

Wavelet-Analysis

1. Übungsblatt

Abgabetermin: Dienstag, 21.10., 12:00 Uhr
Briefkasten 98

Aufgabe 1 Die diskreten Walsh- und Haar-Basen

Die orthonormalen Walsh- und Haar-Basen von ℓ^{2^K} , $K \in \mathbb{N}$, stehen in einem linearen Zusammenhang zueinander. Geben Sie für $K = 3$ die entsprechende Transformationsmatrix an.

Aufgabe 2 Schwache und starke Konvergenz

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem Hilbertraum \mathcal{H} konvergiert per Definition (stark) gegen ein $x \in \mathcal{H}$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. Gilt jedoch die schwächere Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, y \rangle = 0$ für alle $y \in \mathcal{H}$, so bezeichnen wir dies als *schwache Konvergenz* von (x_n) gegen x und schreiben $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Zeigen Sie, dass (x_n) genau dann (stark) gegen x konvergiert, wenn

$$w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

Aufgabe 3 Faltung von Funktionen

Die *Faltung* $f * g$ von zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt.$$

Hierbei wird das Lebesgue-Integral verwendet. Zeigen Sie:

- (i) Für $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ ist $f * g(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert und $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist beschränkt.
- (ii) Berechnen Sie $f * f$ für die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x) = \exp(-|x|)$.

Programmieraufgabe 1

- (i) Schreiben Sie ein Matlab-Programm `fcoeffs_<Name>.m`, das zu einem Inputvektor v der Länge $N = 2^J$, $J \in \mathbb{N}$, die Koeffizienten $c_k = \langle v, e_k \rangle$, $k = 0, \dots, N-1$, bestimmt. Dabei stellen die Vektoren e_k entweder die Walsh-Basis oder die diskrete Haar-Basis dar. Lassen Sie beim Aufruf des Programms die Wahl der Basis über einen zweiten Input-Parameter angeben.
- (ii) Schreiben Sie ein Skript `waveProg1_<Name>.m`, welches jeweils zu den Signalen

- Triangle: `z = zeros(1,32);v = [z 1:16 15:-1:-16 -15:0 z];`
- Noisy Cosine:
`t = linspace(0,8*pi,256); v = cos(t) + .1*randn(1,256);`
- Cuspamax: `load cuspamax; v=cuspamax;`

die Koeffizienten zu den zwei Basen aus (i) berechnet und gemeinsam mit dem Originalsignal graphisch in einem Fenster mit drei Subplots ausgibt.

Hinweis: Bei Programmieraufgaben schicken Sie Ihre Programme bitte bis zum Ende der Abgabefrist per Mail an `tobias.springer@tu-dortmund.de`. Geben Sie jeweils an der Stelle `<Name>` Ihren Hausnamen ein, bei mehreren Gruppenmitgliedern reicht ein Name. Gewertet werden nur voll funktionsfähige Programme.