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (p_{2\ell+1} a_{j,k-\ell} + q_{2\ell+1} d_{j,k-\ell}).$$

Mit den Teilmasken (engl. *stencil*)

$$\begin{aligned} p^{(0)} &= (p_{2k})_{k \in \mathbb{Z}}, & p^{(1)} &= (p_{2k+1})_{k \in \mathbb{Z}}, \\ q^{(0)} &= (q_{2k})_{k \in \mathbb{Z}}, & q^{(1)} &= (q_{2k+1})_{k \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

erhalten wir "richtige" Faltungen ohne Verwendung des Upsampling-Operators,

$$\begin{aligned} a_{j+1,2k} &= 2^{-1/2} \left((p^{(0)} * a_j)(k) + (q^{(0)} * d_j)(k) \right), \\ a_{j+1,2k+1} &= 2^{-1/2} \left((p^{(1)} * a_j)(k) + (q^{(1)} * d_j)(k) \right) \end{aligned}$$

Die Gesamtfolge a_j kann also durch Berechnung der Teilfolgen $(a_{j,2k})$ und $(a_{j,2k+1})$ und anschließendes Zusammenfügen berechnet werden. Die Teilmasken werden wie in Abbildung 4.8 grafisch dargestellt.

4. Erweiterungen

Wir wollen zwei Erweiterungen der semi-orthogonalen MRA-Wavelets betrachten. Zuerst wird die Klasse der biorthogonalen Wavelets erklärt, dann wird auf die Skalierung mit Faktoren $m > 2$ eingegangen.

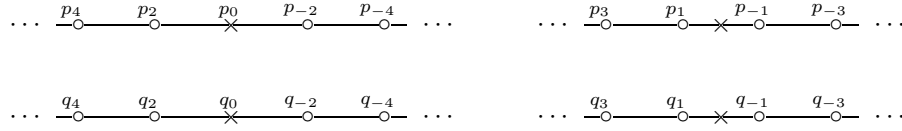


BILD 4.8. Teilmasken (Stencils) der Skalierungsmaske (oben) und Waveletmaske (unten) zur DWT-Rekonstruktion (ohne Faktor $2^{-1/2}$). Der Auswertungspunkt $2k$ (links) bzw. $2k + 1$ (rechts) ist mit dem Kreuz markiert.

In Bemerkung 4.22 wurde der Begriff des MRA-Wavelets eingeführt. Dazu sei die Funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ein Mutter-Wavelet und ihr Skalenraum

$$V_0 = \bigoplus_{j=-\infty}^{-1} W_j$$

ein \mathbb{Z} -shift-invarianter Raum mit Riesz-Basis $\Phi = (\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z})$. Wir wissen nach Satz 4.21, dass ein duales Mutter-Wavelet $\tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$ existiert, so dass Ψ und $\tilde{\Psi}$ duale Riesz-Basen von $L^2(\mathbb{R})$ sind. Die Beziehungen in (4.20)

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k} = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

drücken unter anderem den folgenden Sachverhalt aus:

(i) Der Skalenraum

$$\tilde{V}_0 = \bigoplus_{j=-\infty}^{-1} \tilde{W}_j$$

ist ebenfalls \mathbb{Z} -shift-invariant; denn die duale Riesz-Basis von $\tilde{\Psi}$ in Satz 4.21 ist ja die Wavelet-Basis $\tilde{\Psi}$.

(ii) Die Waveleträume W_j (von ψ) und \tilde{W}_j (von $\tilde{\psi}$) erfüllen die “Kreuz-Orthogonalität”

$$(4.48) \quad W_j \perp \tilde{W}_k, \quad j \neq k, \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Wir definieren wie vorher alle Skalenräume

$$V_j = \bigoplus_{\ell=-\infty}^{j-1} W_\ell, \quad \tilde{V}_j = \bigoplus_{\ell=-\infty}^{j-1} \tilde{W}_\ell.$$

Aus den Beziehungen in (ii) folgt als Erweiterung gegenüber den semi-orthogonalen Wavelets, dass für alle $j \in \mathbb{Z}$

$$(4.49) \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad W_j \perp \tilde{V}_j,$$

$$(4.50) \quad \tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j, \quad \tilde{W}_j \perp V_j$$

gilt. Die paarweise Orthogonalität der Waveleträume W_j aus der semi-orthogonalen Situation taucht hier also als “Kreuz-Orthogonalität” der beiden Sequenzen W_j und

\widetilde{W}_j auf. Entsprechend wird auch die Konstruktion von *biorthogonalen Wavelet-Basen* aus zwei miteinander verknüpften MRA's erzielt. Ohne Beweis formulieren wir das folgende Hauptresultat.

SATZ 4.41. (Konstruktion biorthogonaler Wavelets)

Durch $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ und $(\widetilde{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ seien zwei Multiskalen-Analysen gegeben, deren Skalierungsfunktionen $\phi \in V_0$ und $\tilde{\phi} \in \widetilde{V}_0$ die Beziehung

$$(4.51) \quad [\hat{\phi}, \hat{\tilde{\phi}}](\omega) = 1 \quad f.ü.$$

erfüllen. Weiter sei P bzw. \tilde{P} das Skalierungssymbol von ϕ bzw. $\tilde{\phi}$.

Dann sind $\psi, \tilde{\psi}$ mit

$$\hat{\psi}(\omega) = Q\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \tilde{Q}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\tilde{\phi}}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

und den Wavelet-Symbolen

$$(4.52) \quad Q(\omega) = e^{-2\pi i \omega} \overline{\tilde{P}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)}, \quad \tilde{Q}(\omega) = e^{-2\pi i \omega} \overline{P\left(\omega + \frac{1}{2}\right)},$$

ein Paar biorthogonaler Mutter-Wavelets.

Für die Wavelet-Zerlegung verwenden wir ein Analogon von Satz 4.27. An die Stelle der Klammerprodukte $[\hat{\phi}, \hat{\phi}]$ und $[\hat{\psi}, \hat{\psi}]$ tritt dabei

$$[\hat{\phi}, \hat{\tilde{\phi}}] = [\hat{\psi}, \hat{\tilde{\psi}}] = 1,$$

wodurch sich die Formeln vereinfachen.

SATZ 4.42. Es $f \in V_1$, d.h. es gilt

$$\hat{f}(\omega) = \tau\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

mit einer periodischen Funktion $\tau \in L^2(0, 1)$ der Periodenlänge 1. Dann gilt

$$\hat{f}(\omega) = a(\omega) \hat{\phi}(\omega) + d(\omega) \psi(\omega)$$

mit den 1-periodischen Funktionen $a, d \in L^2(0, 1)$

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \overline{\tilde{P}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \tau\left(\frac{\omega}{2}\right) + \overline{\tilde{P}\left(\frac{\omega+1}{2}\right)} \tau\left(\frac{\omega+1}{2}\right), \\ d(\omega) &= \overline{\tilde{Q}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \tau\left(\frac{\omega}{2}\right) + \overline{\tilde{Q}\left(\frac{\omega+1}{2}\right)} \tau\left(\frac{\omega+1}{2}\right). \end{aligned}$$

Der wesentliche Teil des Beweises steckt in den folgenden Relationen der Skalierungs- und Waveletsymbole.

FOLGERUNG 4.43. Die Skalierungs- und Wavelet-Symbole in Satz 4.41 erfüllen die Gleichungen

$$\begin{aligned} P(\omega)\overline{\tilde{P}(\omega)} + P\left(\omega + \frac{1}{2}\right)\overline{\tilde{P}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} &= 1, \\ P(\omega)\overline{\tilde{Q}(\omega)} + P\left(\omega + \frac{1}{2}\right)\overline{\tilde{Q}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} &= 0, \\ Q(\omega)\overline{\tilde{P}(\omega)} + Q\left(\omega + \frac{1}{2}\right)\overline{\tilde{P}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} &= 0, \\ Q(\omega)\overline{\tilde{Q}(\omega)} + Q\left(\omega + \frac{1}{2}\right)\overline{\tilde{Q}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} &= 1. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise bedeutet dies

$$\begin{pmatrix} P(\omega) & P\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \\ Q(\omega) & Q\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\tilde{P}(\omega)} & \overline{\tilde{Q}(\omega)} \\ \overline{\tilde{P}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} & \overline{\tilde{Q}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Ergebnissen sieht man, dass die Algorithmen und Filterbänke zur Zerlegung und Rekonstruktion in Abschnitt 4.3 wörtlich übernommen werden.

Unsere zweite Verallgemeinerung bezieht sich auf den Skalierungsparameter 2^j in den bisherigen Konstruktionen. An Stelle der Basis 2 kann jede natürliche Zahl $m \geq 2$ verwendet werden. Dadurch ändert sich der Begriff der ‘‘Skalierungsinvarianz’’ bei der Definition der MRA in

$$f \in V_j \iff f(m^{-j}\cdot) \in V_0.$$

Die Skalierungsgleichungen lauten dann

$$\hat{\phi}(\omega) = P_\phi(m^{-1}\omega)\hat{\phi}(m^{-1}\omega), \quad P_\phi(\omega) = \frac{1}{m} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k e^{-2\pi i k \omega},$$

im Frequenzbereich, bzw.

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(mx - k).$$

An die Stelle eines Mutter-Wavelets ψ treten nun $m-1$ Wavelets $\psi^{(r)}$, $1 \leq r \leq m-1$, mit

$$\widehat{\psi^{(r)}}(\omega) = Q_r(m^{-1}\omega)\hat{\phi}(m^{-1}\omega), \quad 1 \leq r \leq m-1.$$

Die $m-1$ Wavelet-Symbole Q_1, \dots, Q_{m-1} sind 1-periodische Funktionen, für die die $m \times m$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} P(\omega) & P\left(\omega + \frac{1}{m}\right) & \cdots & P\left(\omega + \frac{m-1}{m}\right) \\ Q_1(\omega) & Q_1\left(\omega + \frac{1}{m}\right) & \cdots & Q_1\left(\omega + \frac{m-1}{m}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{m-1}(\omega) & Q_{m-1}\left(\omega + \frac{1}{m}\right) & \cdots & Q_{m-1}\left(\omega + \frac{m-1}{m}\right) \end{pmatrix}$$

überall invertierbar ist. Die inverse Matrix definiert dann die Symbole \tilde{P} und $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_{m-1}$ für die Zerlegung analog zu Satz 4.27. Im Algorithmus zur Wavelet-Zerlegung findet an den Knoten jeweils eine Verzweigung in m Äste statt, die Multiplikatoren in den Knoten sind $m^{-1/2}$. Analoges gilt für die Rekonstruktion.